УДК 512.552.7

А. Б. Коновалов, асп. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О КЛАССЕ НИЛЬПОТЕНТНОСТИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ГРУППЫ МОДУЛЯРНОЙ ГРУППОВОЙ АЛГЕБРЫ 2-ГРУППЫ ДИЭДРА

It is proved that the wreath product of a group of order 2 and the commutant of a dihedron group is imbedded into the multiplicative group of the group algebra of the dihedron of order 2^n. This implies that the nilpotency class of the multiplicative group is equal to 2^{n-2}, i.e., to the order of the commutant of the dihedron group.

Доведено, що в мультиплікативну групу модулярної групової алгебри групи діедра порядку 2^n вкладено вінцевий добуток групи порядку 2 та комутанта групи діедра. З цього виходить, що клас нільпотентності мультиплікативної групи дорівнює 2^{n-2}, тобто порядку комутанта групи діедра.

Пусть p — простое число, G — конечная p-группа, K — поле характеристики p. Обозначим через $\Delta = \Delta_K(G)$ фундаментальный идеал модулярной групповой алгебры KG. Нормированная группа обратимых элементов KG состоит из элементов вида $1 + x$, где $x \in \Delta$, и обозначается $U(G) = U(KG)$. Далее будут использоваться обозначения, принятые в работе [1].

В [1] ставится вопрос о том, всегда ли сплетение $C_p \operatorname{wr} G'$, где C_p — циклическая группа порядка p, вложено в $U(KG)$. Эта проблема связана с определением класса нильпотентности $\operatorname{cl} U(G)$ группы $U(G)$. Как известно [2], для p-группы H класс нильпотентности сплетения $C_p \operatorname{wr} H$ равен $t(H)$ — индексу нильпотентности фундаментального идеала групповой алгебры KH, и тогда $\operatorname{cl} U(G) \geq t(G')$, если такое вложение существует.

В [3] был дан положительный ответ на этот вопрос для случая, когда $p > 2$, а коммутант группы G — циклическая подгруппа. В данной статье эта гипотеза подтверждается для группы диэдра порядка 2^n. Доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть K — поле характеристики 2, G — группа диэдра порядка 2^n. Тогда сплетение $C_2 \operatorname{wr} G'$ вложено в $U(KG)$.*

Эта теорема дает возможность определить класс нильпотентности группы $U(KG)$ для группы диэдра G порядка 2^n. Так как для циклической группы H $t(H) = |H|$ [4], а коммутант группы G — циклическая подгруппа порядка 2^{n-2}, то $\operatorname{cl} U(G) \geq |G'|$. С другой стороны, $\operatorname{cl} U(G) \leq |G'|$ по [5]. Тогда справедливо такое следствие.

Следствие 1. *Пусть K — поле характеристики 2, G — группа диэдра порядка 2^n. Тогда $\operatorname{cl} U(G) = |G'| = 2^{n-2}$.*

Это следствие подтверждает гипотезу о том, что для групп с циклическим коммутантом класс нильпотентности группы $U(G)$ равен порядку коммутанта группы G, ранее проверенную для $p > 2$ [1] и проверенную Сэндлингом с помощью компьютера для 2-групп порядка не выше 16 [6].

В групповой алгебре KG определим идеалы $KG^{(n)}$ и $KG^{[n]}$ следующим образом: $KG^{[n]}$ — двусторонний идеал, порожденный всеми (левонормированными) лиевскими коммутаторами $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, в то время как $KG^{(n)}$ определяются индуктивным образом: $KG^{(1)} = KG$, $KG^{(n+1)}$ — идеал, порожденный лиевскими коммутаторами $[a, b]$, где $a \in KG^{(n)}$, $b \in KG$. Очевидно, что $KG^{(n)} \geq KG^{[n]}$, причем не обязательно равенство выполняется. Однако известно, что для произвольных групповых алгебр из равенства нулю $KG^{[n]}$ для некоторого n следует равенство нулю $KG^{(m)}$ для некоторого m [1]. Также известно, что для модулярных групповых алгебр конечных p-групп $KG^{[k+1]} = 0$ для $k = |G'|$ [7]. Поэтому в рассматриваемом случае определены конечные верхний и нижний лиевские индексы нильпотентности KG:

$$t_L(G) = \min\{n: KG^{[n]} = 0\}, \quad t^L(G) = \min\{n: KG^{(n)} = 0\}.$$

Следующее следствие касается лиевских индексов нильпотентности и экспоненты группы $U(KG)$. В [8] доказано, что для произвольных групповых алгебр над полем характеристики $p > 3$ индексы нильпотентности совпадают. Это же имеет место и в рассматриваемом случае.

Следствие 2. *Пусть K — поле характеристики 2, G — группа диэдра порядка 2^n. Тогда $t_L(G) = t^L(G)$ и $\exp U(KG) = \exp G = 2^{n-1}$.*

Доказательство. Равенство $t_L(G) = t^L(G)$ вытекает из следствия 2 и цепочки $\operatorname{cl} U(G) = t_L(G) - 1 \leq t^L(G) - 1 \leq |G'|$.

Второе равенство следует из теоремы о равенстве экспонент групп G и $U(KG)$, если $t^L(G) \leq 1 + (p-1)p^{e-1}$, где $\exp G = p^e$ [7].

Примечание. До недавнего времени было известно, что $\operatorname{cl} U(G) \leq t_L(G) - 1$. В силу результатов из [9, 10] здесь имеет место равенство. Это доказывает первую из двух гипотез о классе нильпотентности $\operatorname{cl} U(G)$, изложенных в [1], и опровергает вторую из них.

Некоторые факты о группе $U(KG)$. Далее будем считать, что поле K состоит из двух элементов, так как в случае произвольного поля характеристики 2 можно рассмотреть его простое подполе и соответствующую подалгебру в KG.

Элементы нормированной мультипликативной группы $U(KG)$ имеют вид $1 + x$, где x принадлежит фундаментальному идеалу Δ, который характеризуется тем, что

$$x = \sum_{g \in G} a_g \circ g \in \Delta \Leftrightarrow \sum_{g \in G} a_g = 0.$$

Отсюда носитель элемента $1 + x$ должен иметь нечетный порядок, так как поле состоит из двух элементов. (Носителем элемента $S \in KG$ называется множество $\operatorname{Supp} S = \{g \in G: a_g \neq 0\}$, где $S = \sum_{g \in G} a_g \circ g$.)

Таким образом,

$$S \in U(KG) \Leftrightarrow |\operatorname{Supp} S| = 2k - 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Каждый элемент группы G имеет вид a^k либо $a^k b$, где $1 \leq k < 2^{n-1}$ (условимся считать канонической запись в форме $a^i b^j$). Сгруппировав соответствующим образом слагаемые, каждый элемент из KG можно записать в виде $S = f_1 + f_2 b$, где

$$f_1 = a^{i_1} + a^{i_2} + \ldots + a^{i_m}, \quad f_2 = a^{j_1} + a^{j_2} + \ldots + a^{j_k}.$$

Элементы f_1 и f_2 будем называть компонентами элемента S. Очевидно, что $f_1+f_2b = h_1+h_2b \Leftrightarrow f_i = h_i$, $i = 1, 2$.

Пусть $x = a^{i_1}+a^{i_2}+\ldots+a^{i_m}$. Так как $b^{-1}ab = a^{-1}$, то

$$(a^{i_1}+a^{i_2}+\ldots+a^{i_m})b = b(a^{-i_1}+a^{-i_2}+\ldots+a^{-i_m}).$$

Будем обозначать с помощью $\bar{x}$ элемент $a^{-i_1}+a^{-i_2}+\ldots+a^{-i_m}$. Тогда $b^{-1}xb = \bar{x}$. Мы получаем автоморфизм групповой алгебры $K\langle a\rangle$. Его мы назовем сопряжением. (Далее при упоминании сопряжения будет ясно из контекста, идет ли речь об этом автоморфизме или о групповом сопряжении.)

