УДК 513.88

С. С. Бойко, В. К. Дубовой (Харьков. ун-т),
Б. Кирстайн, Б. Фритцше (Лейпциг. ун-т)

ОПЕРАТОРЫ СЖАТИЯ, ДЕФЕКТНЫЕ ФУНКЦИИ И ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ*

We study functions that describe scattering through inner channels of a system (defect functions) and the corresponding contraction operators.

Вивчаються функції, які описують розсіяння по внутрішніх каналах системи (дефектні функції), та оператори стиску, що відповідають цим функціям.

Как известно [1, 2], голоморфная внутри единичного круга сжимающая оператор-функция является субоператором рассеяния (матрицей рассеяния Гейзенберга) некоторого ортогонального унитарного сцепления односторонних сдвигов V_- и V_+, которые играют соответственно роль входа и выхода системы. Однако наряду с внешними система может иметь и внутренние каналы. Наличие внутренних каналов может рассматриваться как дефект системы, так как в этом случае часть информации, попавшей в систему, не выходит наружу, а остается внутри, рассеиваясь по этим каналам, а функции, описывающие рассеяние по внутренним каналам, играют, таким образом, для функции рассеяния роль дефектов.

В п. 1 вводится, следуя работе [3], понятие дефектных функций и устанавливается связь дефектных функций с соответствующими операторными узлами с помощью операции выведения внутренних каналов наружу.

В п. 2 рассматриваются сжатия $T\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, содержащие односторонний сдвиг $V\colon \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$ такой, что $\mathfrak{H} = \vee_{n=0}^{\infty} T^{*^n} \mathfrak{H}_1$. Такие сдвиги мы называем порождающими для T. Одним из основных результатов работы является теорема 7, в которой утверждается, что голоморфная сжимающая оператор-функция — дефектная (точнее, правая дефектная) тогда и только тогда, когда соответствующее этой функции сжатие имеет порождающий сдвиг.

1. Дефектные функции и теория рассеяния. 1. Пусть $T\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ — оператор сжатия, т. е. $\|T\| \le 1$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Как известно [4], сжатие T можно включить в унитарный узел

$$\Delta = (\mathfrak{H}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}; T, F, G, S). \tag{1}$$

Здесь $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ — гильбертовы пространства**, называемые внешними, а оператор

$$U = \begin{bmatrix} T & F \\ G & S \end{bmatrix}\colon \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{F} \to \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{G} \tag{2}$$

является унитарным отображением $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{F}$ на $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{G}$. Пространство $\mathfrak{H}$ называется внутренним пространством узла Δ. Узел Δ называется простым, если $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}} \vee \mathfrak{H}_{\mathfrak{F}}$***, где

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}} = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^{*^n} G^*(\mathfrak{G}), \qquad \mathfrak{H}_{\mathfrak{F}} = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n F(\mathfrak{F}).$$

Функция

---

*Выполнена при частичной поддержке Международной Соросовской программы поддержки образования в области точных наук (грант № APU 061031).

**Все рассматриваемые в работе гильбертовы пространства предполагаются комплексными и сепарабельными, а операторы — линейными и ограниченными.

***Символом $\bigvee_{\alpha \in A} \mathfrak{H}_\alpha$, где $\mathfrak{H}_\alpha \subset \mathfrak{H}$ при всех $\alpha \in A$, обозначается наименьшее (замкнутое) подпространство в $\mathfrak{H}$, содержащее все $\mathfrak{H}_\alpha$, $\alpha \in A$.

$$\Theta_\Delta(\zeta) = S + \zeta G(I-\zeta T)^{-1}F \tag{3}$$

называется характеристической оператор-функцией (х. о.-ф.) узла Δ. Очевидно, $\Theta_\Delta(\zeta)$ определена внутри единичного круга $D=\{|\zeta|<1\}$, а ее значениями являются операторы, определенные на $\mathfrak{F}$ со значениями в $\mathfrak{G}$.

Будем говорить, что функция $\Theta(\zeta)$ принадлежит классу $S[\mathfrak{F}, \mathfrak{G}]$, если:

а) $\Theta(\zeta)$ определена в D и для любого $\zeta \in D$ является оператором, определенным на $\mathfrak{F}$ со значениями в $\mathfrak{G}$;

б) $\Theta(\zeta)$ голоморфна в D;

в) для любого $\zeta \in D$ отображение $\Theta(\zeta)$ является сжимающим, т. е. $I-\Theta^*(\zeta)\Theta(\zeta)\geq 0$.

Важную роль в теории унитарных узлов играет (см., например, [4]) следующая теорема.

