УДК 517.948

М. Л. Горбачук, В. І. Горбачук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПОВЕДІНКА НА НЕСКІНЧЕННОСТІ РОЗШИРЕНОЇ СПЕКТРАЛЬНОЇ МІРИ САМОСПРЯЖЕНОГО ОПЕРАТОРА *

We study the dependence of the rate of growth of the extended spectral measure of a self-adjoint operator at infinity upon the order of singularity of the vector on which this measure is considered.

Досліджується залежність швидкості росту розширеної спектральної міри самоспряженого оператора від порядку сингулярності вектора, на якому ця міра розглядається.

В теорії операторів, цілих відносно узагальненого масштабу, а також в теорії сингулярних збурень виникає потреба в дослідженні поведінки так званої розширеної спектральної міри самоспряженого оператора на його гладких та узагальнених векторах. У випадку, коли порядок сингулярності узагальненого елемента дорівнює 1, ця задача була розв'язана Ю. Л. Шмульяном [1]. Мета даної роботи — пов'язати швидкість росту розширеної спектральної міри на узагальнених елементах з порядком їх сингулярності, причому цей порядок не обов'язково повинен бути скінченним.

1. Нехай $\mathfrak{H}$ — сепарабельний гільбертів простір, $(\cdot,\cdot)$ і $\|\cdot\|$ — скалярний добуток і норма в ньому, A — необмежений самоспряжений невід'ємний оператор в $\mathfrak{H}$, $E(\Delta)$ (Δ — борелівська множина в $[0,\infty)$) — його спектральна міра. Позначимо через $\mathcal{E}(A)$ множину всіх цілих векторів експоненціального типу оператора A, тобто

$$\mathcal{E}(A) = \left\{ f \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^k) \mid \ \exists c>0, \ \exists \alpha>0: \right.$$

$$\left. \|A^k f\| \le c\alpha^k, \ \ k\in\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\} \right\} \tag{1}$$

($\mathcal{D}(\cdot)$ — область визначення оператора). На множині $\mathcal{E}(A)$ введемо топологію індуктивної границі банахових просторів $\mathcal{E}_\alpha(A)$ векторів, що задовольняють нерівність (1) з фіксованим α. Норма в просторі $\mathcal{E}_\alpha(A)$ визначається як

$$\|f\|_{\mathcal{E}_\alpha(A)} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{\|A^k f\|}{\alpha^k}.$$

Отже,

$$\mathcal{E}(A) = \operatorname*{ind\,lim}_{\alpha\to\infty} \mathcal{E}_\alpha(A).$$

Теорема 1. *Вектор $f\in\mathfrak{H}$ є цілим експоненціального типу для оператора A тоді і тільки тоді, коли існують вектор $g\in\mathfrak{H}$ і число a: $0<a<\infty$ такі, що*

$$f = E(a)g,$$

де $E(a) = E([0,a))$.

Доведення. Нехай $f = E(a)g$. Тоді

* Частково підтримана INTAS (project 93-02449).

$$\|A^k f\|^2 = \|A^k E(a) g\|^2 = \int_0^a \lambda^{2k} d(E(\lambda) g, g) \leq a^{2k} \|g\|^2,$$

тобто $f \in \mathcal{E}(A)$.

Навпаки, якщо $f \in \mathcal{E}(A)$, то існують сталі $a > 0$ та $c > 0$ такі, що для $\|A^k f\|$, $k \in \mathbb{N}_0$, виконується нерівність (1) з $\alpha = a$, що означає

$$\int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{2k} d(E(\lambda) f, f) < c.$$

З теореми Фату на підставі того, що $\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{2k} \to \infty$ при $k \to \infty$ для $\lambda > a$, випливає, що міра $(E(\Delta) f, f)$ зосереджена на $[0, a]$, тобто $\|E(\Delta') f\| = 0$, якщо $\Delta' \subset (a, \infty)$. Таким чином, $f = \mathcal{E}(A) f$. Теорему доведено.

