УДК 517.983; 517.955.4; 517.986.7

О. Вал. Антонюк,
О. Вікт. Антонюк, кандидати фіз.-мат. наук,
Ю. Г. Кондратьєв, д-р фіз.-мат. наук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ІСТОТНА САМОСПРЯЖЕНІСТЬ ОПЕРАТОРІВ ДІРІХЛЕ ГІББСОВИХ МІР НА НЕСКІНЧЕННОМУ ДОБУТКУ МНОГОВИДІВ*

We obtain conditions of essential selfadjointness of Dirichlet operators of Gibbs measures with essential domains consisting of cylindrical functions. It is proved that certain spaces of smooth functions are preserved under the action of the semigroup of the Dirichlet operator.

Одержані умови істотної самоспряженості операторів Діріхле гіббсових мір з істотною областю гладких циліндричних функцій. Доведено збереження півгрупою оператора Діріхле деяких просторів гладких функцій.

Останнім часом з'явився цикл робіт, присвячених вивченню квантових граткових систем, у яких спіновим простором кожної частинки є компактний ріманів многовид [1 – 3]. Для цих моделей відповідна стохастична (глауберова) динаміка задається за допомогою півгрупи, що породжена так званим оператором Діріхле гіббсової міри на нескінченному добутку многовидів. При цьому одним із важливих питань є умови єдиності такої динаміки, що відповідає істотній самоспряженості генератора півгрупи.

У данній роботі одержана така властивість генератора як наслідок збереження півгрупою певних класів гладких функцій. Подібна теорема була анонсована без доведення в роботах [1, 2] і використовувалась для вивчення властивостей відповідних операторів.

Перейдемо до строгого опису ситуації, що розглядається. Нехай $\mathbb{Z}^d$ — d-вимірна гратка, кожному вузлу якої $k \in \mathbb{Z}^d$ відповідає компактний ріманів многовид $M_k \equiv M$. Розглянемо сім'ю імовірнісних мір $\{\mu_\Lambda\}$, заданих на борелевих σ-алгебрах $\mathcal{B}(M^\Lambda)$, де $M^\Lambda = \mathop{\times}\limits_{k \in \Lambda} M_k$

$$d\mu_\Lambda(x_\Lambda) = \frac{\exp\left\{-\lambda \sum_{\langle k,j\rangle \in \Lambda} V(x_k, x_j)\right\}}{\int_{M^\Lambda} \exp\left\{-\lambda \sum_{\langle k,j\rangle\in\Lambda} V(x_k,x_j)\right\} \mathop{\times}\limits_{k\in\Lambda} d\sigma(x_k)} \mathop{\times}\limits_{k\in\Lambda} d\sigma(x_k).$$

Тут сумування проводиться по $k, j \in \Lambda$ таких, що $|k-j| = 1$, $V \in C^\infty(M \times M)$ і через σ позначено нормований на одиницю ріманів об'єм. При досить малих λ [4] сім'я $\{\mu_\Lambda\}$ має єдиною слабкою термодинамічною границею імовірнісну міру μ на борелевій σ-алгебрі на $M^{\mathbb{Z}^d}$, коли $\lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$.

Форма Діріхле міри μ визначається співвідношенням

$$\frac{1}{2} \int\limits_{M^{\mathbb{Z}^d}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle \nabla_k u, \nabla_k v \rangle \, d\mu$$

на множині гладких циліндричних функцій $u, v \in C^\infty_{\mathrm{cyl}}\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$, де через ∇_k позначено оператор коваріантного диференціювання на многовиді M_k. Оператор Діріхле H_μ, що відповідає цій формі, має зображення на $C^\infty_{\mathrm{cyl}}\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$

* Робота частково підтримана фондом фундаментальних досліджень при Державному Комітеті України з питань науки і технологій.

