УДК 517.9

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
Я. Р. Петришин (Чернів. ун-т)

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ БАГАТОЧАСТОТНОЇ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ

By using the averaging method, we prove the solvability of boundary-value problems with parameters for nonlinear oscillation systems. We obtain estimates for the deviation of solutions of averaged problems from solutions of original problems.

Доведена розв'язність крайових задач з параметрами для нелінійних коливних систем за допомогою методу усереднення. Встановлено також оцінки відхилення розв'язків вихідних і усереднених задач.

Розглядається нелінійна система звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x, \varphi, \tau), \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x, \varphi, \tau), \tag{1}$$

права частина якої визначена при $(x, \varphi, \tau, \varepsilon) \in D \times R^m \times [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0 << << 1$, D — обмежена область дійсного евклідового простору R^n). Вважатимемо, що функції a, b мають неперервні обмежені частинні похідні по x, φ, τ до другого порядку включно, майже періодичні по φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, причому

$$[a(x, \varphi, \tau); b(x, \varphi, \tau)] = \sum_{s=0}^{\infty} [a_s(x, \tau); b_s(x, \tau)]\, e^{i(\lambda_s, \varphi)},$$

де i — уявна одиниця, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_s \neq 0$ при $s \geq 1$, (λ_s, φ) — скалярний добуток векторів $\lambda_s = (\lambda_s^{(1)}, \ldots, \lambda_s^{(m)})$ і $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$.

Системи вигляду (1) виникають у багатьох задачах нелінійної механіки при дослідженні коливних процесів з повільно змінними частотами [1, 2]. При цьому $\tau = \varepsilon t$ — „повільний час", а x і φ відповідно позначають амплітуду і фазу.

В даній роботі вивчаються крайові задачі з параметрами для рівнянь (1). Більшість досліджень крайових задач з параметрами відноситься до випадку, коли параметри містяться лише в диференціальному рівнянні, проте практичні потреби вимагають вивчення і тих задач, в яких параметри входять в задані крайові умови [3–5].

Задамо для (1) крайові умови вигляду

$$\begin{gathered} A_1 x|_{\tau=0} + A_2 x|_{\tau=\mu} = C_1, \qquad x_n|_{\tau=0} = x_n^0, \\ B_1 \varphi|_{\tau=0} + B_2 \varphi|_{\tau=\mu} = C_2, \end{gathered} \tag{2}$$

де A_1, A_2 і B_1, B_2 — відповідно $(n \times n)$- і $(m \times m)$-матриці, C_1 і C_2 — n- і m-вимірні вектори, $\mu \in (0, L)$ — невідомий параметр, x_n — n-на координата компоненти $x = (x_1, \ldots, x_n)$ розв'язку (x, φ) системи (1), x_n^0 — задане число. Задача (1), (2) — крайова задача з нефіксованою правою границею. Для її розв'язання, тобто для знаходження невідомого параметра μ і розв'язку системи, який задовольняє крайові умови (2), використаємо метод усереднення по всіх швидких змінних φ_i, $i = \overline{1, m}$.

Поряд із (1), (2) розглянемо усереднену задачу

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{a}(\bar{x}, \tau), \tag{3.1}$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \overline{b}(\overline{x}, \tau), \tag{3.2}$$

$$A_1 \overline{x}|_{\tau=0} + A_2 \overline{x}|_{\tau=\mu} = C_1, \quad \overline{x}_n|_{\tau=0} = x_n^0, \tag{3.3}$$

$$B_1 \overline{\varphi}|_{\tau=0} + B_2 \overline{\varphi}|_{\tau=\mu} = C_2, \tag{3.4}$$

в якій

$$[\overline{a}; \overline{b}] = \lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_0^T \dots \int_0^T [a(\overline{x}, \varphi, \tau); b(\overline{x}, \varphi, \tau)]\, d\varphi_1 \dots d\varphi_m \equiv$$

$$\equiv [a_0(\overline{x}, \tau); b_0(\overline{x}, \tau)].$$

Надалі через $(x(\tau, y, \psi, \varepsilon), \varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon))$ і $(\overline{x}(\tau, y), \overline{\varphi}(\tau, y, \psi, \varepsilon))$ позначатимемо відповідно розв'язки систем (1) і (3.1), (3.2), які при $\tau = 0$ набувають значення (y, ψ), а через D_ρ — множину тих точок $y \in D$, для яких крива $\overline{x}(\tau, y)$ лежить в D разом із своїм ρ-околом для кожного $\tau \in [0, L]$. Вважатимемо, що при деякому $\rho_0 > 0$ множина D_{ρ_0} непорожня.

