УДК 512.544

Я. Д. Половицкий (Перм. ун-т, Россия)

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ ОБЯЗАТЕЛЬНОСТИ И ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ Ю. Г. ФЕДОРОВА

We introduce a new type of conditions — S-obligatory conditions. We describe broad classes of groups with the Chernikov obligatory condition and some other conditions similar to the known Fedorov condition.

Означено новий тип умов — умови S-обов'язковості. Описані широкі класи груп з умовою черніковської обов'язковості та деякими іншими умовами, які близькі до відомої умови Ю. Г. Федорова.

Определение 1. *Пусть S — теоретико-групповое свойство, которое может иметь пара (подгруппа, группа). Пару $A < B$, для которой выполняется свойство S, назовем S-парой.*

Примерами свойств, о которых говорится в этом определении, являются инвариантность, конечность индекса, дополняемость, $B' \subset A$ и др.

Определение 2. *Цепочку подгрупп*

$$A_1 < A_2 < \ldots < A_k < A_{k+1} < \ldots < A_n \tag{1}$$

группы G, состоящую не менее чем из трех подгрупп (не обязательно нетривиальных) назовем S-обязательной, если из любых двух ее соседних пар (A_{k-1}, A_k) и (A_k, A_{k+1}) хотя бы одна имеет свойство S $(2 \le k \le n-1)$.

Определение 3. *Если в группе G любая цепочка подгрупп вида* (1) *является S-обязательной, то будем говорить, что в G выполняется условие S-обязательности (иначе G-группа с условием S-обязательности).*

Определение 3 можно сформулировать иначе, что видно из следующего утверждения.

Лемма 1. *Условие S-обязательности равносильно следующему условию: в каждой цепочке подгрупп* (1)*, составленной не менее чем из трех подгрупп группы G, существует хотя бы одна S-пара (A_k, A_{k+1}).*

Доказательство. Пусть в G выполняется последнее условие, сформулированное в лемме 1. Если бы в G не выполнялось условие S-обязательности, то в некоторой цепочке (1) нашлись бы две соседние пары (A_l, A_{l+1}) и (A_{l+1}, A_{l+2}), не являющиеся S-парами, а тогда в цепочке $A_l < A_{l+1} < A_{l+2}$ не было бы S-пар, что противоречит условию. Значит, в G выполняется условие S-обязательности.

Справедливость обратного утверждения очевидна. Лемма доказана.

Определение 4. *Свойство S, которое может иметь пара (подгруппа, группа), назовем бинаследственным, если для любой S-пары $A < B$ и всякого уплотнения $A < C < B$ обе пары (A, C) и (C, B) являются S-парами.*

Примерами бинаследственных свойств из указанных выше являются конечность индекса, $B' \subset A$; не являются бинаследственными свойствами инвариантность, дополняемость.

Замечание. В связи с определением 4 естественно возникает следующая задача: если свойство S не является бинаследственным, то описать группы, для которых оно бинаследственно.

Теорема 1. *Пусть S — бинаследственное свойство. Группа G тогда и только тогда удовлетворяет условию S-обязательности, когда S-обязательной является каждая ее цепочка вида*

$$1 < H < G. \tag{2}$$

Доказательство. *Необходимость* очевидна. Докажем *достаточность*. Пусть S — бинаследственное свойство и G — группа, в которой все цепочки вида (2) являются S-обязательными. Рассмотрим произвольную цепочку (1) подгрупп группы G. Докажем, что она содержит хотя бы одну S-пару. Так как $n \geq 3$, то возможны только следующие случаи:

1. $A_1 = 1$, $A_3 = G$. Тогда (1) — цепочка вида (2) и потому содержит S-пару.

2. $A_1 = 1$, $A_3 \neq G$. Рассмотрим цепочку $1 = A_1 < A_2 < G$. По условию она S-обязательная, и потому хотя бы одна из пар (A_1, A_2) или (A_2, G) является S-парой. В первом случае в (1) содержится S-пара (A_1, A_2), а во втором в силу бинаследственности свойства S цепочка $A_2 < A_3 < G$ состоит из S-пар, и потому (A_1, A_2) — S-пара.