$$H_\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} H_{\mu,k},$$

де $H_k = -\Delta_k/2 - \lambda\langle b_k, \nabla_k\rangle/2$ з логарифмічною похідною

$$b_k = -\nabla_k\left(\sum_{|k-j|=1} V(x_k, x_j)\right).$$

Зрозуміло, що кожен з операторів $H_{\mu,k}$ є ермітовим у просторі $L_2\left(M^{\mathbb{Z}^d}, \mu\right)$ з областю $C_{\text{cyl}}^\infty\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$. Нижче ми наведемо умови істотної самоспряженості оператора H_μ на області $C_{\text{cyl}}^\infty\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$, тобто $H_\mu^* = \hat{H}_\mu$, де через $\hat{H}_\mu$ позначено замикання H_μ у $L_2\left(M^{\mathbb{Z}^d}, \mu\right)$. Ми покажемо, що відповідна півгрупа зберігає деякий клас гладких функцій $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}(H_\mu)$ що забезпечує істотну самоспряженість для оператора H_μ [5].

Зафіксуємо $B_a = [1, a]^d \cap \mathbb{Z}^d$ для досить великого $a \in \mathbb{N}$ і розглянемо множину $U_{(0)} \subset \mathbb{Z}^d$, $U_{(0)} = \bigcup_{k \in (2aZ)^d} \theta_k B_a$, де θ_k — зсув на вектор $k \in \in \mathbb{Z}^d$. Покладемо $U_{(i)} = \theta_{(i_1, 0, \ldots, 0)} \;\; \theta_{(0,0,\ldots,i_d)} U_{(0)}$, де набір $i = (i_1, \ldots, i_d)$, $i_s \in \{0, 1\}$. Множини $U_{(i)}$ задають розбиття гратки $\mathbb{Z}^d$ на нескінченні підмножини, що не перетинаються. Йому відповідає зображення оператора H_μ як скінченної суми операторів $H_{(i)}$ на $C_{\text{cyl}}^\infty\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$;

$$H_\mu = \sum_{i \in \{0,1\}^d} H_{(i)}, \quad \text{де} \quad H_{(i)} = \sum_{k \in U_{(i)}} H_{\mu,k}.$$

Завдяки спеціальній блочній структурі оператора $H_{(i)}$ задача Коші

$$\begin{gathered} \frac{df(t,x)}{dt} = -H_{(i)} f(t,x), \\ f(0,x) = f_0(x) \in C_{\text{cyl}}^\infty\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right) \end{gathered} \tag{1}$$

є гладко розв'язною у просторі $C_{\text{cyl}}^\infty\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$, проте носій циліндричності функції $f(t,x)$ може розширитися у порівнянні з носієм функції $f_0(x)$.

Наявність гладкої розв'язності задачі (1) у просторі $C_{\text{cyl}}^\infty\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$ забезпечує також гладку розв'язність задачі Коші (1) з оператором $\hat{H}_{(i)}$, де через $\hat{H}_{(i)}$ позначено замикання $H_{(i)}$ у просторі $L_2\left(M^{\mathbb{Z}^d}, \mu\right)$. Враховуючи позитивність кожного з операторів $H_{(i)}$ в $L_2\left(M^{\mathbb{Z}^d}, \mu\right)$, маємо істотну самоспряженість операторів $H_{(i)}$ в $L_2\left(M^{\mathbb{Z}^d}, \mu\right)$ з істотною областю $C_{\text{cyl}}^\infty\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$.

Таким чином, задача істотної самоспряженості оператора H_μ переходить у задачу про істотну самоспряженість скінченної суми самоспряжених операторів $\hat{H}_{(i)}$. Відсутність взаємної малості операторів $H_{(i)}$ не дає можливості використовувати стандартні критерії істотної самоспряженості суми самоспряжених операторів.

Наступна теорема є узагальненням відомої теореми да Прато і Грісварда [6] про умови істотної максимальної дисипативності суми замкнених дисипативних операторів.