Теорема 1 показує, що простір $\mathcal{E}(A)$ щільний в $\mathfrak{H}$ і вкладення $\mathcal{E}(A) \subset \mathfrak{H}$ є неперервним. Тому простір $\mathfrak{H}$ щільно й неперервно вкладений у простір $\mathcal{E}'(A)$, спряжений до $\mathcal{E}(A)$, а отже (див., наприклад, [2, 3]), білінійну форму (u, f), задану на $\mathcal{E}(A) \times \mathfrak{H}$, можна продовжити до неперервної білінійної форми на $\mathcal{E}(A) \times \mathcal{E}'(A)$.

Оператор A відображає неперервно простір $\mathcal{E}(A)$ в $\mathcal{E}(A)$. Тому оператор $\hat{A}$, що визначається рівністю

$$(u, \hat{A} f) = (A u, f) \quad \forall\, u \in \mathcal{E}(A), \quad \forall\, f \in \mathcal{E}'(A),$$

діє неперервно з $\mathcal{E}'(A)$ в $\mathcal{E}'(A)$ і є розширенням оператора $A : A f = \hat{A} f$, $f \in$ $\in \mathcal{D}(A)$.

Оскільки для будь-якої обмеженої борелівської множини Δ оператор $E(\Delta)$ відображає неперервно $\mathfrak{H}$ в $\mathcal{E}(A)$, то оператор $\hat{E}(\Delta)$, визначений співвідношенням

$$(f, \hat{E}(\Delta) g) = (E(\Delta) f, g) \quad \forall\, f \in \mathfrak{H}, \quad \forall\, g \in \mathcal{E}'(A), \tag{2}$$

діє неперервно з $\mathcal{E}'(A)$ в $\mathfrak{H}$. З рівності $E^2(\Delta) = E(\Delta)$ випливає, що $\hat{E}(\Delta)$ переводить неперервно $\mathcal{E}'(A)$ в $\mathcal{E}(A)$, причому $\hat{E}(\Delta)$ — розширення оператора $E(\Delta)$, тобто $\hat{E}(\Delta) f = E(\Delta) f$, для $f \in \mathfrak{H}$. Крім того, виконуються співвідношення

$$\hat{E}(\Delta_1) \hat{E}(\Delta_2) = \hat{E}(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1) \hat{E}(\Delta_2) = E(\Delta_2) \hat{E}(\Delta_1);$$

$$\hat{E}(\lambda) f \to f \quad \text{в просторі} \quad \mathcal{E}'(A) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty; \tag{3}$$

$$\hat{A} f = \int_0^\infty \lambda \, d\hat{E}(\lambda) f, \quad f \in \mathcal{E}'(A).$$

Остання рівність розуміється в слабкому сенсі, а саме:

$$(u, \hat{A} f) = (A u, f) = \left(\int_0^\infty \lambda \, dE(\lambda) u, f \right), \quad u \in \mathcal{E}(A).$$

Зауважимо, що для довільного елемента $u \in \mathcal{E}(A)$ інтеграл

$$\int_0^\infty \lambda \, dE(\lambda)u = \int_0^a \lambda \, dE(\lambda)u, \quad 0 < a < \infty,$$

збігається в просторі $\mathcal{E}(A)$.

Функції $\hat{E}(\Delta)$ та $\hat{E}(\lambda)$ назвемо відповідно розширеною спектральною мірою та розширеною спектральною функцією оператора A. Отже, розширена спектральна міра $\hat{E}(\Delta)$ оператора A за умови обмеженості Δ діє неперервно з $\mathcal{E}'(A)$ в $\mathcal{E}(A)$, є розширенням спектральної міри $E(\Delta)$ з $\mathfrak{H}$ на $\mathcal{E}'(A)$, і для неї виконуються співвідношення (3). Тому функція

$$\sigma_f(\lambda) = (\hat{E}(\lambda)f, f), \quad f \in \mathcal{E}'(A),$$

визначена на $[0, \infty]$, є монотонно неспадною, $\sigma_f(0) = 0$, і якщо $f \in \mathfrak{H}$, то $\sigma_f(\lambda)$ обмежена. Навпаки, якщо для $f \in \mathcal{E}'(A)$ функція $\sigma_f(\lambda)$ обмежена, то $f \in \mathfrak{H}$. Справді, в цьому випадку

$$\sigma_f(\lambda) = (\hat{E}(\lambda)f, f) = \|\hat{E}(\lambda)f\|^2 < c, \quad c < \infty.$$