Распространим сопряжение на всю групповую алгебру KG следующим образом: если $z = f_1+f_2b$, то $\bar{z} = \bar{f}_1+\bar{f}_2b$. Тогда оно также является автоморфизмом, и

$$b^{-1}zb = b^{-1}(f_1+f_2b)b = b^{-1}f_1b + b^{-1}f_2 = \bar{f}_1 + \bar{f}_2b = \bar{z}.$$

Лемма 1. *Элемент $z \in KG$ коммутирует с $b \in G$ тогда и только тогда, когда z самосопряжен, т. е. $zb = bz \Leftrightarrow z = \bar{z}$.*

Доказательство очевидно.

Выведем формулу для нахождения обратного элемента.

Лемма 2. *Пусть элемент $T \in U(KG)$ имеет вид $T = f_1+f_2b$. Тогда $T^{-1} = h_1+h_2b$, где $h_1 = \bar{f}_1R^{-1}$, $h_2 = f_2R^{-1}$, $R = f_1\bar{f}_1+f_2\bar{f}_2$.*

Доказательство. В указанных выше обозначениях выполняется равенство $(f_1+f_2b)(h_1+h_2b) = 1$. Раскрывая скобки, получаем

$$f_1h_1+f_2\bar{h}_2 = 1, \quad f_2\bar{h}_1+f_1h_2 = 0.$$

Рассмотрим два случая. Так как элемент T имеет нечетную длину, то одна из компонент имеет нечетную длину и обратима.

Случай 1. Обратим элемент f_1. Из второго уравнения имеем $f_2\bar{h}_1 = f_1h_2$, откуда $h_2 = f_1^{-1}f_2\bar{h}_1$ и $\bar{h}_2 = \bar{f}_1^{-1}\bar{f}_2h_1$. Подставляя в первое уравнение, получаем $f_1h_1+f_2\bar{f}_1^{-1}\bar{f}_2h_1 = 1$. Отсюда $\bar{f}_1^{-1}(f_1\bar{f}_1+f_2\bar{f}_2)h_1 = 1$.

Покажем, что $R = f_1\bar{f}_1+f_2\bar{f}_2$ обратим. Действительно, так как f_1 обратим, то обратимы $\bar{f}_1$ и их произведение; f_2 и $\bar{f}_2$ имеют четную длину, следовательно, их произведение также имеет четную длину, и R имеет нечетную длину.

Тогда $\bar{f}_1^{-1}Rh_1 = 1$ и $h_1 = \bar{f}_1R^{-1}$. Поскольку $R = \bar{R}$, то $h_2 = f_1^{-1}f_2\bar{h}_1 = f_2R^{-1}$. В этом случае лемма доказана.

Случай 2. Обратим элемент f_2. Из второго уравнения имеем $h_1 = \bar{f}_1\bar{f}_2^{-1}\bar{h}_2$. Дальнейшее доказательство аналогично.

Заметим, что ту же формулу мы получим, если будем искать не правый, а левый обратный элемент.

С помощью леммы 5 получим формулу для элемента $y^{-1}xy$, где $x, y \in U(KG)$ и $x = \bar{x}$, которая понадобится ниже.

Лемма 3. *Пусть $x = h_1+h_2b$, $x = \bar{x}$, $y = f_1+f_2b$, $R^{-1} = S$, где $R = f_1\bar{f}_1+f_2\bar{f}_2$ и $S = \bar{S}$.* Тогда $y^{-1}xy = t_1+t_2b$, где

$$t_1 = h_1+h_2(f_1f_2+\bar{f}_1\bar{f}_2)S, \quad t_2 = h_2(\bar{f}_1^2+f_2^2)S.$$