Теорема 1. *Нехай X — банахів простір і оператори $A_1, \ldots, A_p, B$ є замкнені оператори в X, що задовольняють оцінку:*

$$\left\|\left(A_i - \lambda\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \alpha_i}, \quad \lambda > \alpha_i,$$

$$\left\|(B - \lambda)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \beta}, \quad \lambda > \beta,$$

де α_i, $\beta > 0$. Припустимо, що існує банахів простір Y, неперервно і щільно вкладений до X, такий, що для $i = 1, 2, \ldots, p$ Y неперервно вкладений до $\mathcal{D}\left(A_i^2\right)$ з нормою графіку, $Y \subset \mathcal{D}(B)$ і для звужень $A_i \restriction_Y$, $B \restriction_Y$ справедливі оцінки

$$\left\|\left(\lambda - A_i \restriction_Y\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq \frac{1}{\lambda - \gamma_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

$$\left\|\left(\lambda - B \restriction_Y\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq \frac{1}{\lambda - \rho}.$$

Тоді оператор $L = A_1 + \ldots + A_p + B$ є істотно максимально квазідисипативним оператором в X з істотною областю $\mathcal{D}(L) = \bigcap_{i=1}^{p} \mathcal{D}\left(A_i\right) \cap \mathcal{D}(B)$ з замиканням $\tilde{L}$. *Максимальна квазідисипативність означає, що*

$$\left\|\left(\lambda - \tilde{L}\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \left(\alpha_1 + \ldots + \alpha_p + \beta\right)}. \tag{2}$$

***Наслідок.**. За умов теореми* 1 *має місце* [7] *мультиплікативна формула для півгруп у банаховому просторі X*

$$e^{t\tilde{L}} \leq \lim_{k \to \infty} \left(\prod_{i=1}^{p} e^{tA_i/k} e^{tB/k} \right)^k \tag{3}$$

у сенсі сильної збіжності в X рівномірно по $t \in [0, T]$, $T > 0$.

Введемо послідовність просторів $\mathcal{E}_\alpha^n$ гладких функцій на $M^{\mathbb{Z}^d}$, $C_{\text{cyl}}^\infty\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right) \subset \mathcal{E}_\alpha^n$, в термінах яких можна перевіряти умови теореми 1.

***Означення* 1.** *Зафіксуємо довільні $n \in \mathbb{N}$ і набір $\alpha = \{\alpha_i \in (0, 1) \colon i = 1, 2, \ldots, n\}$ такий, що $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Для $k \in \{0, \ldots, n\}$ введемо скінченну сім'ю квазінорм $\mathcal{P}_k(\alpha, n)$* на функціях *$u \in C_{\text{cyl}}^\infty\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$ таким чином:*

1) $\mathcal{P}_0(\alpha, n) = \left\{ \sup\limits_{x \in M^{\mathbb{Z}^d}} |u(x)| \right\}.$

2) $\mathcal{P}_1(\alpha, n) = \left\{ \sup\limits_{x \in M^{\mathbb{Z}^d}} \left(\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^d} p_k \left|\nabla_k u(x)\right|^2 \right)^{1/2} \right\}$

з фіксованою вагою $\{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ *такою, що* $1\le p_k<\infty$, *і існує стала* $M_0>0$ *така, що* $p_k\sim e^{|k|M_0}$, *коли* $|k|\to\infty$.

3) *Для фіксованого* $k\in\{2,\dots,n\}$ *нехай* θ *позначає деяку нумерацію скінченної множини* $\mathcal{P}_k(\alpha,n)$. *Тоді для будь-якої* $q_\theta\in\mathcal{P}_k(\alpha,n)$ *існує* $j(\theta)\in\in\{(k+1)/2,\dots,k\}$ *і вектор* $\left\{s_i(\theta)\in\{1,2\}\mid i=1,\dots,j(\theta)\right\}$ *такий, що* $\sum_{i=1}^{j(\theta)}s_i(\theta)=k$. *Крім того, існує розбиття* $\{\gamma_1(\theta),\dots,\gamma_j(\theta)\}$ *множини* $\{1,\dots,n\}$, *що задовольняє умови:* $\gamma_i\cap\gamma_l=\varnothing$, $i\ne l$, $\bigcup_{i=1}^{j(\theta)}\gamma_i(\theta)=\{1,\dots\dots,n\}$, $|\gamma_i(\theta)|\ge s_i(\theta)$.