Лема 1. *Нехай*: а) *існує єдиний розв'язок* $\tilde{x}^0$, μ^0 *рівняння*

$$A_1 x^0 + A_2 \overline{x}(\mu^0, x^0) = C_1$$

такий, що $x^0 = (\tilde{x}^0, x_n^0) \in D_{\rho_0}$, $\mu^0 \in (0, L)$; б) $\det(B_1 + B_2) \neq 0$.

Тоді існує єдиний розв'язок $\{\mu^0, \overline{x}(\tau, x^0), \overline{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon)\}$ *усередненої задачі* (3.1) – (3.4), *який визначений для всіх* $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$.

Доведення. Із умови а) випливає, що розв'язок $\overline{x} = \overline{x}(\tau, x^0)$ рівняння (3.1) визначений для всіх $\tau \in [0, L]$ і задовольняє крайову умову (3.3) при $\mu = \mu^0$. Легко переконатися, що цьому розв'язку відповідає єдиний розв'язок

$$\overline{\varphi}(t, x^0, \varphi^0, \varepsilon) = \varphi^0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau [\omega(t) + \varepsilon \overline{b}(\overline{x}(t, x^0), t)]\, dt, \quad \tau \in [0, L], \tag{4}$$

задачі (3.2), (3.4), де

$$\varphi^0 = (B_1 + B_2)^{-1} \left\{ C_2 - \frac{1}{\varepsilon} B_2 \int_0^{\mu^0} [\omega(t) + \varepsilon \overline{b}(\overline{x}(t, x^0), t)]\, dt \right\}.$$

Лема доведена.

Вивчимо тепер питання про існування розв'язку вихідної задачі (1), (2) і встановимо оцінку його відхилення від розв'язку усередненої задачі (3.1) – (3.4). Для цього позначимо через P квадратну $(n \times n)$-матрицю

$$P = \left(A_1^1 + A_2 \frac{\partial \overline{x}(\mu^0, x^0)}{\partial \tilde{x}^0}; A_2 \overline{a}(\overline{x}(\mu^0, x^0), \mu^0) \right).$$

Тут A_1^1 — прямокутна $(n \times (n-1))$-матриця, стовпцями якої є перші $n-1$ стовпців матриці A.

Надалі під нормою матриці будемо розуміти суму модулів її елементів.

Теорема 1. *Нехай*: 1) $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \dots, \omega_m(\tau)) \in C_{[0,L]}^{m-1+p}$, *а вронскіан функцій* $\omega_1(\tau), \dots, \omega_m(\tau)$ *має на* $[0, L]$ *нулі кратності не більшої* p; 2) *функції* $c_s = [a_s(x, \tau); b_s(x, \tau)]$ *задовольняють нерівність*

$$\sup\|c_0\| + \sup\left\|\frac{\partial c_0}{\partial\tau}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial c_0}{\partial x}\right\| + \sum_{j=1}^{n}\sup\left\|\frac{\partial^2 c_0}{\partial x\partial x_j}\right\| +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n}\left[\left(\|\lambda_s\| + \frac{1}{\|\lambda_s\|}\right)\sup\|c_s\| + \left(1 + \frac{1}{\|\lambda_s\|}\right)\left(\sup\left\|\frac{\partial c_s}{\partial\tau}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial c_s}{\partial x}\right\|\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\|\lambda_s\|}\left(\sup\left\|\frac{\partial^2 c_s}{\partial\tau\partial x}\right\| + \sum_{j=1}^{n}\sup\left\|\frac{\partial^2 c_s}{\partial x\partial x_j}\right\|\right)\right] \le \sigma_1 = \text{const}, \tag{5}$$

в якій супремум береться по всіх $(\tau, x)\in[0,L]\times D$; 3) *виконуються умови леми* 1 ; 4) $\det P\neq 0$ *і*

$$\sigma_0 = \sup_{\varphi\in R^m}\left\|P^{-1}A_2\tilde{a}(\overline{x}(\mu^0, x^0), \varphi, \mu^0))\right\| < 1,$$

де $\tilde{a}(x,\varphi,\tau) = a(x,\varphi,\tau) - \overline{a}(x,\tau)$.

Тоді можна вказати такі додатні сталі $\overline{\varepsilon}_0\le\varepsilon_0$ *і* σ, *що при кожному* $\varepsilon\in(0,\overline{\varepsilon}_0]$ *існує розв'язок* $\{\mu(\varepsilon), x(\tau,\varepsilon), \varphi(\tau,\varepsilon)\}$ *крайової задачі* (1), (2), *який задовольняє оцінки*

$$\|\mu(\varepsilon)-\mu^0\| \le \sigma\varepsilon^{\alpha}, \quad \|x(\tau,\varepsilon)-\overline{x}(\tau,x^0)\| \le \sigma\varepsilon^{\alpha},$$

$$\|\varphi(\tau,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,x^0,\varphi^0,\varepsilon)\| \le \sigma\varepsilon^{\alpha-1}, \quad \alpha = \frac{1}{m+p}, \tag{6}$$

для всіх $\tau\in[0,L]$.