Теорема 1. *Характеристическая функция* (3) *произвольного унитарного узла* (1) *принадлежит классу* $S[\mathfrak{F}, \mathfrak{G}]$.

Обратно, для любой функции $\Theta(\zeta) \in S[\mathfrak{F}, \mathfrak{G}]$ *существует простой унитарный узел* (1) *такой, что* $\Theta(\zeta)=\Theta_\Delta(\zeta)$.

Каждый узел (1) порождает соответствующую унитарную дилатацию* сжатия T. А именно, пусть $\mathfrak{K} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{G}} \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$, где

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{G}} = \ldots \oplus \mathfrak{G} \oplus \mathfrak{G}, \qquad \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{F} \oplus \ldots .$$

Тогда оператор $W\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$, имеющий при таком разложении блочное представление

$$W = \begin{bmatrix} \ddots & I & & & & & \\ & 0 & I & & & & \\ & & 0 & G & S & & \\ & & & T & F & & \\ & & & & 0 & I & \\ & & & & & 0 & I \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}, \tag{4}$$

является унитарной дилатацией сжатия T. Здесь и далее все неотмеченные блоки — нулевые.

2. Будем говорить, что односторонний сдвиг $V\colon \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$ содержится в сжатии $T\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, если $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$ инвариантно относительно T и $V = T\big|_{\mathfrak{H}_1}$.

Оператор $\tilde{V}\colon \tilde{\mathfrak{H}}_1 \to \tilde{\mathfrak{H}}_1$ будем называть односторонним косдвигом, если $\tilde{V}^*$ является односторонним сдвигом. Будем говорить, что односторонний косдвиг $\tilde{V}$ содержится в сжатии T, если сдвиг $\tilde{V}^*$ содержится в T^*.

Например, операторы $V_{\mathfrak{G}} = W\big|_{\mathfrak{D}_{\mathfrak{G}}}$, $V_{\mathfrak{F}} = W^*\big|_{\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}}$ являются односторонними сдвигами, которые содержатся соответственно в W и W^*. В теории рассеяния [1, 2] косдвиг $V_{\mathfrak{F}}^*$ связан с входными каналами, сдвиг $V_{\mathfrak{G}}$ — с выходными. С этой точки зрения любой односторонний косдвиг, входящий в W, может рассматриваться как канал поступающей информации, а любой односторонний сдвиг — как канал для уходящей информации.

Целью данной работы является изучение внутренних каналов, т. е. односторонних сдвигов $V\colon \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$ (односторонних косдвигов $\tilde{V}\colon \tilde{\mathfrak{H}}_1 \to \tilde{\mathfrak{H}}_1$), входящих в W и таких, что подпространства $\mathfrak{H}_1\big(\tilde{\mathfrak{H}}_1\big)$ содержатся во внутреннем

*Необходимые сведения о дилатациях имеются, например, в [5].

пространстве $\mathfrak{H}$. Очевидно, эти каналы связаны с рассеянием внутри системы. Следующее простое утверждение сводит описание внутренних каналов в дилатации W к описанию односторонних сдвигов и косдвигов, содержащихся в соответствующем сжатии.

Теорема 2. *Любой односторонний сдвиг* $V\colon \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$ (*косдвиг* $\tilde V\colon \tilde{\mathfrak{H}}_1 \to \tilde{\mathfrak{H}}_1$), *входящий в дилатацию* W *и такой, что* $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ ($\tilde{\mathfrak{H}}_1 \subset \mathfrak{H}$), *входит в* T.

Обратно, всякий односторонний сдвиг $V\colon \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$ (*косдвиг* $\tilde V\colon \tilde{\mathfrak{H}}_1 \to \tilde{\mathfrak{H}}_1$), *входящий в* T, *входит и в* W.

В случае вполне неунитарного сжатия T среди внутренних каналов можно выделить максимальные, а именно, справедлива [3] следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $T\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ — *вполне неунитарное сжатие и* (1) — *унитарный узел, содержащий сжатие* T. *Тогда подпространство* $\mathfrak{H}^{\perp}_{\mathfrak{G}} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ ($\mathfrak{H}^{\perp}_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_{\mathfrak{F}}$) *инвариантно относительно* $T(T^*)$. *Сужение* $V(\tilde V)$ *сжатия* $T(T^*)$ *на* $\mathfrak{H}^{\perp}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H}^{\perp}_{\mathfrak{F}})$ *является односторонним сдвигом. Сдвиг* $V(\tilde V)$ *является максимальным в том смысле, что любой односторонний сдвиг, содержащийся в* $T(T^*)$, *входит в* $V(\tilde V)$.

