УДК 431.381

В. Н. Кошляков (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О СТРУКТУРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

We consider a general method for structural transformations of one class of dynamical systems with gyroscopic forces, which enables us to eliminate gyroscopic terms from the original perturbed equations. Without changing the qualitative properties of these equations, this method simplifies their investigation.

Розглядається загальна методика структурних перетворень деякого класу динамічних систем з гіроскопічними силами, яка приводить до виключення гіроскопічних членів із вихідних рівнянь збуреного руху. Не змінюючи якісних властивостей названих рівнянь, ця методика спрощує їх дослідження.

1. Среди методов приближенного исследования проблем и задач нелинейной механики важное значение имеет метод усреднения, впервые обоснованный Н. Н. Боголюбовым применительно к специальной (стандартной) форме дифференциальной системы вида [1]

$$\dot{x} = \mu X(t, x, \mu), \qquad x(0) = x_0. \tag{1}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — n-мерные векторы, μ — малый неотрицательный постоянный параметр.

Теорема Боголюбова устанавливает при строго определенных условиях ε-близость решений системы (1) и сопоставляемой ей усредненной системы [2 – 4]

$$\dot{\xi} = \mu X_0(\xi, \mu), \qquad \xi(0) = \xi_0, \tag{2}$$

где

$$X_0(\xi, \mu) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \xi, \mu)\, dt. \tag{3}$$

В некоторых случаях устойчивости (неустойчивости) усредненной системы сопутствует аналогичное состояние в исходной системе и тогда, когда последняя не обязательно приведена к виду (1). Однако в таких ситуациях формальная замена одних уравнений другими не всегда способна привести к правильному результату [5]. Последнее обстоятельство относится, в частности, к динамическим системам с гироскопическими силами. Если, например, коэффициенты при гироскопических членах в уравнениях возмущенного движения являются непрерывными периодическими функциями некоторого вещественного периода $\tau > 0$, то усреднение (3) заменяется усреднением по τ. Но в этом случае в процессе формального усреднения могут обратиться в нули гироскопические члены, учет которых, несмотря на их периодичность, все же приводит к определенному стабилизирующему эффекту [6].

При наличии гироскопических структур в исходных уравнениях возмущенного движения желательно располагать обоснованными методами, позволяющими, не изменяя условий устойчивости и стабилизирующих свойств, присущих гироскопическим структурам вообще, видоизменять исходные уравнения так, чтобы преобразованные уравнения не содержали гироскопических членов. Получаемые таким образом уравнения приводятся, как правило, без особых затруднений, к стандартному виду (1).

В этом плане можно отметить метод приведения к стандартному виду с помощью нормальных координат, распространяющийся на гироскопические системы [7] и используемый в монографии [8]. Отметим также методику приведения к стандартному виду, предложенную в монографии [4] применительно к гироскопическим системам (при условии невырожденности матрицы гироскопических сил).

Ниже при более общих предпосылках рассматривается способ структурного преобразования исходных уравнений возмущенного движения, приводящий к исключению в них гироскопических членов.

Объектом рассмотрения будет матричное уравнение вида

$$a_0 \ddot{x} + D\dot{x} + H\dot{x} + \Pi x + Fx = X(x, \dot{x}), \tag{4}$$

где x — n-мерный вектор, a_0 — некоторый положительный скалярный параметр, D и Π — симметрические матрицы размера $n \times n$, H и F — кососимметрические матрицы того же размера, $X(x, \dot{x})$ — вектор-функция, содержащая x и $\dot{x}$ в степенях выше первой. В общем случае элементы указанных матриц могут быть вещественными, непрерывными и ограниченными функциями t. Уравнением (4) описывается возмущенное движение многих систем, находящихся под действием диссипативных, гироскопических и неконсервативных позиционных сил [9].

Перейдем в уравнении (4) к новой матричной переменной ξ с помощью преобразования с матрицей Ляпунова $L(t)$, полагая

$$\xi = Lx. \tag{5}$$

В результате получаем уравнение относительно ξ, приводящееся к виду

$$a_0 \ddot{\xi} + LDL^{-1} \dot{\xi} + \left(L\Pi - a_0 \ddot{L}\right)L^{-1}\xi + \left(LH - 2a_0 \dot{L}\right)L^{-1}\left(\dot{\xi} - \dot{L}L^{-1}\xi\right) +$$
$$+ L\left(F - DL^{-1}\dot{L}\right)L^{-1}\xi = \Xi, \tag{6}$$

где вектор-функция Ξ содержит величины ξ и $\dot{\xi}$ в степенях не ниже второй.