3. $A_1 \neq 1$, $A_3 = G$. Рассмотрим S-обязательную цепочку $1 < A_2 < A_3 = G$. Как и выше (рассматривая цепочку $1 < A_1 < G$, если $(1, A_2)$ — S-пара), убеждаемся, что либо (A_2, A_3), либо (A_1, A_2) — S-пара.

4. $A_1 \neq 1$, $A_3 \neq G$. Рассматривая S-обязательную цепочку $1 < A_2 < G$ и уплотняя имеющуюся у нее S-пару подгруппой A_1 или A_3, как и в п. 2, получаем, что в (1) найдется S-пара.

Итак, во всех случаях в (1) имеется хотя бы одна S-пара. Из произвольности (1) и леммы 1 следует, что в G выполняется условие S-обязательности. Теорема доказана.

Отметим некоторые возможные ослабления условия S-обязательности.

1. Исключить из определения S-обязательной цепочки равенства $A_1 = 1$ или $A_n = G$ (или оба эти равенства).

2. Потребовать, чтобы любая цепочка подгрупп (в том числе и состоящая из одной или двух подгрупп) могла быть дополнена до S-обязательной цепочки (вариации — дополнена только слева, только справа или уплотнена).

3. Потребовать выполнения условия, указанного в п. 2, только для цепочек из одной или двух подгрупп.

4. В каждой цепочке (1) не более чем одна пара $A_k < A_{k+1}$ не имеет свойства S.

5. Пусть S_1, S_2 — два свойства, каждое из которых описывается на языке пары (подгруппа, группа). Потребовать, чтобы в любой цепочке подгрупп из двух соседних пар одна имела свойство S_1, другая — S_2 (в определенном или произвольном порядке).

6. Условие S-обязательности или любое его ослабление накладывать только на субнормальные (нормальные) цепочки или на цепочки подгрупп с определенным свойством (абелевых, бесконечных и т. п.).

В настоящей работе описываются группы с условием S-обязательности, связанным с введенным автором в [1] понятием черниковского индекса, и некоторыми близкими к нему условиями (в частности, и с условием конечной обязательности).

Определение 5. *Будем говорить, что подгруппа H группы G имеет в G черниковский индекс (короче C-индекс), если в H существует такая инвариантная в G подгруппа N, что G/N — черниковская группа (короче C-группа).*

Свойство „иметь C-индекс", как нетрудно видеть из определения 5, является бинаследственным.

Если в качестве S в определении 3 использовать это свойство, то получим определение условия черниковской обязательности. Учитывая лемму 1, это определение можно сформулировать следующим образом.

Определение 6. *Группу G, в которой в любой цепочке* (1), *состоящей не* *менее чем из трех подгрупп, хотя бы один из индексов* $|A_{k+1}: A_k|$ $(1 \le k \le n - 1)$ *черниковский, назовем группой с условием черниковской обязательности (условием* СО*), или* СО*-группой.*

Нетрудно видеть, что условие СО переносится на подгруппы и фактор-группы.

Теорема 2. *Условие* СО *для группы* G *равносильно следующему: каждая нечерниковская подгруппа имеет в* G *черниковский индекс.*

Доказательство. Пусть G — СО-группа и H — произвольная ее нечерниковская подгруппа. Тогда согласно определению 6 в цепочке подгрупп $1 < H < G$ один из индексов $|H: 1|$ или $|G: H|$ должен быть черниковским. Так как H — нечерниковская, то первый из них — нечерниковский, и потому $|G: H|$ — C-индекс.

Обратно, пусть любая нечерниковская подгруппа имеет в G C-индекс. Пусть H — нетривиальная подгруппа группы G. Рассмотрим цепочку подгрупп (2). Если подгруппа H — черниковская, то $|H: 1|$ — C-индекс. Если же H — нечерниковская, то в силу условия $|G: H|$ — C-индекс. Значит, все цепочки вида (2) являются в G C-обязательными. Так как C — бинаследственное свойство, то по теореме 1 G является СО-группой. Теорема доказана.

***Замечания.* 1.** Из теоремы 2 нетрудно видеть, что в группе с условием СО в каждой цепочке (1) из индексов $|A_{k+1}: A_k|$ нечерниковских может быть не более одного (когда A_k — C-группа, а A_{k+1} — нечерниковская), и потому условие СО — это условие типа 4. Очевидно, верно и обратное утверждение. Значит, условие СО равносильно условию 4 для свойства S „иметь C-индекс".

