УДК 517.5

А. В. Бондарь (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОТОБРАЖЕНИЙ В БАНАХОВО ПРОСТРАНСТВО *

We prove that the Rieffel sharpness condition for a Banach space is necessary and sufficient for an arbitrary Lipschitz function $f\colon [a, b] \to E$ to be differentiable almost everywhere on a segment $[a, b]$. We establish that, in the case where the sharpness condition is not satisfied, the majority (in the category sense) of Lipschitz functions do not have derivatives at any point of the segment $[a, b]$.

Доведено, що умова гостроти Ріффела для банахового простору E є необхідною і достатньою для того, щоб довільна ліпшицова функція $f\colon [a, b] \to E$ була диференційовною майже всюди на відрізку $[a, b]$. Встановлено, що у випадку відсутності властивості гостроти більшість (у сенсі категорії) ліпшицових функцій не мають похідної в жодній точці відрізка $[a, b]$.

1. Известно, что липшицева функция f, заданная на отрезке $[a, b]$, со значениями в R или конечномерном евклидовом пространстве, имеет производную почти в каждой точке этого отрезка. Если же значения липшицевой функции принадлежат некоторому банаховому пространству E, то такое утверждение не всегда верно, на что указывает, в частности, приводимый ниже пример.

Однако, если E — гильбертово пространство или рефлексивное банахово пространство, то, как доказано, например, в [1, 2], свойство дифференцируемости почти всюду для f в этом случае сохраняется. Поэтому возникает естественная задача описания всех тех банаховых пространств, для которых любая липшицева функция $f\colon [a, b] \to E$ дифференцируема почти всюду на $[a, b]$. Оказывается, что наличие или отсутствие такого свойства у E тесно связано с геометрией пространства E, причем наиболее адекватное описание соответствующей геометрии получается с использованием введенных Риффелом [3, 4] понятий остроты множества и пространства.

Определение. *Подмножество K банахова пространства E называется острым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_\varepsilon \in K$, не принадлежащий замкнутой выпуклой оболочке множества $K \setminus U_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Будем говорить, что банахово пространство E удовлетворяет условию остроты, если каждое ограниченное подмножество $K \subset E$ является острым.*

Основной результат работы содержится в теореме 2, в которой доказано, что острота пространства E является необходимым и достаточным условием для того, чтобы любая липшицева функция $f\colon [a, b] \to E$ была дифференцируемой почти всюду на $[a, b]$. Более того, как доказано в теореме 1, если условие остроты для E не выполняется, то большинство (в смысле категории) липшицевых функций со значениями в E не имеют производной ни в одной точке интервала (a, b). Приведем конкретный пример пространства и функции с такими свойствами.

Пример. Пусть $E = C[0, 1]$ — банахово пространство непрерывных на отрезке $[0, 1]$ вещественнозначных функций с sup-нормой. Для $t \in [0, 1]$ определим функцию $\varphi_t\colon [0, 1] \to \boldsymbol{R}^1$, положив

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{t+1}, & 0 \le x \le t; \\[2ex] \dfrac{x-2}{t-2}, & t \le x \le 1. \end{cases}$$

* Выполнена при частичной финансовой поддержке фондов ISF (грант № UB 4000) и INTAS (грант 94-1474).

Тогда $\varphi_t \in E$ для любого $t \in [0, 1]$, что позволяет определить функцию f: $[0, 1] \to E$ равенством $f(t) = \varphi_t$ для любого $t \in [0, 1]$. Так как при фиксированном $x \in [0, 1]$ вещественная функция $t \to f(t)(x)$ непрерывна и в каждой точке интервала $(0, 1)$, кроме точки $t = x$, имеет производную, по модулю не превышающую 2, то для любых $t, \tau \in [a, b]$ выполняется неравенство $|f(t)(x) - f(\tau)(x)| \leq 2|t - \tau|$. Следовательно,

$$\|f(t) - f(\tau)\|_E = \sup\{|f(t)(x) - f(\tau)(x)| : x \in [0, 1]\} \leq 2|t - \tau|,$$