Четвертое слагаемое в левой части уравнения (6) в любом случае обращается в нуль при выполнении условия

$$2a_0 \dot{L} - LH = 0,$$

которое при заданной матрице H можно рассматривать как матричное дифференциальное уравнение относительно искомой матрицы L, приводящее, согласно (5), к исключению гироскопических членов из уравнения (6). В этом случае, учитывая кососимметричность матрицы H и начальные условия в виде единичной матрицы E, получаем L в форме ортогональной матрицы, вследствие чего следует считать $L^{-1} = L^T$, где L^T — транспонированная матрица L. Таким образом, L можно рассматривать как интегральную матрицу уравнения

$$\dot{L} = (2a_0)^{-1} LH, \quad L(0) = E. \tag{7}$$

С учетом изложенного уравнение (6) представляется в виде

$$a_0 \ddot{\xi} + LDL^T \dot{\xi} + \left[L\left(\Pi + F - DL^T \dot{L}\right) - a_0 \ddot{L}\right]L^T \xi = \Xi, \tag{8}$$

где L определяется решением уравнения (7). При отсутствии диссипативных и неконсервативных сил $(D = F = 0)$ имеем

$$\ddot{\xi} + K\xi = \Xi, \tag{9}$$

причем

$$K = a_0^{-1}\left(L\Pi - a_0 \ddot{L}\right)L^T.$$

Если матрица K симметрическая, то с точностью до правой части уравнение (9) соответствует линейной гамильтоновой системе [10].

Рассматривая вновь уравнение (6), замечаем, что при условиях

$$2a_0\dot{L} - LH = 0, \quad DL^{-1}\dot{L} - F = 0 \tag{10}$$

обращаются в нуль два последние слагаемые в названном уравнении и, таким образом, из него исключаются, помимо гироскопических, и неконсервативные позиционные члены. Условия (10) выполняются одновременно, однако, лишь в исключительном случае, когда матрицы H, D и F, не будучи тождественно нулями, связаны зависимостью

$$2a_0F - DH = 0.$$

2. Частным случаем рассмотренного в п. 1 общего преобразования матричного уравнения (4) является упрощающая подстановка, использованная в статье [11] применительно к задаче стабилизации гироскопа Лагранжа с вибрирующей по вертикали точкой опоры. Соответственные уравнения Эйлера – Пуассона имеют вид

$$\begin{aligned} &A\dot{p} + (C-A)qr = m(g-ap^2\cos pt)l\gamma_2 + M_x^*, \\ &A\dot{q} - (C-A)rp = -m(g-ap^2\cos pt)l\gamma_1 + M_y^*, \\ &C\dot{r} = M_z^*, \\ &\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Обозначения в (11) те же, что и в статье [11]. С целью обобщения результатов цитируемой статьи положим

$$M_x^* = -\lambda Ap, \quad M_y^* = -\lambda Aq, \quad M_z^* = -\lambda_1 Cr^n, \tag{12}$$

где λ и λ_1 — некоторые постоянные. Везде далее считаем $n \geq 2$ (случай $n = 1$ рассмотрен в [11]). Используя третье из уравнений (11), с учетом (12) имеем

$$r = \omega = \frac{\omega_0}{\sqrt[n-1]{1+\lambda_1(n-1)\omega_0^{n-1}t}}, \quad \dot{\omega} = -\frac{\lambda_1\omega_0^n}{\sqrt[n-1]{\left\{1+\lambda_1(n-1)\omega_0^{n-1}t\right\}^n}}, \tag{13}$$

где ω_0 — начальное значение ω.

Полагая в первом приближении $\gamma_3 = 1$, из (11) получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &\ddot{\gamma}_1 + \lambda\dot{\gamma}_1 - \frac{2A-C}{A}\omega\dot{\gamma}_2 + \frac{1}{A}\left\{(C-A)\omega^2 - m(g-ap^2\cos pt)l\right\}\gamma_1 - \\ &\qquad - (\dot{\omega}+\lambda\omega)\gamma_2 = 0, \\ &\ddot{\gamma}_2 + \lambda\dot{\gamma}_2 + \frac{2A-C}{A}\omega\dot{\gamma}_1 + \frac{1}{A}\left\{(C-A)\omega^2 - m(g-ap^2\cos pt)l\right\}\gamma_2 + \\ &\qquad + (\dot{\omega}+\lambda\omega)\gamma_1 = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

где ω и $\dot{\omega}$ определяются выражениями (13).