2. Утверждение, аналогичное теореме 2, точно так же доказывается, если S — свойство „иметь конечный индекс" (такое условие S-обязательности назовем условием *конечной обязательности*), так как это свойство бинаследственно. Это означает, что условие конечной обязательности равносильно условию: все бесконечные подгруппы имеют конечные индексы.

Из теоремы 2 и последнего замечания видно, что условия СО и конечной обязательности — это два ослабления условия Ю. Г. Федорова [2].

Перейдем к рассмотрению групп с условием СО.

Лемма 2. *В периодической* СО*-группе* G *все абелевы подгруппы черниковские.*

Доказательство. Предположим, что G содержит нечерниковскую абелеву подгруппу A. Тогда, как известно, подгруппа A_1, порожденная всеми элементами простых порядков группы A, бесконечна и потому разлагается в прямое произведение циклических групп простых порядков. Если B — произведение множителей этого разложения, стоящих на нечетных местах, то группы B и G/B — нечерниковские. Это в силу теоремы 1 противоречит тому, что A_1 является СО-группой (как подгруппа СО-группы G). Теорема доказана.

Как видно из примеров, построенных в [3], группы с черниковскими абелевыми подгруппами могут иметь довольно сложную структуру. Поэтому произвольные периодические СО-группы вряд ли можно описать. Однако из леммы 2 и результатов, полученных в [4], вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Локально конечные* СО*-группы — это черниковские группы и только они.*

Перейдем к рассмотрению непериодических СО-групп.

Теорема 4. *Непериодические* СО*-группы — это расширения циклических бесконечних групп с помощью черниковских групп и только они.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G — непериодическая СО-группа. Тогда она содержит бесконечную циклическую подгруппу, которая в силу теоремы 2 имеет в G черниковский индекс. Из определения последнего и следует в теореме строение группы G.

Достаточность. Пусть G — расширение бесконечной циклической группы $B=\langle b\rangle$ с помощью черниковской группы. Докажем, что G является CO-группой. Из строения G видно, что периодических нечерниковских подгрупп в G не существует. Пусть H — произвольная непериодическая подгруппа группы G. Тогда $H\ni h$, $|h|=\infty$. Так как G/B — периодическая группа, то $h^k\in B$ при некотором k. Поэтому $\langle h^k\rangle=R$ — подгруппа группы B. Поскольку единственный нетождественный автоморфизм φ бесконечной циклической группы действует так: $b^{\varphi}=b^{-1}$, то все подгруппы группы B инвариантны в G, и потому $R\lhd G$. Но $G/R/B/R\cong G/B$ — черниковская группа и группа B/R конечна. Поэтому G/R — черниковская группа. Отсюда и из $R\subset H$ следует, что $|G:H|$ — C-индекс. В силу теоремы 2 G есть CO-группа. Теорема доказана.

Рассмотрим более подробно строение групп, описываемых этой теоремой.

Определение 7. *Абелеву группу без кручения A ранга* 1, *тип которой (определение см. в* [5]) *определяется характеристикой, в которой отличных от нуля компонент лишь конечное число, назовем группой конечного типа.*

Из определения типа и характеристики, а также теоремы 4 легко вытекает следующая лемма.

Лемма 3. *Абелевы* CO-*группы без кручения — это группы конечного типа и только они.*

Теорема 5. *Группа без кручения G тогда и только тогда является* CO-*группой, когда G — группа конечного типа.*

Доказательство. *Достаточность* вытекает из леммы 3. Докажем *необходимость.* Пусть G — CO-группа без кручения. Согласно теореме 4 в G существует такая инвариантная циклическая подгруппа N, что G/N — черниковская группа. Пусть C — централизатор N в G. Так как N — бесконечная циклическая группа, то $|\operatorname{Aut}N|=2$ и потому

$$|G/C|\le 2. \tag{3}$$

Группа без кручения C является центральным расширением группы N с помощью черниковской (и, значит, локально конечной) группы, поэтому в силу леммы 3. 9 из [6] C — абелева группа. Согласно лемме 3 C — группа конечного типа. Если $C=G$, то теорема доказана. Пусть $C\ne G$. Тогда в силу (2)

$$|G/C| = 2, \tag{4}$$

и потому для любого $r\in G\setminus C$ имеем $r^2\in C$. Так как C — группа ранга 1, то для любого $c\in C$