Отже, множина $\{\hat{E}(\lambda)f\}_{\lambda \in [0,\infty)}$ є обмеженою в $\mathfrak{H}$ і з неї можна виділити послідовність $\hat{E}(\lambda_n)$, слабко збіжну в $\mathfrak{H}$ при $n \to \infty$ до деякого елемента $g \in \in \mathfrak{H}$. Оскільки $\hat{E}(\lambda_n) f \to f$, $n \to \infty$, в просторі $\mathcal{E}'(A)$, то $f = g \in \mathfrak{H}$.

Як видно з наведених міркувань, функція $\sigma_f(\lambda)$ заздалегідь не є обмеженою, якщо $f \notin \mathfrak{H}$. Тому постає питання про її поведінку на нескінченності, про що йтиметься в наступних двох пунктах.

2. Нехай $G(\lambda) \ge 1$ — неперервна на $[0, \infty]$ функція така, що $G(\lambda) \to \infty$, коли $\lambda \to \infty$. На області визначення $\mathcal{D}(G(A))$ оператора

$$G(\lambda) = \int_0^\infty G(\lambda) \, dE(\lambda)$$

введемо скалярний добуток

$$(f, g)_{\mathfrak{H}_G(A)} = (G(A)f, G(A)g).$$

Тоді $\mathcal{D}(G(A)) = \mathfrak{H}_G(A)$ — гільбертів простір щодо $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}_G(A)}$. З нерівності

$$\|f\| \le \|f\|_{\mathfrak{H}_G(A)}, \quad f \in \mathfrak{H}_G(A),$$

випливає, що $\mathfrak{H}_G(A)$ — простір з позитивною нормою відносно $\mathfrak{H}$ [4]. Позначимо через $\mathfrak{H}'_G(A)$ простір з негативною нормою, побудований за парою $\mathfrak{H}$ та $\mathfrak{H}_G(A)$. Цей простір одержується як поповнення $\mathfrak{H}$ за нормою

$$\|\|f\|_{\mathfrak{H}'_G(A)} \le \| G^{-1}(A)f\|, \quad f \in \mathfrak{H}.$$

Теорема 2. *Звуження оператора A на множину $\mathcal{E}(A)$ допускає замикання $\hat{A}_G$ у просторі $\mathfrak{H}'_G(A)$. Це замикання є самоспряженим додатним оператором в $\mathfrak{H}'_G(A)$, причому $A \subset \hat{A}_G \subset \hat{A}$ і для будь-якої обмеженої борелівської множини $\Delta \subset [0, \infty]$*

$$E(\Delta) \subset \hat{E}_G(\Delta) \subset \hat{E}(\Delta),$$

де $\hat{E}_G(\Delta)$ — спектральна міра оператора $\hat{A}_G$.

Доведення. Те, що звуження оператора A на $\mathcal{E}(A)$ допускає замикання у просторі $\mathfrak{H}'_G(A)$, випливає з рівності $(Af, g) = (f, Ag)$ для довільних $f,\ g \in \mathcal{E}(A)$. Оператор $\hat{A}_G$ невід'ємний, тому що

$$(\hat{A}_G f, f)_{\mathfrak{H}'_G(A)} = (Af, f)_{\mathfrak{H}'_G(A)} =$$

$$= (G^{-1}(A)Af, G^{-1}(A)f) = (A\,G^{-1}(A)f, G^{-1}(A)f) \geq 0,$$

коли $f \in \mathcal{E}(A)$. Самоспряженість $\hat{A}_G$ зумовлюється тим, що множина $(A - zI)\,\mathcal{E}(A)$, $\Im z \neq 0$, щільна в $\mathfrak{H}$, а отже, і в $\mathfrak{H}'_G(A)$. Оскільки для будь-якого $f \in \mathcal{D}(A)$ послідовність $f_n \in E(n)f$ збігається до f у нормі графіка оператора A, то $A \subset \hat{A}_G$. Тому $R_z(A) \subset R_z(\hat{A}_G)$, $\Im z \neq 0$, ($R_z(\cdot)$ — резольвента оператора). Тоді за формулою обернення Стільтьєса $E(\Delta) \subset \hat{E}_G(\Delta)$. Враховуючи включення $\mathfrak{H}'_G(A) \subseteq \mathcal{E}'(A)$ і рівності

$$(f, \hat{E}_G(\Delta)g) = (E(\Delta)f, g) = (f, \hat{E}(\Delta)g), \quad f \in \mathcal{E}(A), \quad g \in \mathfrak{H}'_G(A),$$