Тоді квазінорма q_θ *допускає зображення*

$$q_\theta(u)=\sup_{x\in M^{\mathbb{Z}^d}}\left(\sum_{k_1,\dots,k_j\in\mathbb{Z}^d}p_{k_1}^{\beta_1}\dots p_{k_j}^{\beta_j}\left|T_{s_1}^{k_1}\dots T_{s_j}^{k_j}u\right|^2(x)\right)^{1/2},$$

де $\beta_i=\sum_{m\in\gamma_i}\alpha_m$ *і оператори* $T_\cdot^\cdot$ *визначені на циліндричних тензорних полях на* $M^{\mathbb{Z}^d}$ *співвідношеннями*

$$T_1^k u=\nabla_k u,\quad s=1;$$

$$T_2^k u=\nabla_k u,\quad s=2,$$

де через ∇_k і Δ_k *позначено коваріантну похідну на циліндричних тензорних полях на многовиді* M_k *і оператор Лапласа – Бельтрамі на тензорах на* M_k.

Покладемо

$$\mathcal{P}(\alpha,n)=\bigcup_{k=0}^{n}\mathcal{P}_k(\alpha,n).$$

Банахів простір $\mathcal{E}_\alpha^n$ введемо як поповнення $C_{\text{cyl}}^\infty\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$ у нормі

$$\|u\|_{n,\alpha}=\max\{q_\theta(u):\ q_\theta\in\mathcal{P}(\alpha,n)\}.$$

Важливим моментом у визначенні простору $\mathcal{E}_\alpha^n$ є відсутність факторизації $C_{\text{cyl}}^\infty\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$ за нормою $\|\cdot\|_{n,\alpha}$, тому що $\|\cdot\|_{n,\alpha}$, звужена на $C^\infty(M^\Lambda)$, еквівалентна стандартній рімановій нормі на просторі $C^n(M^\Lambda)$, $|\Lambda|<\infty$.

З наступної теореми випливає важливий результат для доведення істотної самоспряженості оператора H_μ з використанням підходу теореми 1.

Теорема 2. *Для довільних*

$$n\in\mathbb{N}\quad\left\{\alpha_i\in(0,1),\ i=1,\dots,n\ \middle|\ \sum_{i=1}^n\alpha_i=1\right\}$$

простір $\mathcal{E}_\alpha^n$ *є простором рівномірної по ґратці квазіакретивності сім'ї операторів*

$$\left\{H_\Lambda=\sum_{k\in\Lambda}H_{\mu,k},\ |\Lambda|\le\infty\right\}$$

у розумінні

$$\exists C_{n,\alpha} \quad \forall \Lambda \subset \mathbb{Z}^d, \ |\Lambda| \le \infty \quad \forall u \in C^\infty_{\text{cyl}}\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right), \tag{4}$$
$$\left\langle \left(H_\Lambda + C_{n,\alpha}\right) u, l_u \right\rangle_{\mathcal{E}^n_\alpha} \ge 0,$$

де через l_u позначено дотичний функціонал до u в $\mathcal{E}^n_\alpha$.

Крім того, послідовність просторів $\left\{\mathcal{E}^n_{\alpha_n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ може бути вибрана по $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$ таким чином, що для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ простір $\mathcal{E}^{n+2}_{\alpha_{n+2}}$ є неперервно і рівномірно по $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$, вкладений до $\mathcal{D}\left(\tilde{H}^n_\Lambda\right)$ з нормою графіку в $\mathcal{E}^n_{\alpha_n}$. Тут $\tilde{H}^n_\Lambda$ позначає замикання оператора H_Λ в просторі $\mathcal{E}^n_{\alpha_n}$, яке існує завдяки квазіакреативності.

З наявності квазіакреативності (4) і гладкої розв'язності задачі Коші (1) випливає істотна максимальна квазіакреативність операторів $H_{(i)}$ в кожному з просторів $\mathcal{E}^n_\alpha$. Тому замикання $\tilde{H}^n_{(i)}$ в $\mathcal{E}^n_\alpha$ породжує сильно неперервну півгрупу і задовольняє оцінку

$$\left\| \left(\lambda + \tilde{H}^n_{(i)}\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}\left(\mathcal{E}^n_\alpha\right)} \le \frac{1}{\lambda - C_{n,\alpha}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Оцінка (5) і теорема 2 дають можливість прямого застосування теореми 1, яке може бути сформульоване таким чином.