Матричным уравнением (7) описывается общий алгоритм, приводящий в частном случае уравнений (14) к исключению из них членов гироскопической структуры. Полагая $L = \left\| l_{jk} \right\|_1^2$, а также

$$a_0 = 1, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & -h \\ h & 0 \end{bmatrix}, \quad h = \frac{2A-C}{A}\omega, \tag{15}$$

приходим к уравнениям относительно элементов l_{jk} матрицы L:

$$2\dot{l}_{11} = hl_{12}, \quad 2\dot{l}_{21} = hl_{22},$$
$$2\dot{l}_{12} = -hl_{11}, \quad 2\dot{l}_{22} = -hl_{21}, \tag{16}$$

где h следует считать переменной величиной. Уравнения (16) легко интегрируются. Удовлетворяя в L единичной матрице начальных условий, имеем

$$L = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \tag{17}$$

где

$$\theta = \int_0^t \Omega(\tau)\,d\tau, \quad \Omega = \frac{2A-C}{2A}\omega. \tag{18}$$

Полагая $a_0 = 1$, $D = \lambda E$, $\Xi = 0$ в матричном уравнении (8), а также

$$\Pi = \frac{1}{A}\left\{(C-A)\omega^2 - m(g - ap^2\cos pt)l\right\}E, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\omega}+\lambda\omega) \\ \dot{\omega}+\lambda\omega & 0 \end{bmatrix}$$

и учитывая выражения (15) – (18), приходим к двум скалярным уравнениям относительно ξ_1 и ξ_2. Последние, в свою очередь, с помощью подстановок

$$\xi_1 = e^{-bt}y_1, \quad \xi_2 = e^{-bt}y_2, \quad 2b = \lambda \tag{19}$$

преобразуются к виду

$$\ddot{y}_1 + \Phi(t)y_1 - \frac{C}{2A}(2b\omega+\dot{\omega})y_2 = 0,$$
$$\ddot{y}_2 + \Phi(t)y_2 + \frac{C}{2A}(2b\omega+\dot{\omega})y_1 = 0, \tag{20}$$

где

$$\Phi(t) = \frac{C^2\omega^2 - 4Amgl}{4A^2} + \frac{map^2l}{A}\cos pt - b^2.$$

Вводя вектор $y = [\,y_1, y_2\,]^T$, систему (20) можно представить в виде

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (P(t)+Q(t))\,y = 0, \tag{21}$$

где

$$P(t) = \left\{\frac{map^2l}{A}\cos pt - \left(\frac{mgl}{A}+b^2\right)\right\}E,$$
$$Q(t) = \frac{C}{2A}\begin{bmatrix} \dfrac{C\omega^2}{2A} & -(2b\omega+\dot{\omega}) \\ 2b\omega+\dot{\omega} & \dfrac{C\omega^2}{2A} \end{bmatrix}. \tag{22}$$

При ограниченности решений уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left\{\frac{map^2l}{A}\cos pt - \left(\frac{mgl}{A}+b^2\right)\right\}y = 0 \tag{23}$$

будут устойчиво ограничены и все решения уравнения (21), если

$$\int_0^t \|Q(t)\| dt < \infty, \tag{24}$$

где $\|Q(t)\|$ — норма матрицы Q, определяющейся в данном случае согласно (22). Условие (24), как это следует из выражений (13) и (22), выполняется при $n \geq 2$. Использование диаграммы Айнса – Стретта применительно к уравнению Матье (23) приводит к условию [11]

$$ap > \frac{1}{ml}\sqrt{2A(mgl + b^2 A)}, \tag{25}$$

соответствующему устойчивой ограниченности решений уравнения (23). В силу подстановок (19) выполнение условия (25) влечет асимптотическую устойчивость невозмущенного движения тела, когда

$$p = q = 0, \quad r = \omega, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1,$$

где ω определяется первой из формул (13).

В заключение отметим, что применительно к случаю математического маятника, установленного на вибрирующем основании, когда в (25) можно положить $A = ml^2$, где l — плечо маятника, при пренебрежении сопротивлением среды приходим к условию Боголюбова – Капицы

$$ap > \sqrt{2gl}.$$

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. – Киев: Изд-во АН УССР, 1945. – 139 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 501 с.
3. *Гребенников Е. А.* Метод усреднения в прикладных задачах. – М.: Наука, 1986. – 256 с.
4. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. – М.: Наука, 1988. – 328 с.
5. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. – М.: Наука, 1955. – 207 с.
6. *Кошляков В. Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. Аналитические методы. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
7. *Булгаков Б. В.* О нормальных координатах // Прикл. математика и механика. – 1946. – **10**, вып. 2. – С. 273–290.
8. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1964. – 432 с.
9. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
10. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Параметрический резонанс в линейных системах. – М.: Наука, 1987. – 328 с.
11. *Кошляков В. Н.* Об устойчивости движения симметричного тела, установленного на вибрирующем основании // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 12. – С. 1661–1666.

Получено 17.09.96