приходимо до висновку, що $\hat{E}_G(\Delta) \subset \hat{E}(\Delta)$. В силу співвідношень (3) $\hat{A}_G \subset \hat{A}$. Теорему доведено.

Лема 1. *Вірними є рівності*

$$\mathcal{D}(G(\hat{A}_G)) = \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{H}'_G(A) = G(\hat{A}_G)\,\mathfrak{H}.$$

Доведення. Оператор $G(A)$ відображає ізометрично $\mathfrak{H}_G(A)$ на $\mathfrak{H}$ ($\|G(A)f\| = \|f\|_{\mathfrak{H}_G(A)}$, $f \in \mathfrak{H}_G(A)$). Тому оператор $G^+(A)$, спряжений до $G(A)$ (в сенсі $(G^+(A)f, g) = (f, G(A)g)$, $f \in \mathfrak{H}$, $g \in \mathfrak{H}_G(A)$), відображає $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}'_G(A)$, так що звуження $G^+(A)$ на $\mathfrak{H}_G(A)$ збігається з $G(A)$.

Оператор $G^+(A)$ можна розглядати як оператор, що діє в просторі $\mathfrak{H}'_G(A)$ з області визначення $\mathcal{D}(G^+(A)) = \mathfrak{H}$ як

$$G^+(A)f = \lim_{n \to \infty} G^+(A)f_n = \lim_{n \to \infty} G(A)f_n, \quad f \in \mathfrak{H},$$

де границя береться в сенсі простору $\mathfrak{H}'_G(A)$, $f_n = E(n)f \to f$ у просторі $\mathfrak{H}$, коли $n \to \infty$. З другого боку, для $f \in \mathcal{D}(G(\hat{A}))$

$$G(\hat{A}_G)f = \int_0^\infty G(\lambda)\,d\hat{E}_G(\lambda)f =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_0^n G(\lambda)\,d\hat{E}_G(\lambda)f = \lim_{n \to \infty} \int_0^\infty G(\lambda)\,dE(\lambda)f_n = \lim_{n \to \infty} G(A)f_n$$

в топології простору $\mathfrak{H}'_G(A)$. Отже, оператори $G^+(A)$ і $G(\hat{A}_G)$ є замиканнями звуження оператора $G(A)$ на $\mathcal{E}(A)$. Тому $G^+(A) = G(\hat{A}_G)$, що й треба було довести.

Лема 2. *Елемент $f \in \mathcal{E}'(A)$ належить до простору $\mathfrak{H}'_G(A)$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma_f(\lambda)}{G^2(\lambda)} < \infty. \tag{4}$$

Доведення. Нехай $f \in \mathfrak{H}'_G(A)$. Тоді $f_n = \hat{E}_G(n) f \in \mathcal{E}(A)$ і $f_n \to f$ у просторі $\mathfrak{H}'_G(A)$. Тому

$$\|f_n\|^2_{\mathfrak{H}'_G(A)} = \| G^{-1}(A) f_n \|^2 = \int_0^n \frac{d(\hat{E}(\lambda) f, f)}{G^2(\lambda)} \le c < \infty.$$

Звідси граничним переходом одержуємо (4).

Навпаки, нехай для елемента $f \in \mathcal{E}'(A)$ виконується нерівність (4). Тоді для $f_n = \hat{E}(n) f$

$$\|f_n\|^2_{\mathfrak{H}'_G(A)} = \| G^{-1}(A) f_n \|^2 = \int_0^n \frac{d(\hat{E}(\lambda) f, f)}{G^2(\lambda)} \le c, \quad n \in \mathbb{N},$$

а отже, з послідовності f_n можна виділити збіжну в слабкому сенсі у просторі $\mathfrak{H}'_G(A)$ підпослідовність f_{n_k}. Позначимо її слабку границю через f^*. Оскільки f_{n_k} збігається до f в $\mathcal{E}'(A)$, то $f = f^* \in \mathfrak{H}'_G(A)$. Лему доведено.