Доведення. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді

$$\{\mu^0+h, x(\tau,x^0+y,\varphi^0+\psi,\varepsilon), \varphi(\tau,x^0+y,\varphi^0+\psi,\varepsilon)\},$$

де $y = (\tilde{y},0) = (y_1,\ldots,y_{n-1},0)$, h і $\psi = (\psi_1,\ldots,\psi_m)$ — невідомі параметри. Для їх знаходження скористаємось крайовими умовами (2):

$$\begin{gathered} A_1 y + A_2\overline{x}(\mu^0+h, x^0+y) = C_1 - A_1x^0 - A_2\Delta x_{\mu^0+h}, \\ B_1\psi + B_2\overline{\varphi}(\mu^0+h, x^0+y, \varphi^0+\psi,\varepsilon) = C_2 - B_1\varphi^0 - B_2\Delta\varphi_{\mu^0+h}. \end{gathered} \tag{7}$$

Тут $\mu = \mu^0+h$, $\Delta x_\tau = x(\tau,x^0+y,\varphi^0+\psi,\varepsilon) - \overline{x}(\tau,x^0+y)$, $\Delta\varphi_\tau = \varphi(\tau,x^0+y,\varphi^0+\psi,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,x^0+y,\varphi^0+\psi,\varepsilon)$. Відмітимо, що при досить малому $\varepsilon_0>0$ умови 1, 2 теореми 1 гарантують виконання нерівності [6]

$$\|\Delta x_\tau\| + \|\Delta\varphi_\tau\| + \left\|\frac{\partial}{\partial y}\Delta x_\tau\right\| + \left\|\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi_\tau\right\| + \left\|\frac{\partial}{\partial\psi}\Delta x_\tau\right\| + \left\|\frac{\partial}{\partial\psi}\Delta\varphi_\tau\right\| \le \underline{\sigma}\varepsilon^{\alpha} \tag{8}$$

для всіх $\tau\in[0,L]$, $\psi\in R^m$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\|y\|\le\frac{1}{2}\rho_0$ із деякою незалежною від ε додатною сталою $\underline{\sigma}$. Оскільки

$$\overline{x}(\mu^0+h, x^0+y) =$$

$$= \overline{x}(\mu^0,x^0) + \frac{\partial\overline{x}(\mu^0,x^0)}{\partial x^0}y + \overline{a}(\overline{x}(\mu^0,x^0),\mu^0)h + X(x^0,\mu^0,h,y),$$

$$\overline{\varphi}(\mu^0+h, x^0+y, \varphi^0+\psi,\varepsilon) =$$

$$= \varphi^0 + \psi + \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^{\mu^0+h} [\omega(t) + \overline{b}(\overline{x}(t, x^0 + y), t)]\, dt,$$

$$\| X(x^0, \mu^0, h, y) \| \le \overline{\sigma}_1 (\|y\|^2 + h^2), \tag{9}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial h} X(x^0, \mu^0, h, y) \right\| + \left\| \frac{\partial}{\partial y} X(x^0, \mu^0, h, y) \right\| \le \overline{\sigma}_1 (\|y\| + |h|), \qquad \overline{\sigma}_1 = \text{const},$$

то, позначивши $(\tilde{y}; h) = z$, рівності (7) можна переписати у вигляді

$$z = -P^{-1} A_2 [\Delta x_{\mu^0+h} + X(x^0, \mu^0, h, y)] \equiv M(z, \psi, \varepsilon),$$

$$\psi = -(B_1 + B_2)^{-1} B_2 \left[\int\limits_{\mu^0}^{\mu^0+h} \left(\frac{\omega(t)}{\varepsilon} + \overline{b}(\overline{x}(t, x^0 + y), t) \right) dt \; + \right. \tag{10}$$

$$\left. + \int\limits_0^{\mu^0} \left(\overline{b}(\overline{x}(t, x^0 + y), t) - \overline{b}(\overline{x}(t, x^0), t) \right) dt + \Delta\varphi_{\mu^0+h} \right] \equiv N(z, \psi, \varepsilon).$$