Сдвиг $V(\tilde V)$ будем называть максимальным сдвигом, содержащимся в $T(T^*)$, и обозначать его $V_T(V_{T^*})$. Заметим, что $V^*_{T^*}$ — максимальный косдвиг, содержащийся в T.

Определение. *Пусть* $\Theta(\zeta) \in S[\mathfrak{F}, \mathfrak{G}]$ *и* (1) — *простой унитарный узел, для которого функция* $\Theta(\zeta)$ *является характеристической. Пусть* V_T *и* V_{T^*} — *максимальные сдвиги, входящие соответственно в* T *и* T^*, $\mathfrak{H}_0$, $\tilde{\mathfrak{H}}_0$ — *их порождающие подпространства, а* P_0 *и* $\tilde P_0$ — *ортопроекторы в* $\mathfrak{H}$ *на* $\mathfrak{H}_0$ *и* $\tilde{\mathfrak{H}}_0$ *соответственно. Функции*

$$\varphi(\zeta) = P_0(I-\zeta T)^{-1}F, \qquad \psi(\zeta) = G(I-\zeta T)^{-1}\tilde P_0, \qquad \zeta \in D, \tag{5}$$

значения которых рассматриваются соответственно как операторы из $\mathfrak{F}$ *в* $\mathfrak{H}_0$ *и из* $\tilde{\mathfrak{H}}_0$ *в* $\mathfrak{G}$, *называются соответственно правой и левой дефектными функциями функции* $\Theta(\zeta)$.

Замечание. Понятие дефектных функций было введено в [6] (части 5 и 6). В этих работах выясняется роль, которую дефектные функции играют при исследовании интерполяционной задачи Шура.

3. Пусть $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ — дефектные функции, определенные равенством (5). Как показано в [3] (см. также [6], ч. 6), $\varphi(\zeta) \in S[\mathfrak{F}, \mathfrak{H}_0]$ и $\psi(\zeta) \in S[\tilde{\mathfrak{H}}_0, \mathfrak{G}]$. Таким образом, в силу теоремы 1 функциям $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ также соответствуют унитарные узлы. Возникает вопрос о том, как эти узлы связаны с узлом Δ. Отметим в связи с этим, что при разложении

$$\mathfrak{H} = \ldots \oplus V_T^2\mathfrak{H}_0 \oplus V_T\mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$$

операторы, входящие в узел Δ, имеют блочные представления

$$T = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \vdots \\ & 0 & I_\alpha & & 0 \\ & & 0 & I_\alpha & 0 \\ & & & 0 & t \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & T_{\mathfrak{G}} \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ F_0 \\ F_{\mathfrak{G}} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$G = [\,\cdots\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ G_{\mathfrak{G}}\,],$$

где $\alpha = \dim \mathfrak{H}_0$ — кратность максимального сдвига V_T.

Введем в рассмотрение пространства

$$\mathfrak{H}_\varphi = \ldots \oplus \mathfrak{G} \oplus \mathfrak{G} \oplus \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}, \quad \mathfrak{F}_\varphi = \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{G}_\varphi = \mathfrak{H}_0$$

и определим с помощью блочных представлений

$$T_\varphi = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \vdots \\ & 0 & I_{\mathfrak{G}} & & 0 \\ & & 0 & I_{\mathfrak{G}} & 0 \\ & & & 0 & G_{\mathfrak{G}} \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & T_{\mathfrak{G}} \end{bmatrix}, \quad F_\varphi = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ S \\ F_{\mathfrak{G}} \end{bmatrix},$$

$$G_\varphi = [\,\ldots\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ t\,], \quad S_\varphi = F_0$$

операторы $T_\varphi : \mathfrak{H}_\varphi \to \mathfrak{H}_\varphi$, $F_\varphi : \mathfrak{F}_\varphi \to \mathfrak{H}_\varphi$, $G_\varphi : \mathfrak{H}_\varphi \to \mathfrak{G}_\varphi$ и $S_\varphi : \mathfrak{F}_\varphi \to \mathfrak{G}_\varphi$. Непосредственно проверяется, что совокупность

$$\Delta_\varphi = (\mathfrak{H}_\varphi, \mathfrak{F}_\varphi, \mathfrak{G}_\varphi; T_\varphi, F_\varphi, G_\varphi, S_\varphi) \tag{7}$$

является унитарным узлом, а его характеристической функцией — $\varphi(\zeta)$.