т. е. функция f: $[0, 1] \to E$ липшицева. Однако эта функция не имеет производной ни в одной точке интервала $(0, 1)$. Действительно, если предположить, что в некоторой точке $t \in (a, b)$ существует предел

$$\lim_{\tau \to t} \frac{f(\tau) - f(t)}{\tau - t} = f'(t) \in E,$$

то для каждого $x \in [a, b]$ должен существовать предел

$$\lim_{\tau \to t} \frac{f(\tau)(x) - f(t)(x)}{\tau - t}.$$

В частности, это должно выполняться и в точке $x = t$. Но это невозможно, поскольку

$$\frac{f(\tau)(t) - f(t)(t)}{\tau - t} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\tau + 1}, & t \leq \tau; \\ -\dfrac{1}{\tau - 2}, & \tau \leq t, \end{cases}$$

и, очевидно, что при $\tau \to t$ пределы слева и справа не равны.

2. Докажем теперь лемму, с помощью которой в дальнейшем будет установлено существование функций со свойствами, аналогичными свойствам функции из примера, в случае, когда E не удовлетворяет условиям остроты. Понятие остроты будет использовано в формулировке теоремы 2, а в лемме и теореме 1 явно выписаны условия, возникающие при отсутствии свойства остроты. Через $\overline{\text{co}}\, A$ будем обозначать замкнутую выпуклую оболочку подмножества A банахова пространства E, а через $U_\varepsilon(t)$, как обычно, ε-окрестность точки x банахова пространства E.

Лемма. *Пусть E — банахово пространство, f: $[a, b] \to E$ — аффинная функция, ε — положительная константа и K — такое выпуклое ограниченное подмножество пространства E, что*

$$x \in \overline{\text{co}}\,[K \setminus U_\varepsilon(x)] \qquad \forall\, x \in K, \tag{1}$$

и

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = y \in K. \tag{2}$$

Тогда для любого $\delta > 0$ найдется такая кусочно-линейная функция g : $[a, b] \to E$, что: а) $g(a) = f(a)$; б) $\|f - g\| < \delta$; в) *для каждого $t \in [a, b]$ множество*

$$A(g, t) = \left\{\frac{g(\tau) - g(t)}{\tau - t},\ \tau \in [a, b],\ \tau \neq t\right\}$$

имеет диаметр не меньше чем $\varepsilon/2$ и содержится в K.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать δ настолько малым, что выполняется неравенство $\delta < (\varepsilon/8)(b-a)$. Так как множество K ограничено, то найдется такая константа $M < \infty$, что $\|x\| < M$ для каждого $x \in K$. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ на n равных отрезков $[t_{i-1}, t_i]$ длины меньше чем $\delta/3M$. Из (1) вытекает, что для y из (2) найдутся точки $y_1, \ldots, y_m \in K \setminus U_\varepsilon(y)$ и числа $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_m > 0$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \qquad \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i - y \right\| < \min\left\{ \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\delta}{3(b-a)} \right\}.$$

Обозначим через $y_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i$ и определим функцию f_1 на отрезке $[a, b]$ равенством $f_1(t) = f(a) + (t-a) y_0$. Тогда очевидно, что

$$\| f_1 - f \| \le (b-a) \| y - y_0 \| \le \frac{\delta}{3}.$$

Каждый из отрезков $[t_{i-1}, t_i]$ разобьем точками $t_{i-1} = t_{i0} < t_{i1} < \ldots < t_{im-1} < t_{im} = t_i$ на m отрезков так, что длина отрезка $[t_{i\nu-1}, t_{i\nu}]$ равна $\lambda_\nu (t_i - t_{i-1})$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$. Это возможно в силу того, что $\sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu = 1$. Определим теперь функцию $g: [a, b] \to E$ таким образом, что в точках $t_i \equiv t_{im}$ она будет совпадать с функцией f_1, а на каждом из отрезков $[t_{i-1}, t_i]$ будет кусочно-линейной с изломами в точках $t_{i\nu}$. Поскольку такая функция g определена в точках t_i условием $g(t_i) = f_1(t_i)$, то достаточно указать надлежащее кусочно-линейное продолжение g на каждый из отрезков $[t_{i-1}, t_i]$.