Із (8), (9) випливає, що при кожних фіксованих $\psi \in R^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ $M(z, \psi, \varepsilon)$ відображає множину $K = \{ z : z \in R^n, \; \|z\| \le \sigma_2 \varepsilon^\alpha \}$, $\sigma_2 = 2\underline{\sigma} \|P^{-1} A_2\|$, в себе лише коли $\varepsilon_0 > 0$ настільки мале, що

$$\varepsilon_0^\alpha \le \frac{1}{4 \overline{\sigma}_1 \underline{\sigma}} \|P^{-1} A_2\|^{-2}.$$

Крім того, накладемо обмеження $\varepsilon_0^\alpha \le \dfrac{1}{\sigma_2} \min \{\mu^0, L - \mu^0\}$, яке гарантує виконання умови $\mu^0 + h \in [0, L]$.

Покажемо далі, що $M: K \to K$ є відображенням стиску. Використовуючи оцінку (8) і рівність

$$\frac{d}{d\tau} \Delta x_\tau = [\overline{a}(x, \tau) - \overline{a}(\overline{x}, \tau)] + \tilde{a}(x, \varphi, \tau),$$

із співвідношення

$$\frac{\partial M}{\partial z} = -P^{-1} A_2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \Delta x_{\mu^0+h} ; \frac{\partial}{\partial h} \Delta x_{\mu^0+h} \right) + \frac{\partial}{\partial z} X(x^0, \mu^0, h, y) \right]$$

одержуємо нерівність

$$\left\| \frac{\partial M}{\partial z} \right\| \le \|P^{-1} A_2\| (\underline{\sigma} + \underline{\sigma} \sigma_1 + \overline{\sigma}_1 \sigma_2) \varepsilon^\alpha \; +$$

$$+ \left\| P^{-1} A_2 \, \tilde{a}(x(\mu^0 + h, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \varepsilon), \right.$$

$$\left. \varphi(\mu^0 + h, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \varepsilon), \mu^0 + h) \right\|. \tag{11}$$

Використовуючи (5), (8), (9), для всіх $z \in K$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і $\varphi \in R^m$ маємо нерівність

$$\left\| \tilde{a}(x(\mu^0 + h, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \varepsilon), \varphi, \mu^0 + h) - \tilde{a}(\overline{x}(\mu^0, x^0), \varphi, \mu^0) \right\| \le$$

$$\le \sigma_1 [\underline{\sigma} + \sigma_2 (1 + n e^{\sigma_1 L} + \sigma_1)] \varepsilon^\alpha.$$

Тоді, враховуючи обмеження $\sigma_0 < 1$, із (11) знаходимо

$$\left\|\frac{\partial M}{\partial z}\right\| \le \sigma_0 + \overline{\sigma}_2 \varepsilon^{\alpha} \le \frac{\sigma_0 + 1}{2} < 1$$

для всіх $z \in K$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\psi \in R^m$ при $\varepsilon_0 \le \left(\frac{1-\sigma_0}{2\overline{\sigma}_2}\right)^{1/\alpha}$, де

$$\overline{\sigma}_2 = \|P^{-1} A_2\| \, [\underline{\sigma} + 2\underline{\sigma}\sigma_1 + \overline{\sigma}_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2 (1 + n e^{\sigma_1 L} + \sigma_1)].$$

Таким чином, $M\colon K \to K$ є відображенням стиску, тому існує єдиний розв'язок $z = z^0(\psi, \varepsilon) \equiv (\tilde{y}^0(\psi, \varepsilon), h^0(\psi, \varepsilon)) \in K$, який неперервно залежить від $(\psi, \varepsilon) \in$ $\in R^m \times (0, \varepsilon_0]$.

Підставимо далі значення $z = z^0(\psi, \varepsilon)$ в друге з рівнянь (10), в результаті чого отримаємо рівність

$$\psi = N(z^0(\psi, \varepsilon), \psi, \varepsilon). \tag{12}$$

Оскільки відображення N неперервне по $\psi \in R^m$ і згідно з (9)

$$\| N(z^0(\psi, \varepsilon), \psi, \varepsilon) \| \le \sigma_3 \varepsilon^{\alpha - 1} \qquad \forall\, (\psi, \varepsilon) \in R^m \times (0, \varepsilon_0],$$

де $\sigma_3 = \|(B_1 + B_2)^{-1} B_2\| \left(\underline{\sigma} + \sigma_1 \sigma_2 + 2L\sigma_1 + \sigma_2 \max\limits_{[0,\,L]} \|\omega(\tau)\|\right)$, то, використовуючи теорему Шаудера [7] про нерухому точку, встановлюємо існування розв'язку $\psi = \psi^0(\varepsilon)$, $\|\psi^0(\varepsilon)\| \le \sigma_3 \varepsilon^{\alpha-1}$, рівняння (12).