$$(r^2)^s = c^t \tag{5}$$

при некоторых $s, t\in Z$. Рассмотрим подгруппу $H=\langle r, c\rangle$. Очевидно, ее подгруппа $T=\langle r\rangle\cap\langle c\rangle$ содержится в центре H и в силу (5) $T\ne 1$. Поскольку C/T — периодическая абелева группа, то такой будет и $H\cap C/T$. Но $H/H\cap \cap C\cong HC/C\le G/C$, и так как $H\notin C$ и справедливо (3), то $|H/H\cap C|=2$. Отсюда и из изложенного выше о $H\cap C/T$ следует, что H/T — локально конечная группа. В силу леммы 3. 9 из [6] группа H абелева. Так как c и r — произвольные элементы из C и $G\setminus C$ соответственно, то из доказанного следует, что $C\le Z(G)$, а тогда из (4) вытекает, что $Z(G)=G$, т. е. группа G абелева. Значит, случай $C\ne G$ невозможен и G — группа конечного типа. Теорема доказана.

Следствие. *В бесконечной группе G все нетривиальные подгруппы тогда и только тогда имеют черниковские индексы, когда G либо черниковская, либо группа конечного типа.*

Действительно, если G удовлетворяет указанному в формулировке условию для индексов, то она либо группа без кручения и тогда согласно теореме 5 является группой конечного типа, либо содержит нетривиальную конечную подгруппу и тогда G — черниковская. Обратное утверждение очевидно.

Следствие теоремы 5 является одним из обобщений теоремы Ю. Г. Федорова.

Теорема 6. *Смешанная группа G тогда и только тогда является* СО-*группой, когда она вкладывается в прямое произведение черниковской группы K и группы*

$$M = S \leftthreetimes \langle m \rangle, \tag{6}$$

где S — группа конечного типа, $m^2 = 1$ и

$$m^{-1} s m = s^{-1} \tag{7}$$

для любого $s \in S$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G — смешанная СО-группа. Согласно теореме 2 она имеет такую инвариантную бесконечную циклическую подгруппу N, что G/N — C-группа. Обозначим через C централизатор подгруппы N в G. Так как $|\operatorname{Aut} N| = 2$, то выполняется (3). Так как $N \in Z(C)$, то $C/Z(C)$ — C-группа, и потому в силу предложения 3. 9 из [6] C имеет периодическую часть P (возможно, и $P = 1$) и $C' \subset P$. Отме-тим, что группа C непериодическая (иначе ввиду (3) и G была бы периодической, вопреки условию). Фактор-группа C/P согласно теореме 5 является группой конечного типа. Отсюда и из (3), учитывая, что $P \lhd G$, получаем, что G/P — либо группа конечного типа, либо расширение такой группы с помощью группы 2-го порядка.

Мы нашли инвариантные в G подгруппы P и N, причем $P \cap N = 1$ (так как P — периодическая, а N — группа без кручения). Из теоремы Ремака следует, что

$$G \leq P \times M, \tag{8}$$

где K — черниковская группа, изоморфная G/N, и M — группа, изоморфная G/P и имеющая указанное выше строение.

Если M — группа конечного типа, то доказываемое утверждение теоремы выполняется. Во втором из возможных случаев, как отмечено выше, M содержит такую инвариантную подгруппу S конечного типа, что

$$M \backslash S = \langle mS \rangle \tag{9}$$

и

$$m^2 \in S. \tag{10}$$

Если $|m| = \infty$, то M — группа без кручения и потому в силу теоремы 5 является группой конечного типа.

Пусть $|m| < \infty$. Тогда из (10) следует, что

$$|m| = 2, \tag{11}$$

и справедливо равенство (5). Если группа M абелева, то из (5) и (8) следует, что $G \leq (K \times \langle m \rangle) \times S$, и так как $K \times \langle m \rangle$ — C-группа, утверждение теоремы справедливо. Если же M неабелева, то поскольку любая абелева группа без кручения ранга 1 имеет единственный автоморфизм порядка 2, из (11) и (6) следует, что для любого $s \in S$ справедливо равенство (7). Тогда из (8) и полученного здесь строения M следует, что теорема верна и в этом случае (причем легко видеть, что этот случай охватывает и все рассмотренные выше в этой теореме). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть G — произвольная бесконечная подгруппа группы

$$H = K \times M, \tag{12}$$

где K и M удовлетворяют условиям, указанным в формулировке теоремы. По условию группа M содержит элемент $s \in S$ бесконечного порядка и, как видно из (6), (7) и того, что S — группа конечного типа, $\langle s \rangle \lhd M$ и $M/\langle s \rangle$ — C-группа. Тогда из (12) следует, что $H/\langle s \rangle$ — C-группа и потому группа H является в силу теоремы 4 СО-группой. А тогда и ее подгруппа G — СО-группа. Теорема доказана.