Сначала для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ определим функцию $g_i: [t_{i-1}, t_i] \to E$ равенством

$$g_i(t) = f_1(t_{i-1}) + \sum_{\nu=1}^{k-1} (t_{i\nu} - t_{i\nu-1}) y_\nu + (t - t_{ik-1}) y_k,$$

$$t \in [t_{ik-1}, t_{ik}]; \quad k = 1, 2, \ldots, m; \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда $g_i(t_{i-1}) = f_1(t_{i-1})$ и

$$g_i(t_i) = f_1(t_{i-1}) + \sum_{\nu=1}^{m} (t_{i\nu} - t_{i\nu-1}) y_\nu =$$

$$= f_1(t_{i-1}) + \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu (t_i - t_{i\nu-1}) y_\nu = f_1(t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1}) y_0 = f_1(t_i).$$

Поэтому функции g_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, вместе определяют непрерывную кусочно-линейную функцию $g: [a, b] \to E$ требуемого вида. Теперь нужно доказать, что эта функция удовлетворяет и всем остальным требованиям доказываемой леммы.

Из определения g вытекает, что $g(a) = f_1(a) = f(a)$, т. е. условие а) для g выполнено. Далее, если $t \in [t_{ik-1}, t_{ik}]$, то

$$\| g(t) - g(t_{i-1}) \| = \left\| \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_\nu y_\nu (t_i - t_{i\nu-1}) + (t - t_{ik-1}) y_k \right\| \le$$

$$\leq \left(\sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu \|y_\nu\|\right)(t_i - t_{i-1}) \leq M(t_i - t_{i-1}) \leq \frac{\delta}{3}.$$

Поэтому

$$\|g(t)-f(t)\| \leq \|g(t)-g(t_{i-1})\| + \|g(t_{i-1})-f(t_{i-1})\| + \|f(t_{i-1})-f(t)\| \leq$$
$$\leq 3M(t_i - t_{i-1}) < \delta.$$

Так что g удовлетворяет также и условию б).

Докажем теперь, что при любом $t \in [a, b]$ множество $A(g, t)$ имеет диаметр не меньше чем $\varepsilon/2$. Пусть $t \in [t_{i\nu-1}, t_{i\nu}]$ и $t - a \geq b - t$. Тогда

$$\frac{g(a)-g(t)}{a-t} = \frac{f(t)-f(a)}{t-a} + \frac{g(t)-f(t)}{t-a} = y + y',$$

где

$$\|y'\| = \frac{\|g(t)-f(t)\|}{t-a} < \frac{\delta}{t-a} \leq \frac{2\delta}{b-a} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Из определения функции g вытекает, что $y_\nu \in A(g, t)$ для любого ν. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять произвольную точку $\tau \in [t_{i\nu-1}, t_{i\nu}]$, отличную от t, рассмотреть соответствующее разностное отношение и учесть, что на $[t_{i-1}, t_i]$ функция g совпадает с g_i. А так как $\|(y+y')-y_\nu\| \geq \|y-y_\nu\| - \|y'\| \geq \varepsilon/2$, то множество $A(g, t)$ в случае $t - a \geq b - t$ имеет диаметр не меньше чем $\varepsilon/2$. Пусть теперь $t - a < b - t$. Тогда

$$\frac{g(b)-g(t)}{b-t} = \frac{f(b)-f(t)}{b-t} + \frac{f(t)-g(t)}{b-t} = y + y'',$$

где

$$\|y''\| = \frac{\|f(t)-g(t)\|}{b-t} < \frac{\delta}{b-t} \leq \frac{2\delta}{b-t} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда, как и в предыдущем случае, следует, что множество $A(g, t)$ имеет диаметр не меньше $\varepsilon/2$.