Отже,

$$\begin{gathered} \{\mu(\varepsilon), x(\tau, \varepsilon), \varphi(\tau, \varepsilon)\} = \\ = \{\mu^0 + \mu^0(\varepsilon), x(\tau, x^0 + y^0(\varepsilon), \varphi^0 + \psi^0(\varepsilon), \varepsilon), \\ \varphi(\tau, x^0 + y^0(\varepsilon), \varphi^0 + \psi^0(\varepsilon), \varepsilon)\}, \end{gathered}$$

де $y^0(\varepsilon) = (\tilde{y}^0(\psi^0(\varepsilon), \varepsilon), 0)$, є розв'язком крайової задачі (1), (2).

Оцінки (6) із сталою $\sigma = \underline{\sigma} + \sigma_3 + n\sigma_2 e^{\sigma_1 L} \max\{1; \sigma_1 L\}$ випливають із оцінки (8) і нерівностей $\|y^0(\varepsilon)\| \le \sigma_2 \varepsilon^{\alpha}$, $\|\psi^0(\varepsilon)\| \le \sigma_3 \varepsilon^{\alpha-1}$. Теорема доведена.

Наслідок. *Нехай в теоремі* 1 $B_2 = 0$, *тобто крайова умова для швидких змінних* φ *перетворюється в початкову умову* $\varphi|_{\tau=0} = B_1^{-1} C_1 \equiv \varphi^0$. *Тоді в малому околі розв'язку* $\{\mu^0, \overline{x}(\tau, x^0), \overline{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon)\}$ *усередненої задачі* (3.1)–(3.4) *існує єдиний розв'язок* $\{\mu(\varepsilon), x(\tau, \varepsilon), \varphi(\tau, \varepsilon)\}$ *крайової задачі* (1), (2), *який задовольняє нерівність*

$$|\mu(\varepsilon) - \mu^0| + \|x(\tau, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, x^0)\| + \|\varphi(\tau, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon)\| \le \sigma \varepsilon^{\alpha}$$

для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$.

Запропонований вище метод може бути узагальнений на випадок багатоточкової задачі для системи (1), яка містить невідомі параметри $\mu_1, \ldots, \mu_r$, $2 \le r < n$, в крайових умовах. Замість (2) розглянемо крайові умови

$$\sum_{j=1}^{r} A_j x|_{\tau=\mu_j} = C_1, \quad x'|_{\tau=0} = y^0, \quad \sum_{j=1}^{r} B_j \varphi|_{\tau=\mu_j} = C_2, \tag{13}$$

де $0 < \mu_1 < \ldots < \mu_r < L$, $x' = (x_{n-r+1}, \ldots, x_n)$ — вектор, координатами якого є r останніх координат повільної компоненти $x = (x_1, \ldots, x_n)$ розв'язку x, φ системи (1), y^0 — заданий $(n-r)$-вимірний вектор.

Лема 2. *Якщо матриця* $\sum_{j=1}^{r} B_j$ *невироджена та існує єдиний розв'язок* $\tilde{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_{n-r}^0)$, $\mu^0 = (\mu_1^0, \ldots, \mu_r^0)$ *рівняння*

$$\sum_{j=1}^{r} A_j \overline{x}(\mu_1^0, x^0) = C_1,$$

який задовольняє умови $x^0 = (\tilde{x}^0, y^0) \in D_{\rho_0}$ *і* $0 < \mu_1^0 < \ldots < \mu_r^0 < L$, *то існує єдиний розв'язок* $\{\mu^0, \overline{x}(\tau, x^0), \overline{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon)\}$ *усередненої задачі* (3.1), (3.2), (13).

Доведення. Досить знайти компоненту $\overline{\varphi}$ розв'язку усередненої задачі. Для цього скористаємось формулою (4), в якій покладемо

$$\varphi^0 = \left(\sum_{j=1}^{r} B_j\right)^{-1} \left[C_2 - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{r} \int_0^{\mu_j^0} (\omega(t) + \varepsilon \overline{b}(\overline{x}(t, x^0), t))\, dt\right].$$

Лема доведена.

Позначимо через Q квадратну $(n \times n)$-матрицю

$$Q = \left(\sum_{j=1}^{r} A_j \frac{\partial \overline{x}(\mu_j^0, x^0)}{\partial \tilde{x}^0}; A_1 \overline{a}(\overline{x}(\mu_1^0, x^0), \mu_1^0); \ldots; A_r \overline{a}(\overline{x}(\mu_r^0, x^0), \mu_r^0)\right).$$

Доведення наступної теореми по суті повторює доведення теореми 1, тому лише сформулюємо її.