На языке теории рассеяния переход от узла Δ к Δ_φ означает, что внутренние каналы (уходящую информацию) $\ldots \oplus V_T^2\mathfrak{H}_0 \oplus V_T\mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_0$ вывели на выход, а внешние каналы, связанные с пространством $\mathfrak{G}$, ввели во внутрь. Отсюда непосредственно видно, что правая дефектная функция $\varphi(\zeta)$ описывает рассеяние, связанное с внутренними каналами, порожденными максимальным сдвигом V_T.

Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что левая дефектная функция $\psi(\zeta)$ описывает рассеяние, связанное с внутренними каналами, которые порождены максимальным косдвигом, входящим в T.

2. Сжатия, имеющие порождающий односторонний сдвиг. 1. Пусть сжатие $T : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ содержит односторонний сдвиг $V_1 : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_1$.

Определение. *Будем говорить, что сдвиг V_1 является порождающим для T, если $\mathfrak{H} = \vee_{n=0}^{\infty} T^{*^n}\mathfrak{H}_1$.*

Пусть сжатие T имеет порождающий сдвиг V_1. Рассмотрим разложение $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{H}}$, при котором сжатие T распадается в ортогональную сумму $T = U \oplus \tilde{T}$ унитарного оператора $U : \mathfrak{H}_0 \to \mathfrak{H}_0$ и вполне неунитарного $\tilde{T} : \tilde{\mathfrak{H}} \to \tilde{\mathfrak{H}}$. Обозначим через $\tilde{P}$ ортопроектор в $\mathfrak{H}$ на $\tilde{\mathfrak{H}}$.

Лемма 1. *Подпространство $\mathfrak{L} = \overline{\tilde{P}\mathfrak{H}_1}$ инвариантно относительно $\tilde{T}$, при этом сужение $V_{\mathfrak{L}} = \tilde{T}|_{\mathfrak{L}}$ является для $\tilde{T}$ порождающим сдвигом.*

Доказательство. Подпространство $\mathfrak{H}_0 \vee \mathfrak{H}_1$ инвариантно относительно T и сужение T на это подпространство является изометрическим оператором. Так как $\mathfrak{L} = \tilde{\mathfrak{H}} \cap (\mathfrak{H}_0 \vee \mathfrak{H}_1)$, то $\mathfrak{L}$ инвариантно относительно T, при этом $V_{\mathfrak{L}} = \tilde{T}|_{\mathfrak{L}} = T|_{\mathfrak{L}}$ является изометрическим оператором. Поскольку $\tilde{T}$ вполне неунитарен, то $V_{\mathfrak{L}}$ является односторонним сдвигом. Подпространство $\tilde{\mathfrak{H}}$ приводит T. Поэтому

$$\tilde{\mathfrak{H}} = \overline{\tilde{P}\mathfrak{H}} = \overline{\tilde{P} \bigvee_{n=0}^{\infty} T^{*^n}\mathfrak{H}_1} = \bigvee_{n=0}^{\infty} \tilde{T}^{*^n}\,\overline{\tilde{P}\,\mathfrak{H}_1} = \bigvee_{n=0}^{\infty} \tilde{T}^{*^n}\mathfrak{L},$$

и лемма доказана.

2. В качестве примера, важного для дальнейшего изложения, рассмотрим узел (7). Так как

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} T_{\varphi}^{*^n}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{G}}) = \mathfrak{D}_{\mathfrak{G}} \oplus \bigvee_{n=0}^{\infty} T^{*^n} G^*(\mathfrak{G}) = \mathfrak{D}_{\mathfrak{G}} \oplus \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}} = \mathfrak{H}_{\varphi},$$

то сдвиг $V_{\mathfrak{G}}$ является порождающим для T_{φ}.

Пусть узел Δ_{φ} не является простым, т. е. $\mathfrak{H}_{\varphi} = \mathfrak{H}_{\varphi}^{(0)} \oplus \mathfrak{H}_r$, где $T_{\varphi}\big|_{\mathfrak{H}_{\varphi}^{(0)}}$ — унитарный оператор, а $T_r = T_{\varphi}\big|_{\mathfrak{H}_r}$ — вполне неунитарное сжатие. Если положить $\mathfrak{H}_1 = M_+(\mathfrak{G})$ и $\tilde{T} = T_r$, то будут выполняться условия леммы 1. Следовательно, сжатие T_r имеет порождающий сдвиг $V_{\mathfrak{L}} = T_r\big|_{\mathfrak{L}}$, где $\mathfrak{L}$ — замыкание проекции $M_+(\mathfrak{G})$ на $\mathfrak{H}_r$. Отсюда следует, что для T_r максимальный сдвиг тем более является порождающим.

Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 2. *Для вполне неунитарной части сжатия T_{φ} максимальный сдвиг является порождающим.*

Наконец, заметим, что сжатие T_{φ} является вполне неунитарным и односторонний сдвиг $V_{\mathfrak{G}}$ максимальный для T_{φ} в том и только в том случае, когда $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}} = \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_{\varphi}}$, т. е.

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}} = \bigvee_{n=0}^{\infty} T_{\varphi}^{*^n} G_{\varphi}^*(\mathfrak{G}_{\varphi}) = \bigvee_{n=0}^{\infty} T_{\mathfrak{G}}^{*^n} t^*(\mathfrak{H}_0),$$

иначе говоря, тогда и только тогда, когда максимальный сдвиг сжатия T является порождающим. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Сжатие T_{φ} является вполне неунитарным, а сдвиг $V_{\mathfrak{G}}$ максимальным для T_{φ} в том и только в том случае, когда максимальный сдвиг сжатия T является порождающим.*

Отметим, что в случае выполнения условий теоремы $(T_{\varphi})_{\varphi} = T$.

Будем говорить, что односторонний косдвиг $\tilde{V}$ является порождающим для сжатия T, если сдвиг $\tilde{V}^*$ является порождающим для T^*. Очевидно, результаты этого пункта можно переформулировать на языке порождающих косдвигов.

3. Описание класса дефектных функций. Пусть $\Theta(\zeta) \in S[\mathfrak{F}, \mathfrak{G}]$ и $\dim \mathfrak{F} = q \le \infty$, $\dim \mathfrak{G} = p \le \infty$. Правую (левую) дефектную функцию функции $\Theta(\zeta)$ обозначим $\Theta_r(\zeta)$ $(\Theta_l(\zeta))$. Дефектные функции $\Theta_r(\zeta)$ и $\Theta_l(\zeta)$ назовем дефектными функциями первого поколения. Дефектные функции второго поколения определим следующим образом:

$$\Theta_{rr}(\zeta) = (\Theta_r)_r(\zeta), \quad \Theta_{rl}(\zeta) = (\Theta_r)_l(\zeta),$$

$$\Theta_{lr}(\zeta) = (\Theta_l)_r(\zeta), \quad \Theta_{ll}(\zeta) = (\Theta_l)_l(\zeta).$$

Аналогично можно определить дефектные функции следующих поколений.

Теорема 5. *Пусть $\Theta(\zeta) \in S[\mathfrak{F}, \mathfrak{G}]$. Тогда $\Theta_{rr}(\zeta)$ $(\Theta_{ll}(\zeta))$ является правым (левым) регулярным делителем $\Theta(\zeta)$, т. е. имеет место регулярная факторизация*

$$\Theta(\zeta) = \Theta_1(\zeta)\Theta_{rr}(\zeta) \quad (\Theta(\zeta) = \Theta_{ll}(\zeta)\Theta_2(\zeta)). \tag{8}$$

Доказательство достаточно провести для функции $\Theta_{rr}(\zeta)$. Пусть функции $\Theta(\zeta)$ соответствует простой унитарный узел (1). Рассмотрим три случая.

1. $\Theta(\zeta) \not\equiv 0$ и сжатие T содержит односторонний сдвиг. Рассмотрим раз-

ложение $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}^{\perp} \oplus \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$. Этому разложению соответствует блочное представление

$$T = \begin{bmatrix} V_T & R \\ 0 & T_{\mathfrak{G}} \end{bmatrix}.$$

Пусть $\mathfrak{H}_0$ — порождающее подпространство для максимального сдвига V_T. Тогда

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}^{\perp} = M_+(\mathfrak{H}) = \ldots \oplus V_T^2\mathfrak{H}_0 \oplus V_T\mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_0.$$

Этому разложению соответствуют блочные представления

$$V_T = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & 0 & I_\alpha & \\ & & 0 & I_\alpha \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, \quad \alpha = \dim \mathfrak{H}_0.$$