В частинному випадку, коли $G(\lambda) = 1 + \lambda$, цей результат належить Ю. Л. Шмульяну [1].

Наступна теорема показує, що міра $d\sigma_f(\lambda)$ може зростати на нескінченності як завгодно швидко.

Теорема 3. *Нехай $\gamma(\lambda) \ge 1$, $\gamma(\lambda) \to \infty$, $\lambda \to \infty$, — неперервна на $[0, \infty)$ функція. Тоді існує елемент $f \in \mathcal{E}'(A)$ такий, що*

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma_f(\lambda)}{\gamma(\lambda)} = \infty.$$

Доведення. Припустимо, що $g \in \mathfrak{H}$, $g \notin \mathcal{D}(A)$. Тоді

$$\int_0^\infty d\sigma_g(\lambda) < \infty, \quad \int_0^\infty \lambda^2 \, d\sigma_g(\lambda) = \infty.$$

Покладемо

$$G(\lambda) = \lambda \sqrt{\gamma(\lambda)}.$$

За лемою 1 елемент $f = G(\hat{A}_G) g \in \mathfrak{H}'_G(A) \subseteq \mathcal{E}'(A)$ і

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma_f(\lambda)}{\gamma(\lambda)} = \int_0^\infty \frac{d(\hat{E}(\lambda) f, f)}{\gamma(\lambda)} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{d(\hat{E}_G(\lambda) G(\hat{A}_G) g, G(\hat{A}_G) g)}{\gamma(\lambda)} = \int_0^\infty \lambda^2 \, d\sigma_g(\lambda) = \infty.$$

Теорему доведено.

З другого боку, очевидно, що для $f \in \mathcal{E}(A)$ міра $d\sigma_g(\lambda)$ має компактний носій. Наша мета — оцінити швидкість зростання цієї міри для елементів з просторів, проміжних між $\mathcal{E}(A)$ та $\mathcal{E}'(A)$.

3. За проміжні простори, згадані вище, візьмемо [3]

$$C_{\{m_n\}}(A) = \bigcup_{\alpha > 0} C_\alpha \langle m_n \rangle (A), \quad C_{(m_n)}(A) = \bigcap_{\alpha > 0} C_\alpha \langle m_n \rangle (A),$$

де $\{m_n\}_0^\infty$, $m_0 = 1$, — задана неспадна числова послідовність,

$$C_\alpha\langle m_n\rangle(A) = \left\{ f \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^k) \,\middle|\, \exists\, c>0\colon\ \|A^k f\| \le c\alpha^k m_k,\ k\in\mathbb{N}_0 \right\}$$

— банахів простір щодо норми

$$\|f\|_{C_\alpha\langle m_n\rangle(A)} = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\|A^n f\|}{m_n \alpha^n}.$$

На множинах $C_{\{m_n\}}(A)$ та $C_{(m_n)}(A)$ вводиться топологія індуктивної та проективної границі просторів $C_\alpha\langle m_n\rangle(A)$ відповідно:

$$C_{\{m_n\}}(A) = \operatorname*{ind\,lim}_{\alpha\to\infty} C_\alpha\langle m_n\rangle(A), \qquad C_{(m_n)}(A) = \operatorname*{proj\,lim}_{\alpha\to 0} C_\alpha\langle m_n\rangle(A).$$

В конкретних випадках, коли $m_n = n!$ або $m_n \equiv 1$, приходимо до відомих просторів $C_{\{n!\}}(A)$, $C_{(n!)}(A)$, $C_{\{1\}}(A)$ аналітичних, цілих та цілих експоненціального типу векторів оператора A. Простір $C_{(\infty)}(A) = C_{\{\infty\}}(A) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^k)$ $(m_n \equiv \infty)$ збігається з простором його нескінченно диференційовних векторів.