Теорема 2. *Припустимо, що*: а) *виконуються умови* 1, 2 *теореми* 1 *і умови леми* 2; б) *матриця* Q *невироджена, причому*

$$\sup_{\substack{\varphi^{(j)} \in R^m, \\ 1 \le j \le r}} \left\| Q^{-1} \sum_{j=1}^{r} A_j \tilde{a}(\overline{x}(\mu_j^0, x^0), \varphi^{(j)}, \mu_j^0) \right\| < 1.$$

Тоді при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ *і для всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *існує розв'язок* $\{\mu(\varepsilon), x(\tau, \varepsilon), \varphi(\tau, \varepsilon)\}$ *багатоточкової задачі* (1), (13), *який задовольняє нерівність*

$$\|\mu(\varepsilon) - \mu^0\| + \|x(\tau, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, x^0)\| + \varepsilon \|\varphi(\tau, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon)\| \le$$
$$\le \sigma_4 \varepsilon^\alpha \quad \forall \tau \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$$

із сталою σ_4, *не залежною від* ε.

Нарешті, розглянемо випадок, коли невідомий скалярний параметр $\mu \in R$ входить лінійно в крайові умови вигляду

$$\begin{gathered} A_1 x|_{\tau=0} + \mu A_2 x|_{\tau=L} = C_1, \quad x_n|_{\tau=0} = x_n^0, \\ B_1 \varphi|_{\tau=0} + B_2 \varphi|_{\tau=L} = C_2, \quad A_2 \ne 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Розв'язність усередненої задачі (3.1), (3.2), (14) випливає з наступної леми.

Лема 3. *Нехай матриця* $B_1 + B_2$ *невироджена і рівняння*

$$A_1 x^0 + \mu_0 A_2 \overline{x}(L, x^0) = C_1$$

має єдиний розв'язок μ^0, $\tilde{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)$, *для якого* $x^0 = (\tilde{x}^0, x_n^0) \in D_{\rho_0}$. *Тоді для всіх* $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$ *визначений єдиний розв'язок* $\{\mu^0,$

$\overline{x}(\tau, x^0), \overline{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon)\}$ *крайової задачі* (3.1), (3.2), (14), *в якому*

$$\varphi^0 = (B_1 + B_2)^{-1}\left[C_2 - \frac{1}{\varepsilon}B_2\int\limits_0^L(\omega(t) + \varepsilon\overline{b}(\overline{x}(t, x^0), t))\,dt\right].$$

Доведеня даної леми аналогічне доведенню лем 1 і 2.

Виберемо далі $h \in R$, $\tilde{y} \in R^{n-1}$ і $\psi \in R^m$ так, щоб розв'язок вихідної задачі (1), (14) мав вигляд $\{\mu^0 + h, x(\tau, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \varepsilon), \varphi(\tau, x^0 + y, \varphi^0 + \psi, \varepsilon)\}$, де $y = (\tilde{y}, 0) \in R^n$. Скориставшись крайовими умовами (14) і лемою 3, одержимо рівності

$$z = -\overline{P}^{-1}A_2\left[(\Delta x_L + X(x^0, L, 0, y))(\mu^0 + h) + \frac{\partial\overline{x}(L, x^0)}{\partial x^0}yh\right] \equiv$$

$$\equiv \overline{M}(z, \psi, \varepsilon), \tag{15.1}$$

$$\psi = -(B_1 + B_2)^{-1}B_2\left[\Delta\varphi_L + \int\limits_0^L(\overline{b}(\overline{x}(t, x^0 + y), t) - \overline{b}(\overline{x}(t, x^0), t))\,dt\right] \equiv$$

$$\equiv \overline{N}(z, \psi, \varepsilon), \tag{15.2}$$

в яких $z = (\tilde{y}, h)$, $\overline{P}$ — $(n \times n)$-матриця

$$\overline{P} = \left(A_1^1 + \mu^0 A_2\frac{\partial\overline{x}(L, x^0)}{\partial\tilde{x}^0};\ A_2\overline{x}(L, x^0)\right),$$

а X і A_1^1 означені в теоремі 1.