Докажем теперь, что

$$[g(\tau)-g(t)](\tau-t)^{-1} \in K \qquad \forall \tau, t \in [a, b], \quad \tau \neq t.$$

Пусть $\tau \in [t_{j\nu-1}, t_{j\nu}]$, $t \in [t_{is-1}, t_{is}]$. Рассмотрим сначала случай, когда $i = j$, и пусть, для определенности, $s \leq \nu$. Тогда из определения функции g получаем

$$x \equiv [g(\tau)-g(t)](\tau-t)^{-1} =$$
$$= (\tau-t)^{-1}\left[\sum_{k=1}^{\nu-1} y_k(t_{ik}-t_{ik-1}) + y_\nu(\tau - t_{i\nu-1}) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{s-1} y_k(t_{ik}-t_{ik-1}) - y_s(\tau - t_{is-1})\right] =$$
$$= (\tau-t)^{-1}\left[\sum_{k=s+1}^{\nu-1} y_k(t_{ik}-t_{ik-1}) + y_\nu(\tau - t_{i\nu-1}) + y_s(t_{is} - t)\right].$$

Таким образом, элемент x является линейной комбинацией элементов $y_k \in K$ с неотрицательными коэффициентами, сумма которых, очевидно, равна 1:

$$\sum_{k=s+1}^{\nu-1} \frac{t_{ik}-t_{ik-1}}{\tau-t} + \frac{\tau-t_{i\nu-1}}{\tau-t} + \frac{t_{is}-t}{\tau-t} = \frac{\tau-t}{\tau-t} = 1.$$

В силу выпуклости множества K точка x принадлежит K.

Пусть теперь $i<j$. Тогда, учитывая, что

$$f_1(t_i)-f_1(t_{i-1}) = (t_i-t_{i-1})\,y_0 =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, y_k\,(t_i-t_{i-1}) = \sum_{k=1}^{m} y_k\,(t_{ik}-t_{ik-1}),$$

имеем

$$x \equiv [g(\tau)-g(t)](\tau-t)^{-1} =$$

$$= (\tau-t)^{-1}\left[f_1(t_{j-1}) + \sum_{k=1}^{\nu-1} y_k\,(t_{jk}-t_{jk-1}) + y_\nu\,(\tau-t_{j\nu-1}) - \right.$$

$$\left. - f_1(t_{i-1}) - \sum_{k=1}^{s-1} y_k\,(t_{ik}-t_{ik-1}) - y_s\,(t-t_{is-1}) \right] =$$

$$= (\tau-t)^{-1}\left[f_1(t_{j-1}) - f_1(t_i) + \sum_{k=1}^{\nu-1} y_k\,(t_{jk}-t_{jk-1}) + y_\nu\,(\tau-t_{j\nu-1}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=s+1}^{m} y_k\,(t_{ik}-t_{ik-1}) + y_s\,(t_{is}-t) \right] =$$

$$= (\tau-t)^{-1}\left[y_0\,(t_{j-1}-t_i) + \sum_{k=1}^{\nu-1} y_k\,(t_{jk}-t_{jk-1}) + y_\nu\,(\tau-t_{j\nu-1}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=s+1}^{m} y_k\,(t_{ik}-t_{ik-1}) + y_s\,(t_{is}-t) \right].$$

Следовательно, x представлен в виде линейной комбинации элементов $y_0,\ y_k \in \in K$ с неотрицательными коэффициентами, причем сумма этих коэффициентов равна 1:

$$(\tau-t)^{-1}\left[t_{is} - t + \sum_{k=s+1}^{m} (t_{ik}-t_{ik-1}) + t_{j-1} - t_i + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\nu-1} (t_{jk}-t_{jk-1}) + \tau - t_{j\nu-1} \right] = 1.$$