Учитывая, что любая группа конечного типа вложима в группу H вида (8), из теорем 5 и 6 получаем следующее описание непериодических СО-групп.

Теорема 7. *В непериодической группе G тогда и только тогда все нечерниковские подгруппы имеют черниковские индексы, когда она вкладывается в прямое произведение черниковской группы и группы*

$$M = S \leftthreetimes \langle m \rangle,$$

где S — группа конечного типа, $m^2 = 1$ и $m^{-1}sm = s^{-1}$ $(\forall s \in S)$.

Из теорем 3 и 7 нетрудно получить описание групп еще с одним условием, близким к условию Ю. Г. Федорова.

Теорема 8. *В непериодической или локально конечной группе G все нечерниковские подгруппы имеют конечные индексы тогда и только тогда, когда G — группа одного из типов:*

1) *черниковская;*

2) $G \le K \times M$, *где* $|K| < \infty$, $M = \langle g \rangle \leftthreetimes \langle m \rangle$ *с определяющими соотношениями* $m^2 = 1$, $m^{-1}gm = g^{-1}$.

Из теорем 3, 7 и 8 можно получить описание групп с каждым из следующих условий, также являющимся ослаблением условия Ю. Г. Федорова:

все бесконечные подгруппы имеют черниковские индексы;

все бесконечные подгруппы имеют конечные индексы;

все истинные подгруппы имеют черниковские индексы.

Отметим, что первое из них — это условие черниковской обязательности для бесконечных подгрупп, второе — условие конечной обязательности.

Приведем характеризации широких классов групп с каждым из этих условий.

Теорема 9. *В группе G, содержащей бесконечную абелеву подгруппу, все бесконечные подгруппы тогда и только тогда имеют черниковские индексы, когда она либо бесконечная черниковская, либо вкладывается в прямое произведение конечной группы и группы $M = S \leftthreetimes \langle m \rangle$, где S — группа конечного типа, $m^2 = 1$ и $m^{-1}sm = s^{-1}$ $(\forall s \in S)$.*

Теорема 10. *В группе G, содержащей бесконечную абелеву подгруппу, все бесконечные подгруппы тогда и только тогда имеют конечные индексы, когда G — группа одного из типов:*

1) *почти квазициклическая;*

2) $G \le K \times M$, *где* $1 \le |K| < \infty$, $M = \langle g \rangle \leftthreetimes \langle m \rangle$ *с определяющими соотношениями* $m^2 = 1$, $m^{-1}gm = g^{-1}$.

Теорема 11. *В бесконечной группе все нетривиальные подгруппы тогда и только тогда имеют черниковские индексы, когда G либо черниковская, либо группа конечного типа.*

В работе автора, которая публикуется в „Ученых записках" Пермского университета, получено описание групп, в которых условие Ю. Г. Федорова и каждое из рассмотренных в теоремах 9 – 11 и следствии теоремы 5 его ослаблений, накладывается не на все, а на „почти все" (т. е. все, за исключением, быть может, конечного числа) используемые в них подгруппы (бесконечные или нетривиальные). Полученные классы оказались близкими (иногда совпадающими) к описанным в настоящей работе.

1. *Половицкий Я. Д.* Группы с экстремальными классами сопряженных элементов // Сиб. мат. журн. – 1964. – **5**, № 4. – С. 891–895.
2. *Федоров Ю. Г.* О бесконечных группах, все нетривиальные подгруппы которых имеют конечный индекс // Успехи мат. наук. – 1951. – **6**, № 1. – С. 187–189.
3. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. – М.: Наука, 1989. – 446 с.
4. *Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. – 1970. – **9**, № 5. – С. 575–611.
5. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
6. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 383 с.

Получено 04.07.95