Теорема 3. *Оператор H_μ є істотно самоспряженим у просторі $L_2\left(M^{\mathbb{Z}^d}, \mu\right)$ з областю $C^\infty_{\text{cyl}}\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$ і його півгрупа зберігає будь-який з просторів $\mathcal{E}^n_\alpha$, $n \ge 0$.*

Доведення. З оцінок (5), теореми 2 і наслідку з теореми 1, застосованих до випадку $X = L_2\left(M^{\mathbb{Z}^d}, \mu\right)$, $Y = \mathcal{E}^n_\alpha$, а також до випадку $X = \mathcal{E}^n_{\alpha_n}$, $Y = \mathcal{E}^{n+4}_{\alpha_{n+4}}$, одержуємо мультиплікативні формули для відповідних півгруп (3):

$$e^{-t\widehat{\sum_{i \in \{0,1\}^d} \hat{H}_{(i)}}} \le L_2 - s.\lim_{k \to \infty} \left(\prod_{i \in \{0,1\}^d} e^{-(t/k)\hat{H}_{(i)}} \right)^k \tag{6}$$

у просторі $L_2\left(M^{\mathbb{Z}^d}, \mu\right)$ і аналогічно у просторі $\mathcal{E}^n_\alpha$:

$$e^{-t\widehat{\sum_{i \in \{0,1\}^d} \hat{H}^n_{(i)}}} = \mathcal{E}^n_\alpha - s.\lim_{k \to \infty} \left(\prod_{i \in \{0,1\}^d} e^{-(t/k)\hat{H}^n_{(i)}} \right)^k. \tag{7}$$

Наявність зображень (6) і (7) є принциповим моментом доведення істотної самоспряженості. Це дає можливість отримати властивості півгрупи оператора H_μ у термінах блочних операторів $H_{(i)}$, для яких має місце гладка розв'язність задачі Коші (1). Розглянемо довільну функцію $f \in C^\infty_{\text{cyl}}\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$. Формули (6), (7), гладка розв'язність задачі Коші (1) із збереженням циліндричності дають можливість написати низку рівностей:

$$e^{-t\widehat{\sum_{i \in \{0,1\}^d} \hat{H}_{(i)}}} f = L_2 - s.\lim_{k \to \infty} \left(\prod_{i \in \{0,1\}^d} e^{-(t/k)\hat{H}_{(i)}} \right)^k f =$$

$$= \mathcal{E}_\alpha^n - s.\lim_{k\to\infty}\left(\prod_{i\in\{0,1\}^d} e^{-(t/k)\hat{H}_{(i)}^n}\right)^k f = e^{-t\,\overline{\sum_{i\in\{0,1\}^d}\hat{H}_{(i)}^n}} f.$$

Використовуючи оцінку (2), з

$$L = \sum_{i\in\{0,1\}^d} \tilde{H}_{(i)}^n$$

маємо, що півгрупа оператора

$$\widehat{\sum_{i\in\{0,1\}^d} \hat{H}_{(i)}^n},$$

зберігає будь-який з просторів $\mathcal{E}_\alpha^n$. Оскільки

$$H_\mu = \widehat{\sum_{i\in\{0,1\}^d} \hat{H}_{(i)}^n} \restriction \mathcal{E}_\alpha^n, \quad n \geq 2,$$

маємо істотну самоспряженість H_μ у просторі $L_2\left(M^{\mathbb{Z}^d}, \mu\right)$ з істотною областю $\mathcal{E}_\alpha^n$, $n \geq 2$.

Твердження теореми 3 може бути перенесене на більш загальний випадок гіббсових мір на нескінченному добутку многовидів. Нехай $\{\Phi_A : A \subset \mathbb{Z}^d, |A| < \infty\}$ означає систему функцій, що задовольняють наступні умови:

1) функція Φ_A є вимірною відносно борелевої σ-алгебри $\mathcal{B}\left(\underset{k\in A}{\times} M_k\right)$; $\Phi_A \in C^\infty\left(\underset{k\in A}{\times} M_k\right)$;

2) скінченний радіус взаємодії:

$$\exists\, r_0 > 0 :\ \forall A \subset \mathbb{Z}^d :\quad \Phi_A \not\equiv 0, \quad \mathrm{diam} A \leq r_0;$$

3) трансляційна інваріантність:

$$\forall A \subset \mathbb{Z}^d, \quad k \in \mathbb{Z}^d \quad \Phi_{\theta_k A} = \theta_k \Phi_A,$$

де θ_k — зсув на вектор $k \in \mathbb{Z}^d$.