Пусть $\Delta_r = (\mathfrak{H}_r, \mathfrak{F}_r, \mathfrak{G}_r; T_r, F_r, G_r, S_r)$ — простой унитарный узел такой, что $\Theta_r(\zeta) = \Theta_{\Delta_r}(\zeta)$. Как показано в п. 1, в качестве узла Δ_r можно взять главную часть узла (7), т. е. узел Δ_r может быть получен из Δ_φ удалением из оператора T_φ унитарной части. Это означает, что $\mathfrak{F}_r = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}_r = \mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{H}_\varphi = \mathfrak{H}_\varphi^{(0)} \oplus \mathfrak{H}_r$, где $\mathfrak{H}_\varphi^{(0)}$ — подпространство, в котором действует унитарная часть оператора T_φ и $T_\varphi\big|_{\mathfrak{H}_r} = T_r$. Безусловно, может оказаться, что $\mathfrak{H}_\varphi^{(0)} = \{0\}$. Из простоты узла Δ_r следует $\mathfrak{H}_r = \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_r} \vee \mathfrak{H}_{\mathfrak{F}_r}$, где $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_r} = \vee_{n=0}^{\infty} T_r^{*n} G_r^*(\mathfrak{G}_r)$, $\mathfrak{H}_{\mathfrak{F}_r} = \vee_{n=0}^{\infty} T_r^n F_r(\mathfrak{F}_r)$. Заметим, что

$$\mathfrak{H}_r \ominus \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_r} \neq \{0\}. \tag{9}$$

Действительно, почти всюду [3]*

$$I - \Theta^*(e^{it})\Theta(e^{it}) \geq \Theta_r^*(e^{it})\Theta_r(e^{it}),$$

т. е.

$$I - \Theta_r^*(e^{it})\Theta_r(e^{it}) \geq \Theta^*(e^{it})\Theta(e^{it}).$$

Так как по предположению $\Theta(\zeta) \not\equiv 0$, то в этом случае (см., например, [3]) сжатие T_r содержит односторонний сдвиг, и, значит, выполняется (9). Таким образом,

$$\mathfrak{H}_r = \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_r}^{\perp} \oplus \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_r} \tag{10}$$

и сужение T_r на $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_r}^{\perp}$ является максимальным сдвигом в T_r.

Далее из очевидных соотношений

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_r} = \bigvee_{n=0}^{\infty} T_r^{*n} G_r^*(\mathfrak{G}_r) = \bigvee_{n=0}^{\infty} T_\varphi^{*n} G_\varphi^*(\mathfrak{G}_\varphi) = \bigvee_{n=0}^{\infty} T_{\mathfrak{G}}^{*n} t^*(\mathfrak{H}_0)$$

следует, что подпространство $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_r}$ входит в $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ и инвариантно относительно $T_{\mathfrak{G}}^*$, а значит, и относительно T^*.

Перейдем теперь от узла Δ_r к узлу $\Delta_{r\varphi} = (\Delta_r)_\varphi$ согласно правилу, по кото-

---

*Если $\Theta(\zeta) \in S[\mathfrak{F}, \mathfrak{G}]$, то через $\Theta(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, как обычно, обозначаются некасательные граничные значения $\Theta(\zeta)$, которые существуют почти всюду в смысле сильной сходимости [5].

рому в п. 1 был описан переход от узла Δ к узлу Δ_φ. Пусть $\Delta_{r\varphi}=(\mathfrak{H}_{r\varphi}, \mathfrak{F}_\varphi, \mathfrak{G}_{r\varphi}; T_{r\varphi}, F_{r\varphi}, G_\varphi, S_{r\varphi})$. Тогда из (9), учитывая, что $\mathfrak{G}_r=\mathfrak{H}_0$, имеем

$$\mathfrak{H}_{r\varphi} = \ldots\oplus V_T^2\mathfrak{H}_0 \oplus V_T\mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_r}.$$

В этом разложении $T_{r\varphi}$ имеет такое же блочное представление, как сжатие T в представлении (6), с тем лишь отличием, что на месте блока $T_\mathfrak{G}$ стоит $T_{\mathfrak{G}_r}$.

В силу леммы 2 сжатие T_r имеет порождающий сдвиг. Но тогда в силу теоремы 4 узел $\Delta_{r\varphi}$ является простым, при этом $\Theta_{rr}(\zeta)=\Theta_{\Delta_{r\varphi}}(\zeta)$.

Очевидно, $\mathfrak{H}_{r\varphi}$ является подпространством в $\mathfrak{H}$, инвариантным относительно T^*, при этом $T^*\big|_{\mathfrak{H}_{r\varphi}} = T_{r\varphi}^*$. Отсюда следует, что разложению

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{r\varphi}^\perp \oplus \mathfrak{H}_{r\varphi}, \quad \mathfrak{H}_{r\varphi}^\perp = \mathfrak{H}\ominus\mathfrak{H}_{r\varphi}$$

соответствует регулярное произведение

$$\Theta(\zeta) = \Theta_1(\zeta)\Theta_{rr}(\zeta),$$

т. е. $\Theta_{rr}(\zeta)$ является правым регулярным делителем $\Theta(\zeta)$.