В силу выпуклости K точка x принадлежит K. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть ε — положительная константа и K — замкнутое выпуклое ограниченное подмножество банахова пространства E, имеющее свойство*

$$x \in \overline{\mathrm{co}}\,[K \setminus U_\varepsilon(x)] \qquad \forall\, x \in K.$$

Если $\mathcal{F}$ *есть множество функций* $f\colon [a,b]\to E$ *таких, что*

$$\frac{f(\tau)-f(t)}{\tau-t}\in K \qquad \forall\, t,\tau\in[a,b],\quad t\neq\tau, \tag{3}$$

то подмножество $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}$, *состоящее из тех* $f\in\mathcal{F}$, *для которых при любых* $\sigma>0$ *и* $t\in[a,b]$ *множество*

$$A_\sigma(f,t)=\left\{\frac{f(\tau)-f(t)}{\tau-t}\colon 0<\|\tau-t\|<\sigma\right\}$$

имеет диаметр больший чем $\varepsilon/3$, *является всюду плотным в* $\mathcal{F}$ $\mathcal{G}_\delta$*-множеством второй категории. В частности, каждая из (очевидно, липшицевых) функций* $f\in\mathcal{F}'$ *не дифференцируема ни в одной точке отрезка* $[a,b]$.

Доказательство. Так как множество K замкнуто и ограничено, то из (3) вытекает, во-первых, что функции $f\in\mathcal{F}$ липшицевы и, во-вторых, как будет сейчас доказано, $\mathcal{F}$ является замкнутым подмножеством банахова пространства $C([a,b],E)$ непрерывных отображений из $[a,b]$ в E, а потому $\mathcal{F}$ — полное метрическое пространство относительно равномерной метрики. Для доказательства замкнутости $\mathcal{F}$ предположим, что $f_k\in\mathcal{F}$ и $f_k\to f\in C([a,b],E)$. Если предположить, что f не принадлежит $\mathcal{F}$, то найдутся такие точки $t,\tau\in$ $\in[a,b]$, $\tau\neq t$, что

$$\frac{f(\tau)-f(t)}{\tau-t}\equiv y\notin K,$$

т. е. y принадлежит открытому множеству $E\backslash K$. Следовательно, найдется такое k_0, что для каждого $k>k_0$ будет выполняться включение

$$\frac{f_k(\tau)-f_k(t)}{\tau-t}\in E\backslash K,$$

а это означает, что $f_k\notin\mathcal{F}$ для любого $k>k_0$, что противоречит условию. Тем самым замкнутость множества $\mathcal{F}$ доказана.

Обозначим через $\mathcal{F}_n$, $n=1,2,\ldots$, множество функций $f\in\mathcal{F}$, для каждой из которых существует такая точка $t=t(f)\in[a,b]$, что

$$\operatorname{diam}\left[A_{1/n}(f,t)\right]\leq\frac{\varepsilon}{3},$$

и докажем, что эти множества замкнуты при любом $n=1,2,\ldots$. Действительно, если $f_k\in\mathcal{F}_n$ и $f_k\to f$ при $k\to\infty$, то для каждого k существует точка $t_k\in[a,b]$ такая, что $\operatorname{diam}\left[A_{1/n}(f_k,t_k)\right]\leq\varepsilon/3$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ сходится при $k\to\infty$ к некоторой точке $t_0\in[a,b]$. Пусть $\tau_1,\tau_2\in[a,b]$ и

$$|\tau_1-t_0|<\frac{1}{n},\qquad|\tau_2-t_0|<\frac{1}{n}. \tag{4}$$

Тогда найдется такое k_0, что для каждого $k>k_0$ будут выполнены неравенства

$$|\tau_1-t_k|<\frac{1}{n},\qquad|\tau_2-t_k|<\frac{1}{n}$$

и, следовательно,

$$\left\| \frac{f_k(\tau_1) - f_k(t_k)}{\tau_1 - t_k} - \frac{f_k(\tau_2) - f_k(t_k)}{\tau_2 - t_k} \right\| \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Так как последовательность f_k сходится на компакте $[a, b]$ при $k \to \infty$ к f равномерно, то [5, с. 229] (теорема 3) $\lim f_k(t_k) = f(t_0)$, и, переходя в неравенстве (5) к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\left\| \frac{f(\tau_1) - f(t_0)}{\tau_1 - t_0} - \frac{f(\tau_2) - f(t_0)}{\tau_1 - t_0} \right\| \le \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6}$$