Як показано в [3], за умови $m_n \ge c_\gamma \gamma^n$ $\forall\, \gamma > 0$ мають місце щільні топологічні вкладення

$$\mathcal{E}(A) \subseteq C_{(m_n)}(A) \subseteq C_{\{m_n\}}(A) \subseteq C_{(\infty)}(A) \subseteq \mathfrak{H} \subseteq$$
$$\subseteq C'_{(\infty)}(A) \subseteq C'_{\{m_n\}}(A) \subseteq C'_{(m_n)}(A) \subseteq \mathcal{E}'(A),$$

де $C'_{\{m_n\}}(A)$ та $C'_{(m_n)}(A)$ — простори, спряжені до $C_{\{m_n\}}(A)$ та $C_{(m_n)}(A)$ відповідно.

Теорема 4. *Нехай $f \in \mathcal{E}'(A)$. Тоді виконуються наступні співвідношення еквівалентності*:

$$f \in C_{\{m_n\}}(A) \Leftrightarrow \exists\, \alpha>0,\ \exists\, c>0\colon\ \int_0^\infty G^2(\alpha\lambda)\, d\sigma_f(\lambda) < \infty, \tag{5}$$

$$f \in C_{(m_n)}(A) \Leftrightarrow \forall\, \alpha>0,\ \exists\, c>0\colon\ \int_0^\infty G^2(\alpha\lambda)\, d\sigma_f(\lambda) < \infty, \tag{6}$$

$$f \in C'_{\{m_n\}}(A) \Leftrightarrow \forall\, \alpha>0,\ \exists\, c>0\colon\ \int_0^\infty \frac{d\sigma_f(\lambda)}{G^2(\alpha\lambda)} < \infty, \tag{7}$$

$$f \in C'_{(m_n)}(A) \Leftrightarrow \exists\, \alpha>0,\ \exists\, c>0\colon\ \int_0^\infty \frac{d\sigma_f(\lambda)}{G^2(\alpha\lambda)} < \infty, \tag{8}$$

де

$$G(\lambda) = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\lambda^n}{m_n}.$$

Доведення. Як показано в [5], $C_{\{m_n\}}(A)$ та $C_{(m_n)}(A)$ топологічно еквівалентні просторам

$$\mathfrak{H}_{\{G\}}(A) = \operatorname*{ind\,lim}_{\alpha\to\infty} \mathfrak{H}_{G_\alpha}(A) \quad \text{та} \quad \mathfrak{H}_{(G)}(A) = \operatorname*{proj\,lim}_{\alpha\to 0} \mathfrak{H}_{G_\alpha}(A),$$

де $G_\alpha(\lambda) = G(\alpha\lambda)$, $G(\lambda) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \dfrac{\lambda^n}{m_n}$. Тому

$$\mathfrak{H}'_{\{G\}}(A) = \operatorname*{proj\,lim}_{\alpha\to 0} \mathfrak{H}'_{G_\alpha}(A), \qquad \mathfrak{H}'_{(G)}(A) = \operatorname*{ind\,lim}_{\alpha\to\infty} \mathfrak{H}'_{G_\alpha}(A).$$

Тоді співвідношення (5), (6) випливають з операційного числення для самоспряжених операторів, а (8), (9) — з лем 1 та 2.

В частинному випадку, коли $m_n = n!$, $G(\lambda) = e^\lambda$, а тому приходимо до такого наслідку.

Наслідок. *Вектор f є аналітичним (цілим) для оператора A тоді і тільки тоді, коли*

$$\int_0^\infty e^{\alpha\lambda}\, d\sigma_f(\lambda) < \infty$$

для деякого (будь-якого) $\alpha > 0$.

1. *Шмульян Ю. Л.* Расширенные резольвенты и расширенные спектральные функции эрмитова оператора // Мат. сб. – 1971. – **84**, № 3. – С. 440–456.
2. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – Киев: Наук. думка, 1978. – 360 с.
3. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 283 с.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
5. *Горбачук В. И.* Теоремы типа Винера–Пэли для нормального оператора и их применение // Нелинейные граничные задачи. 2. – Киев: Наук. думка, 1990. – С. 19–25.

Одержано 27.02.96