Доказательство. В обозначениях леммы

$$y^{-1}xy = t_1 + t_2 b = (\bar f_1 S + f_2 S b)(h_1 + h_2 b)(f_1 + f_2 b) =$$

$$= (\bar f_1 S + f_2 S b)\circ[(h_1 f_1 + h_2 \bar f_2) + (h_1 f_2 + h_2 \bar f_1)b].$$

Первая компонента после упрощения с учетом того, что $h_i = \bar h_i$, равна $h_2(f_1 f_2 + \bar f_1 \bar f_2)S + h_1(f_1 \bar f_1 + f_2 \bar f_2)S$, и так как $R = S^{-1}$, то $t_1 = h_1 + h_2(f_1 f_2 + \bar f_1 \bar f_2)S$. Вторая компонента вычисляется аналогично.

Очевидно, что $t_1 = \bar t_1$. В общем случае $t_2 \neq \bar t_2$, однако они становятся равными при наложении на $y = f_1 + f_2 b$ дополнительного условия $f_1 + f_2 = 1$. Множество элементов группы $U(KG)$, имеющих вид $f_1 + f_2 b$, где $f_1 + f_2 = 1$, обозначим через $H(KG)$.

Лемма 4. $H(KG)$ — *подгруппа группы* $U(KG)$.

Доказательство. Единичный элемент принадлежит $H(KG)$. Пусть $x = f_1 + f_2 b$, $y = h_1 + h_2 b$ — элементы $H(KG)$,

$$xy = (f_1 h_1 + f_2 \bar h_2) + (f_1 h_2 + f_2 \bar h_1)b.$$

Непосредственно проверяется, что сумма компонент xy равна единице.

Пусть $y = f_1 + f_2 b$, $y^{-1} = \bar f_1 R^{-1} + f_2 R^{-1} b$. Сумма компонент y^{-1} равна

$$\bar f_1 R^{-1} + f_2 R^{-1} = (\bar f_1 + f_2)R^{-1} = (1 + f_1 + \bar f_1)(f_1 \bar f_1 + f_2 \bar f_2)^{-1} =$$

$$= (1 + f_1 + \bar f_1)(f_1 \bar f_1 + (1 + f_1)(1 + \bar f_1))^{-1} =$$

$$= (1 + f_1 + \bar f_1)(1 + f_1 + \bar f_1)^{-1} = 1.$$

Лемма доказана.

Определим отображение φ на подгруппе $H(KG)$ следующим образом: $\varphi(f_1 + f_2 b) = f_1 \bar f_1 + f_2 \bar f_2$. Ясно, что образ этого отображения лежит в централизаторе элемента b в группе $U(K\langle a\rangle)$. Так как $f_1 + f_2 = 1$, то

$$\varphi(f_1 + (1 + f_1)b) = f_1 \bar f_1 + (1 + f_1)(1 + \bar f_1) = 1 + f_1 + \bar f_1.$$

Кроме того, указанное отображение φ — гомоморфизм.

Лемма 5. *Ядро* $\operatorname{Ker}\varphi$ *совпадает с централизатором* $C_H(b)$ *элемента* b *в подгруппе* $H(KG)$.

Доказательство. Покажем, что $C_H(b) \subset \operatorname{Ker}\varphi$. Пусть $f_1 + f_2 b \in C_H(b)$. Тогда $f_1 + f_2 = 1$ и $f_i = \bar f_i$, поэтому

$$\varphi(x) = f_1 \bar f_1 + f_2 \bar f_2 = 1 + f_1 + \bar f_1 = 1.$$

Докажем обратное включение. Пусть

$$\varphi(x) = 1 = f_1 \bar f_1 + f_2 \bar f_2 = 1 + f_1 + \bar f_1,$$

тогда $f_1 = \bar f_1$ и $x \in C_H(b)$, что и требовалось доказать.

Отображение φ будем называть нормой.

Из леммы 8 следует, что $x \in H(KG)$ коммутирует с b тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = 1$.