Поскольку τ_1, τ_2 — произвольные точки отрезка $[a, b]$, удовлетворяющие (4), то из (6) следует, что $\operatorname{diam}[A_{1/n}(f, t_0)] \le \varepsilon/3$, и поэтому $f \in \mathcal{F}_n$. Тем самым замкнутость множества $\mathcal{F}_n$ доказана.

Докажем теперь, что каждое из множеств $\mathcal{F}_n$ нигде не плотно в $\mathcal{F}$. Пусть $f \in \mathcal{F}_n$ и задано $\delta > 0$. Построим функцию $g \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_n$ такую, что $\| f - g \| < \delta$. С этой целью разобьем отрезок $[a, b]$ точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$ на p отрезков равной длины, меньшей чем $1/n$. Причем p выберем настолько большим, чтобы колебание

$$\max \{ \| f(t) - f(\tau) \| : \; t, \tau \in [t_{k-1}, t_k] \}$$

функции f на каждом отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ было меньшим, чем $\delta/4$. Это возможно ввиду того, что функция f равномерно непрерывна (и даже липшицева) на $[a, b]$.

Обозначим через F кусочно-линейную функцию, совпадающую в точках t_k, $k = 0, 1, \ldots, p$, с функцией f, и положим

$$y_k = \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, p.$$

Тогда для $t \in [t_{k-1}, t_k]$ имеем

$$\| F(t) - f(t) \| \le \| F(t) - F(t_k) \| + \| F(t_k) - f(t_k) \| + \| f(t_k) - f(t) \| \le \frac{\delta}{2},$$

и, следовательно, $\| F - f \| \le \delta/2$.

Используя лемму, будем строить требуемую кусочно-линейную функцию g последовательно на каждом из отрезков $[t_{k-1}, t_k]$, обеспечивая условия склейки в точках t_k, $k = 1, 2, \ldots, p$.

На отрезке $[t_0, t_1]$ рассмотрим аффинную функцию

$$f_1(t) = f(t_0) + y_1 (t - t_0).$$

Согласно лемме существует кусочно-линейная функция $g_1 : [t_0, t_1] \to E$ такая, что: а) $g_1(t_0) = f_1(t_0)$; б) $\| g_1 - f_1 \| \le \delta/4p$; в) для любого $t \in [t_0, t_1]$ множество $A(g_1, t)$ имеет диаметр не меньше чем $\varepsilon/2$ и содержится в K. Определим функцию g на отрезке $[t_0, t_1]$ равенством $g(t) = g_1(t)$.

Продолжая этот процесс, построим функцию g, определенную на всем отрезке $[a, b]$. Предполагая функцию g определенной на отрезке $[t_0, t_k]$, $k \ge 1$, рассматриваем на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ аффинную функцию $f_{k+1}(t) = g(t_k) + y_{k+1}(t - t_k)$. Согласно лемме находим такую кусочно-линейную функцию $g_{k+1} : [t_k, t_{k+1}] \to E$, что: а) $g_{k+1}(t_k) = f_{k+1}(t_k) = g(t_k)$; б) $\| g_{k+1} - f_{k+1} \| <$

$< \delta/4p$; в) для любого $t \in [t_k, t_{k+1}]$ множество $A(g_{k+1}, t)$ имеет диаметр не меньше чем $\varepsilon/2$ и содержится в K. Продолжаем g на бóльший отрезок, требуя, чтобы на $[t_k, t_{k+1}]$ эта функция совпадала с функцией g_{k+1}. Тем самым, по индукции, функция g корректно определена на всем отрезке $[a, b]$.