2. $\Theta(\zeta)\not\equiv 0$ и сжатие T не содержит односторонний сдвиг. В этом случае $\Theta_r(\zeta)\in S[\mathfrak{F},\mathfrak{K}]$, $\dim\mathfrak{K}=0$. Значит, $\Theta_{rr}(\zeta)=I_\mathfrak{F}$. Функции $\Theta_{rr}(\zeta)$ соответствует простой унитарный узел, внутреннее пространство которого имеет нулевую размерность. Поэтому разложению $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}\oplus\{0\}$ соответствует регулярная факторизация $\Theta(\zeta)=\Theta(\zeta)\Theta_{rr}(\zeta)$. Таким образом, и в этом случае $\Theta_{rr}(\zeta)$ является регулярным правым делителем $\Theta(\zeta)$.

3. $\Theta(\zeta)\equiv 0$. В этом случае функции $\Theta(\zeta)$ соответствует простой унитарный узел (1), при этом

$$T = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \ddots & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & I_q & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & I_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_p & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & I_p & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \ddots \end{array}\right], \quad F = \left[\begin{array}{c} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ I_q \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{array}\right],$$

$$G = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \cdots & 0 & 0 & 0 & I_p & 0 & 0 & \ldots \end{array}\right], \quad S = 0_{pq}.$$

Следовательно, операторы, входящие в узел Δ_φ, будут иметь следующий вид: T_φ имеет такой же вид, как и T с тем лишь отличием, что блоки I_q заменяются на I_p, $F_\varphi=0$, $G_\varphi=0$, $S_\varphi=I_q$. Очевидно, в рассматриваемом случае $\Theta_r(\zeta)=$ $=I_q$. Значит, $\Theta_{rr}(\zeta)\in S[\mathfrak{F},\mathfrak{K}]$, $\dim\mathfrak{K}=0$.

Пусть $\Delta_{rr}=(\mathfrak{H}_{rr}, \mathfrak{F}_{rr}, \mathfrak{G}_{rr}; T_{rr}, F_{rr}, G_{rr}, S_{rr})$ — простой унитарный узел такой, что $\Theta_{rr}(\zeta)=\Theta_{\Delta_{rr}}(\zeta)$. Тогда $\mathfrak{F}_{rr}=\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}_{rr}=\mathfrak{K}$, а входящие в узел операторы имеют вид

$$T_{rr} = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & 0 & I_q & \\ & & 0 & I_q \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{rr} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ I_q \end{bmatrix}, \quad G_{rr} = 0, \quad S_{rr} = 0.$$

Таким образом, в данном случае $\Theta_{rr}(\zeta)$ является регулярным правым делителем $\Theta(\zeta)$, который соответствует инвариантному относительно T^* подпространству, на котором T порождает максимальный сдвиг. Заметим, что это подпространство приводит T. Соответствующая регулярная факторизация имеет вид

$$\Theta(\zeta) = \Theta_{ll}(\zeta)\Theta_{rr}(\zeta), \quad \Theta_{ll}(\zeta) \in S[\mathfrak{K}, \mathfrak{G}].$$

Теорема доказана.

Фактически при доказательстве теоремы было описано подпространство в $\mathfrak{H}$, которому соответствует делитель $\Theta_{rr}(\zeta)$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть $\Theta(\zeta) \in S[\mathfrak{F}, \mathfrak{G}]$ и простой унитарный узел, соответствующий $\Theta(\zeta)$, имеет вид* (1). *Правый регулярный делитель $\Theta_{rr}(\zeta)$ соответствует наименьшему подпространству в $\mathfrak{H}$, инвариантному относительно T^* и содержащему подпространство, в котором действует максимальный сдвиг V_T. Аналогично, левый регулярный делитель $\Theta_{ll}(\zeta)$ соответствует наименьшему подпространству в $\mathfrak{H}$, инвариантному относительно T и содержащему подпространство, в котором действует максимальный косдвиг $\tilde{V}_T$.*

Следствие. *Если $\Theta(\zeta) \in S[\mathfrak{F}, \mathfrak{G}]$ и соответствующее вполне неунитарное сжатие T имеет порождающий сдвиг (косдвиг), то $\Theta(\zeta) = \Theta_{rr}(\zeta)$ $(\Theta(\zeta) = \Theta_{ll}(\zeta))$.*

Теорема 7. *Для того чтобы функция $\omega(\zeta) \in S[\mathfrak{F}, \mathfrak{K}]$ была правой (левой) дефектной функцией, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее функции $\omega(\zeta)$ вполне неунитарное сжатие T имело порождающий сдвиг (косдвиг).*

Доказательство. *Достаточность* вытекает из следствия к предыдущей теореме.