Якщо $\mu^0 \neq 0$, то аналіз нерівності

$$\|\overline{M}(z, \psi, \varepsilon)\| \le \|\overline{P}^{-1}A_2\|\,[(\underline{\sigma}\varepsilon^\alpha + \overline{\sigma}_1\|z\|^2)(\mu^0 + \|z\|) + ne^{\sigma_1 L}\|z\|^2],$$

яка випливає із (5), (8), (9) і (15.1), показує, що при фіксованих $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in \in (0, \varepsilon_0]$ і

$$\varepsilon_0 \le \left[\frac{\sigma_5}{\underline{\sigma}\mu^0}(\underline{\sigma} + \overline{\sigma}_1\sigma_5\mu^0 + \overline{\sigma}_1\sigma_5^2 + ne^{\sigma_1 L}\sigma_5)\right]^{-1/\alpha},$$

$$\sigma_5 = 2\underline{\sigma}\mu^0\|\overline{P}^{-1}A_2\|,$$

$\overline{M}(z, \psi, \varepsilon)$ відображає множину $\overline{K} = \{z :\ z \in R^n,\ \|z\| \le \sigma_5\varepsilon^\alpha\}$ в себе. Крім того, із (15.1) знаходимо

$$\left\|\frac{\partial\overline{M}(z, \psi, \varepsilon)}{\partial z}\right\| \le$$

$$\le \|\overline{P}^{-1}A_2\|\,[\underline{\sigma}(\mu^0 + 1) + \sigma_5(\underline{\sigma} + \overline{\sigma}_1\mu^0 + n^2e^{\sigma_1 L}) + 2\,\overline{\sigma}_1\sigma_5^2]\,\varepsilon^\alpha \equiv$$

$$\equiv \sigma_6\varepsilon^\alpha \le \frac{1}{2}$$

при $\varepsilon_0^\alpha \le (2\sigma_6)^{-1}$. Тому для $\mu^0 \neq 0$ існує єдиний розв'язок $z = z(\psi, \varepsilon) \equiv \equiv (\tilde{y}(\psi, \varepsilon), h(\psi, \varepsilon)) \in \overline{K}$ рівняння (15.1), який можна визначити методом послідовних наближень

$$z_{s+1}(\psi, \varepsilon) = \overline{M}(z_s(\psi, \varepsilon), \psi, \varepsilon), \qquad s \ge 0,$$

$$z_0(\psi,\varepsilon)\equiv 0, \qquad \lim_{s\to\infty} z_s(\psi,\varepsilon) = z(\psi,\varepsilon).$$

Диференціюючи рівність $z_{s+1}(\psi,\varepsilon) = \overline{M}(z_s(\psi,\varepsilon),\psi,\varepsilon)$ по ψ і враховуючи оцінку (8), одержуємо нерівність

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\psi} z_{s+1}(\psi,\varepsilon)\right\| \le \sigma_7\varepsilon^\alpha \left\|\frac{\partial}{\partial\psi} z_s(\psi,\varepsilon)\right\| + \sigma_8\varepsilon^\alpha, \quad s\ge 0, \tag{16}$$

в якій

$$\sigma_7 = \|\overline{P}^{-1}A_2\|\,[(\mu^0+\sigma_5)(\underline{\sigma}+\overline{\sigma}_1\sigma_5) + \underline{\sigma} + \overline{\sigma}_1\sigma_5^2 + ne^{\sigma_1 L}\sigma_5],$$

$$\sigma_8 = \|\overline{P}^{-1}A_2\|\,\underline{\sigma}\,(\mu^0+\sigma_5).$$

Нерівність (16) веде до оцінки

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\psi} z_s(\psi,\varepsilon)\right\| \le \frac{\sigma_8}{1-\sigma_7\varepsilon_0^\alpha}\varepsilon^\alpha \equiv \sigma_9\varepsilon^\alpha \quad \forall\, s\ge 0, \quad (\psi,\varepsilon)\in R^m\times(0,\varepsilon_0],$$

при умові $\varepsilon_0^\alpha \le (2\sigma_7)^{-1}$. Отже, послідовність $\left\{\frac{\partial}{\partial\psi} z_s(\psi,\varepsilon)\right\}$ рівномірно обмежена сталою $\sigma_9\varepsilon^\alpha$ для всіх $\psi\in R^m$. Цього досить, щоб гранична функція $z(\psi,\varepsilon)$ задовольняла умову Ліпшіца

$$\|z(\overline{\psi},\varepsilon) - z(\underline{\psi},\varepsilon)\| \le \sigma_9\varepsilon^\alpha \|\overline{\psi}-\underline{\psi}\| \quad \forall\, \overline{\psi},\, \underline{\psi}\in R^m. \tag{17}$$

Якщо ж $\mu^0 = 0$, то із рівняння (15.1) випливає, що єдиним його розв'язком при малих $\|z\|$ є $z = z(\psi,\varepsilon)\equiv 0$.