Розглянемо сім'ю гіббсових розподілів у скінченних об'ємах $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$:

$$d\mu_\Lambda(x_\Lambda \mid y_{\Lambda^c}) \leq \frac{\exp\left\{-\sum_{A\cap\Lambda\neq\varnothing} \Phi_A(z)\right\}}{\int_{M^\Lambda} \exp\left\{-\sum_{A\cap\Lambda\neq\varnothing} \Phi_A(z)\right\} \underset{k\in\Lambda}{\times} d\sigma(x_k)} \underset{k\in\Lambda}{\times} d\sigma(x_k),$$

де $z = (x_\Lambda, y_{\Lambda^c})$, $\Lambda^c \subset \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda$, $M^\Lambda = \underset{k\in\Lambda}{\times} M_k$.

Означення 2 [8]. *Імовірнісна міра* μ *на тихоновій* σ*-алгебрі на* $M^{\mathbb{Z}^d}$ *називається гіббсовою з локальними специфікаціями* $\{\mu_\Lambda \mid \Lambda \subset \mathbb{Z}^d, |\Lambda| < \infty\}$ *тоді і лише тоді, коли для довільної* $f \in C_{\mathrm{cyl}}\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$ *виконано*

$$\mu\left(\int_{M^\Lambda} f(x_\Lambda|\cdot)d\mu_\Lambda(x_\Lambda|\cdot)\right) = \mu(f),$$

де $\mu(f) = \int f d\mu$.

Введемо позначення $\mu \in \mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$ для гіббсової міри з локальними специфікаціями $\{\mu_\Lambda\}$. Наступна теорема дає характеризацію гіббсових мір $\mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$ в термінах формули інтегрування частинами [9]. Доведення цієї теореми проводилось за схемою роботи [10].

Теорема 4. *Імовірнісна міра* μ *належить до* $\mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$ *тоді і тільки тоді, коли наступна формула інтегрування частинами має місце*:

$$\int_{M^{\mathbb{Z}^d}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle h_k, \nabla_k u\rangle d\mu = \int_{M^{\mathbb{Z}^d}} u \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left(\left\langle h_k, \nabla_k V_k\right\rangle - \operatorname{div}_k h_k\right) d\mu, \tag{8}$$

де

$$V_k = \sum_{A:\, k\in A} \Phi_A, \tag{9}$$

на будь-яких $u \in C^1_{\text{cyl}}\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$, $h_k \in C^1_{\text{cyl}}\left(M^{\mathbb{Z}^d}, TM_k\right)$ (*циліндричне векторне поле на* M_k).

Таким чином, формула (8) може мати місце тільки для гіббсової міри із специфікаціями $\{\mu_\Lambda\}$, побудованими за Φ_A. Зауважимо, що при умовах $1-3$ на Φ_A множина гіббсових мір є непорожньою і утворює скінченновимірний опуклий компакт [11].

Розглянемо сім'ю диференційних операторів H_Q, $Q \subset \mathbb{Z}^d$, $|Q| \le \infty$, заданих на $C^\infty_{\text{cyl}}\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$:

$$H_Q = \sum_{k\in Q}\left\{-\frac{1}{2}\Delta_k + \frac{1}{2}\langle\nabla_k V_k, \nabla_k\cdot\rangle\right\}. \tag{10}$$

Наслідком теореми 4 є таке твердження.

Теорема 5. *Кожен з операторів* $\{H_Q, |Q| \le \infty\}$ *є ермітовим у просторі* $L_2\left(M^{\mathbb{Z}^d}, \nu\right)$ *відносно деякої імовірнісної міри* ν *тоді і лише тоді, коли* $\nu \in$ $\in \mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$.