Доказательство *необходимости* достаточно провести для случая правой дефектной функции, т. е. предположим, что имеется $\Theta(\zeta) \in S[\mathfrak{F}, \mathfrak{G}]$ такая, что $\omega(\zeta) = \Theta_r(\zeta)$. Пусть $\Theta(\zeta)$ соответствует простой унитарный узел (1) и

$$\Delta_\omega = (\mathfrak{H}_\omega, \mathfrak{F}_\omega, \mathfrak{G}_\omega; T_\omega, F_\omega, G_\omega, S_\omega)$$

— простой унитарный узел такой, что $\omega(\zeta) = \Theta_{\Delta_\omega}(\zeta)$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. $\Theta(\zeta) \not\equiv 0$ и сжатие T содержит односторонний сдвиг. Но тогда можно считать, что узел Δ_ω является главной частью узла Δ_φ. Поэтому необходимый результат в этом случае следует из леммы 2.

2. $\Theta(\zeta) \not\equiv 0$ и сжатие T не содержит односторонний сдвиг. Тогда $\dim \mathfrak{K} = 0$, и в этом случае, как показано при доказательстве теоремы 5 (п. 3), оператор T_ω является односторонним сдвигом кратности $\dim \mathfrak{F}$.

3. $\Theta(\zeta) \equiv 0$. Тогда, как показано при доказательстве теоремы 5 (п. 3), $\mathfrak{K} = \mathfrak{F}$ и $\omega(\zeta) = I_{\mathfrak{F}}$. В этом случае $\dim \mathfrak{H}_\omega = 0$, и можно считать, что T_ω является односторонним сдвигом нулевой кратности.

***Замечание* 1.** Из доказанной теоремы и следствия к теореме 6 получаем, что $\omega(\zeta) \in S[\mathfrak{F}, \mathfrak{G}]$ является правой (левой) дефектной функцией тогда и только тогда, когда

$$\omega(\zeta) = \omega_{rr}(\zeta) \quad (\omega(\zeta) = \omega_{ll}(\zeta)).$$

Отсюда следует, что для любой $\Theta(\zeta) \in S[\mathfrak{F}, \mathfrak{G}]$

$$\Theta_{rrr}(\zeta) = \Theta_r(\zeta), \quad \Theta_{lll}(\zeta) = \Theta_l(\zeta).$$

***Замечание* 2.** Как известно (см., например, [3]), любая правая (левая) дефектная функция является внешней ($*$-внешней). Однако обратное утверждение неверно. В качестве примера можно рассмотреть скалярную функцию $\Theta(\zeta)$, конформно отображающую D на область $\Omega \subset D \cap \{\zeta\colon \operatorname{Re}\zeta > 0\}$ и такую, что лебегова мера пересечения границ $\partial\Omega$ и ∂D больше нуля. В этом случае $\operatorname{Re}\Theta(\zeta) > 0$ и, следовательно, $\Theta(\zeta)$ — внешняя (см., например, [7, с. 74]). Однако из условий

$$I - \Theta^*(e^{it})\Theta(e^{it}) \geq \Theta_r^*(e^{it})\Theta_r(e^{it}), \qquad m(\partial\Omega \cap \partial D) > 0$$

следует $\Theta_r(\zeta) \equiv 0$. Таким образом, условие $\Theta(\zeta) = \Theta_{rr}(\zeta)$ в данном случае не выполняется.

1 *Адамян В. М., Аров Д. З.* Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов // Мат. исслед. – 1996. – 1, вып. 2. – С. 3–64.
2. *Аров Д. З.* Об унитарных сцеплениях с потерями (теория рассеяния с потерями) // Функцион. анализ. – 1974. – **8**, вып. 4. – С. 5–22.
3. *Dubovoj V. K., Mohammed R. K.* Defect functions of holomorphic contractive matrix functions, regular extensions and open systems // Math. Nachr. – 1993. – 160. – P. 69–110.
4. *Бродский М. С.* Унитарные операторные узлы и их характеристические функции // Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, вып. 4. – С. 141–168.
5. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 431 с.
6. *Дубовой В. К.* Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1982. – **37**. – С. 14–26; – 1982. – **38**. – С. 32–40; – 1984. – **41**. – С. 55–64; – 1984. – **42**. – С. 46–57; – 1986. – **45**. – С. 16–26; – 1987. – **47**. – С. 112–119.
7. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 469 с.

Получено 14.02.96