Докажем, что $g \in \mathcal{F}$. Пусть $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $\tau \in [t_{j-1}, t_j]$ и $i < j$. Тогда

$$x \equiv [g(\tau) - g(t)](\tau - t)^{-1} =$$

$$= \left[g(t_i) - g(t) + \sum_{k=i+1}^{j-1} [g(t_k) - g(t_{k-1})] + g(\tau) - g(t_{j-1}) \right] (\tau - t)^{-1} =$$

$$= \frac{g(t_i) - g(t)}{t_i - t} \frac{t_i - t}{\tau - t} - \sum_{k=i+1}^{j-1} \frac{g(t_k) - g(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \frac{t_k - t_{k-1}}{\tau - t} +$$

$$+ \frac{g(\tau) - g(t_{j-1})}{\tau - t_{j-1}} \frac{\tau - t_{j-1}}{\tau - t}.$$

Из построения g вытекает, что разностные отношения

$$\frac{g(t_i) - g(t)}{t_i - t}, \quad \frac{g(t_k) - g(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}, \quad \frac{g(\tau) - g(t_{j-1})}{t_i - t_{j-1}}$$

принадлежат K. Следовательно, точка x является линейной комбинацией (с положительными коэффициентами) элементов выпуклого множества K, причем сумма этих коэффициентов

$$\frac{t_i - t}{\tau - t} + \sum_{k=i+1}^{j-1} \frac{t_k - t_{k-1}}{\tau - t} + \frac{\tau - t_{j-1}}{\tau - t},$$

очевидно, равна 1 и, следовательно, $x \in K$. Тем самым доказано, что $g \in \mathcal{F}$.

Докажем теперь, что $g \notin \mathcal{F}_n$. Пусть $t \in [a, b]$. Тогда $t \in [t_{i-1}, t_i]$ для некоторого i. Так как $t_i - t_{i-1} \le 1/n$ и на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ функция g совпадает с функцией g_i, для которой $\operatorname{diam} A(g_i, t) \ge \varepsilon/2$, то тем более $\operatorname{diam} A_{1/n}(g, t) \ge \varepsilon/2$. Поскольку это верно для каждого $t \in [a, b]$, то $g \notin \mathcal{F}_n$.

Докажем, что $\| g - f \| \le \delta$. Пусть $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Тогда

$$\| g(t) - f(t) \| \le \| g(t) - f_k(t) \| + \| f_k(t) - F(t) \| + \| F(t) - f(t) \|. \tag{7}$$

Так как

$$\| f_k(t) - F(t) \| = \| g(t_{k-1}) + y_k(t - t_{k-1}) - f(t_{k-1}) - y_k(t - t_{k-1}) \| =$$

$$= \| g(t_{k-1}) - f(t_{k-1}) \|,$$

то для величины $\varepsilon_k = \| g(t_k) - f(t_k) \|$ имеем рекуррентную оценку

$$\varepsilon_k = \| g(t_k) - f(t_k) \| \le \| g(t_k) - f_k(t_k) \| + \| f_k(t_k) - F(t_k) \| +$$

$$+ \| F(t_k) - f(t_k) \| =$$

$$= \| g(t_k) - f_k(t_k) \| + \| g(t_{k-1}) - f(t_{k-1}) \| \le \frac{\delta}{4p} + \varepsilon_{k-1},$$

из которой вытекает, что $\varepsilon_k \le \delta/4$ для каждого $k = 1, 2, \ldots, p$. Поэтому из (7) имеем

$$\| g(t) - f(t) \| \le \frac{\delta}{4p} + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} < \delta$$

и, следовательно, $\| g - f \| \le \delta$.