Підставляючи тепер $z = z(\psi,\varepsilon)$ в (15.2), одержуємо рівняння

$$\psi = \overline{N}(z(\psi,\varepsilon),\psi,\varepsilon). \tag{18}$$

Із нерівності (8) і обмеження $\|y\|\le\sigma_5\varepsilon^\alpha$ випливає

$$\|\overline{N}(z(\psi,\varepsilon),\overline{\psi},\varepsilon)\| \le \sigma_{10}\varepsilon^\alpha,$$

$$\sigma_{10} = \|(B_1+B_2)^{-1}B_2\|\,(\underline{\sigma} + \mathrm{Ln}\,\sigma_1\sigma_5 e^{\sigma_1 L}),$$

а умова Ліпшіца (17) гарантує виконання нерівності

$$\|\overline{N}(z(\overline{\psi},\varepsilon),\overline{\psi},\varepsilon) - \overline{N}(z(\underline{\psi},\varepsilon),\underline{\psi},\varepsilon)\| \le \sigma_{10}\varepsilon^\alpha\|\overline{\psi}-\underline{\psi}\|$$

для всіх $\overline{\psi},\, \underline{\psi}\in R^m$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$. Якщо вибрати $\varepsilon_0>0$ настільки малим, щоб $\sigma_{10}\varepsilon_0^\alpha\le 1/2$, то $\overline{N}(z(\psi,\varepsilon),\psi,\varepsilon)$ відображає множину $\|\psi\|\le\sigma_{10}\varepsilon^\alpha$ в себе і є відображенням стиску. Тому існує єдиний розв'язок $\psi = \psi(\varepsilon)$, $\|\psi(\varepsilon)\|\le\sigma_{10}\varepsilon^\alpha$, рівняння (18), а значить, і єдиний розв'язок $z(\varepsilon) = z(\psi(\varepsilon),\varepsilon)$, $\psi = \psi(\varepsilon)$ системи (15.1), (15.2), який задовольняє нерівності

$$\|z(\varepsilon)\|\le\sigma_5\varepsilon^\alpha, \quad \|\psi(\varepsilon)\|\le\sigma_{10}\varepsilon^\alpha \quad \forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]. \tag{19}$$

Отже, $\{\mu(\varepsilon), x(\tau,\varepsilon), \varphi(\tau,\dot{\varepsilon})\}$, де $\mu(\varepsilon) = \mu^0 + h(\varepsilon)$, $x(\tau,\varepsilon) = x(t, x^0+y(\varepsilon), \varphi^0+\psi(\varepsilon),\varepsilon)$, $\varphi(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau, x^0+y(\varepsilon), \varphi^0+\psi(\varepsilon),\varepsilon)$, $z(\varepsilon) = (\tilde{y}(\varepsilon), h(\varepsilon))$, є єдиним розв'язком задачі (1), (14) в малому околі розв'язку $\{\mu^0, \overline{x}(\tau,x^0), \overline{\varphi}(\tau,x^0,\varphi^0,\varepsilon)\}$ усередненої задачі. Крім того, згідно з нерівностями (8) і (19) для всіх $(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$ справедлива оцінка

$$|\mu(\varepsilon)-\mu^0| + \|x(\tau,\varepsilon)-\overline{x}(\tau,x^0)\| + \|\varphi(\tau,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,x^0,\varphi^0,\varepsilon)\| \leq \sigma_{11}\varepsilon^{\alpha}, \quad (20)$$

в якій $\sigma_{11} = \underline{\sigma} + \sigma_{10} + ne^{\sigma_1 L}\sigma_5 \max\{1; L\sigma_1\}$.

Таким чином, вірна наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови* 1, 2 *теореми* 1, *умови леми* 3 *і* $\det\overline{P} \neq 0$, *то при досить малому* $\varepsilon_0 > 0$ *для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *в малому околі розв'язку* $\{\mu^0, \overline{x}(\tau, x^0), \overline{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon)\}$ *усередненої задачі* (3.1), (3.2), (14) *існує єдиний розв'язок* $\{\mu(\varepsilon), x(\tau,\varepsilon), \varphi(\tau,\varepsilon)\}$ *крайової задачі* (1), (14), *який задовольняє нерівність* (20).

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Адиабатический инвариант для двойного маятника с медленно меняющимися длинами // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1990. – Вып. 14. – С. 30–39.
3. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 279 с.
4. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 315 с.
5. *Ронто Н. И., Король И. И.* Исследование и решение краевых задач с параметрами численно-аналитическим методом // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 8. – С. 1031–1043.
6. *Петришин Р. І.* Дослідження коливних систем з повільно змінними частотами за допомогою методу усереднення: Дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Київ, 1995. – 248 с.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

Одержано 24.09.96