Важливим питанням є умови істотної самоспряженості операторів H_Q у будь-якому з просторів $L_2\left(M^{\mathbb{Z}^d}, \nu\right)$, $\nu \in \mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$.

Теорема 6. *Нехай потенціали* Φ_A *задовольняют умови* $1-3$. *Тоді кожен з операторів* H_Q, $|Q| \le \infty$, *є істотно самоспряженим у кожному з просторів* $L_2\left(M^{\mathbb{Z}^d}, \mu\right)$, *де* $\mu \in \mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$, *з істотною областю* $C^\infty_{\text{cyl}}\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$. *Більш того, відповідні півгрупи зберігають простори* $\mathcal{E}^n_\alpha$, $n \ge 0$, *і співпадають на них.*

Доведення спирається на гладку розв'язність задачі Коші (1) і теорему 2, яка справедлива і в цьому випадку. Це дає можливість застосувати схему доведення теореми 3 для кожної з мір $\nu \in \mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$.

Наслідок. *Для кожної міри* $\nu \in \mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$ *оператор Діріхле* $H_\nu = H_Q$, $Q = \mathbb{Z}^d$, *міри* ν *є істотно самоспряженим у просторі* $L_2\left(M^{\mathbb{Z}^d}, \nu\right)$.

Зауваження. З доведення теореми 3 зрозуміло, що оператор H_μ є в істотному максимально квазіакреативним у просторі $\mathcal{E}^0 = C_b\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$ з областю $C^\infty_{\text{cyl}}\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$ і породжує сильно неперервну півгрупу T_t в $C_b\left(M^{\mathbb{Z}^d}\right)$. Це може бути проінтерпретовано як єдиність стохастичної динаміки

$$d\xi_t^k = -\frac{1}{2}(\nabla_k V_k)(\xi_t)\,dt + dw_k;$$

$$\xi_0^k = x_k$$

при не обов'язково малих коефіцієнтах зсуву $\{\nabla_k V_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$. Зауважимо, що це не суперечить можливій неєдиності гіббсової міри $\mu\in\mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$, тому що для будь-якої $\mu\in\mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$ півгрупа оператора H_μ у просторі $L_2\left(M^{\mathbb{Z}^d},\mu\right)$ і півгрупа T_t співпадають на $\mathcal{E}^n_\alpha$, $n\geq 0$.

1. *Deuschel J.-D., Stroock D. W.* Hypercontractivity and spectral gap of symmetric diffusions with applications to the stochastic Ising models // J. Funct. Anal. – 1990. – **92**. – P. 30 – 48.
2. *Holley R., Stroock D.* Logarithmic Sobolev inequalities and stochastic Ising models // J. Stat. Phys. – 1987. – **46**, № 5 / 6. – P. 1159 – 1194.
3. *Stroock D., Zegarlinski B.* The logarithmic Sobolev inequality for continuous spin systems on a lattice // Prepr. BiBoS. – 1991.
4. *Gross L.* Decay of correlations in classical lattice models at high temperature // Comm. Math. Phys. – 1979. – **68**, № 1. – P. 9 – 28.
5. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4-х т. – М.: Мир, 1978. – Т. 2. – 396 с.
6. *Da Prato G., Grisvard P.* Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles // J. Math. Pures et Appl. – 1975. – **54**. – P. 305 – 387.
7. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. – Киев: Вища шк., 1989. – 338 с.
8. *Добрушин Р. Л.* Задача единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов // Функцион. анализ и его прил. – 1968. – **2**, № 4. – С. 44 – 57.
9. *Antonjuk A. Val., Antonjuk A. Vict.* Gibbs measures on the infinite product of manifolds and Hermitian realizations of formal Hamiltonians // Methods of functional analysis in problems of mathematical physics. – Kiev: In-t Math. Acad. Sci. of Ukraine, 1992. – P. 36 – 46.
10. *Roelly S., Zessin H.* A characterization of Gibbs measures on $C[0,1]^{\mathbb{Z}^d}$ by the stochastic calculus of variations // Prepr. BiBoS. – 1991, № 488.
11. *Preston C.* Random fields // Lect. Notes Math. – 1976. – 534 p.

Одержано 13.02.93