Таким образом, каждая функция $f \in \mathcal{F}_n$ сколь угодно точно приближается в равномерной метрике функциями $g \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_n$. Отсюда следует, что замкнутое множество $\mathcal{F}_n$ нигде не плотно в $\mathcal{F}$. А так как пространство $\mathcal{F}$ полно, то согласно теореме Бэра [5, с. 425; 6, с. 53] $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ является всюду плотным в $\mathcal{F}$ $\mathcal{G}_\delta$-множеством второй категории. Теорема 1 доказана.

3. Известно [4, с. 165], что банахово пространство E тогда и только тогда удовлетворяет условию остроты, когда оно удовлетворяет условию Радона – Никодима. Последнее означает, что каждая счетно-аддитивная векторная мера со значениями в E (определенная на σ-алгебре), имеющая конечную вариацию, дифференцируема (по Бохнеру) относительно своей вариации.

Теорема 2. *Банахово пространство E тогда и только тогда удовлетворяет условию остроты, когда каждая липшицева функция $f\colon [a, b] \to E$ дифференцируема почти всюду на $[a, b]$ и*

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(\tau)\, d\tau,$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера.

Теорему 2 можно также представить в следующем, иногда более удобном, виде.

Теорема 3. *Для того чтобы любая липшицева функция $f\colon [a, b] \to E$ была дифференцируема почти всюду на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы банахово пространство E удовлетворяло условию остроты Риффела.*

Доказательство. Предположим, что пространство E удовлетворяет условию остроты, и пусть $f\colon [a, b] \to E$ — липшицева с константой Липшица M функция. Обозначим через $\mathcal{A}_0$ алгебру подмножеств $A \subset [a, b)$, представимых в виде конечного объединения попарно непересекающихся полуоткрытых интервалов:

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} [t_i, t_{i+1}), \tag{8}$$

и для любого $A \in \mathcal{A}_0$ с представлением (8) положим

$$F(A) = \sum_{i=1}^{m} [f(t_{i+1}) - f(t_i)].$$

Тогда функция $F\colon \mathcal{A}_0 \to E$ аддитивна и

$$\| F(A) \| \le M \mu(A) \qquad \forall A \in \mathcal{A}_0,$$

где μ — мера Лебега на прямой $\boldsymbol{R}^1$. Отсюда следует, что функция F счетно-аддитивна, и согласно теореме Клюванека [4, с. 207] о продолжении ее можно продолжить до счетно-аддитивной векторной меры $\hat{F}$ на σ-алгебре $\mathcal{A}$, порожденной алгеброй $\mathcal{A}_0$, причем это продолжение будет удовлетворять условию $\|\hat{F}(A)\| \le M \mu(A)$. Тогда из теоремы Риффела об остроте [4, с. 159] вытекает, что существует такая $\mathcal{A}$-измеримая функция $g\colon [a, b] \to E$, что

$$\hat{F}(A) = \int_A g(\tau)\, d\tau .$$

В частности, для любого $t \in [a, b)$ имеем

$$f(t) - f(a) = F([a, t)) = \hat{F}([a, t)) = \int_a^t g(\tau)\, d\tau . \qquad (9)$$

Из представления (9) вытекает [7, с. 101], что f имеет почти всюду на $[a, b]$ производную $f'(t)$, совпадающую почти всюду с $g(t)$.

Обратно, если E не удовлетворяет условию остроты, то найдется ограниченное подмножество $A \subset E$, не являющееся острым. Тогда замкнутая выпуклая оболочка K множества A также не будет острой [4, с. 157] (предложение 1). В этом случае согласно теореме 1 существует липшицева функция $f\colon [a, b] \to E$, не имеющая производной ни в одной точке отрезка $[a, b]$. Теорема 2 доказана.

1. *Бондарь А. В.* Локальные геометрические характеристики голоморфных отображений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 224 с.
2. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987. – 760 с.
3. *Rieffel M. A.* The Radon–Nikodym theorem for the Bochner integral // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – **131**. – P. 466–487.
4. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств. – Киев: Выща шк., 1980. – 216 с.
5. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
6. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 443 с.
7. *Функциональный* анализ / Под общей ред. С. Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.

Получено 27.02.96