Лемма 6. $C_H(b)$ — *элементарная абелева группа.*

Доказательство. Пусть

$$x = f_1 + f_2 b, \;\; y = h_1 + h_2 b, \;\; f_i = \bar{f}_i, \;\; h_i = \bar{h}_i, \;\; i = 1, 2,$$

$$f_1 + f_2 = h_1 + h_2 = 1.$$

Равенство $xy = yx$ проверяется непосредственно. Далее,

$$x^2 = (f_1^2 + f_2^2) + (f_1 f_2 + f_1 f_2) b = f_1^2 + f_2^2 = 1 + f_1^2 + f_2^2 = 1,$$

и лемма доказана.

Доказательство основной теоремы. Пусть группа диэдра порядка 2^n задана следующим образом:

$$G = \left\langle a, b \mid a^{2^{n-1}} = b^2 = 1, \; b^{-1} a b = a^{-1} \right\rangle.$$

Для доказательства того, что сплетение $C_2 \operatorname{wr} G'$ вложено в $U(KG)$, рассмотрим подгруппу в $H(KG)$, порожденную элементами $b \in G$ и $A = a + (1 + a) b$.

Сначала вычислим норму элемента A: $\varphi(A) = 1 + a + a^{-1}$. Поскольку $a^{2^{n-1}} = 1$, то $\varphi(A)^{2^{n-2}} = 1$. Поскольку φ — гомоморфизм, то $\varphi((A)^{2^{n-2}}) = 1$ и $A^{2^{n-2}}$ коммутирует с элементом b. Согласно лемме 6 $(A^{2^{n-2}})^2 = A^{2^{n-1}} = 1$, так как $A^{2^{n-2}} \in C_H(b)$.

Как видно из следующей леммы, степени A^k, где $k \leq 2^{n-2}$, имеют норму, отличную от единицы, и поэтому не коммутируют с b.

Лемма 7. *Пусть* $R = 1 + a + a^{-1}$, $1 \leq k < 2^{n-2}$. *Тогда* R^k *имеет вид* $1 + x + \bar{x}$, *где* $x = a^{i_1} + a^{i_2} + \ldots + a^{i_j}$. Обозначим

$$\deg R = \max \{ i_n | 0 \leq i_n < 2^{n-2} \}.$$

Тогда $\deg R^k = k$.

Доказательство. $R \in C_{U(K\langle a \rangle)} b$. Так как его степени коммутируют с b, то они должны иметь следующий вид: $t + x + \bar{x}$, где $t = \bar{t}$ и равно либо 1, либо $a^{2^{n-1}} \in Z(G)$, так как R^k имеет нечетную длину, а $x + \bar{x}$ — четную. Далее, $R^k = 1 + a^2 + a^{-2}$. Пусть теперь $R^k = 1 + x + \bar{x}$, $\deg R^k = k$, где $k \leq 2^{n-2} - 2$. Тогда

$$R^{k+1} = (1 + x + \bar{x})(1 + a + a^{-1}) =$$

$$= 1 + a + a^{-1} + x + \bar{x} + x a^{-1} + \bar{x} a + x a + \bar{x} a^{-1} = 1 + x_1 + \bar{x}_1.$$

Без ограничения общности рассуждений можно считать, что в $x = a^{i_1} + a^{i_2} + \ldots + a^{i_j}$ все показатели $i_k \leq 2^{n-2} - 2$, а степени с показателем, большим, чем 2^{n-2}, содержатся в $\bar{x}$. Тогда, очевидно, что $\deg R^{k+1} = k + 1$ и $t = 1$, и лемма доказана.

Из леммы 7 также следует, что A имеет порядок не меньше, чем 2^{n-2}. Таким образом, порядок A равен либо 2^{n-2}, либо 2^{n-1}. Расчеты, проведенные для групп порядка не выше 32, показали, что порядок равен 2^{n-1}. Для доказательства вложения сплетения нам будет достаточно даже этой информации.

Так как $A^{2^{n-2}} \in C_H(b)$, и для $k \le 2^{n-2}$ $A^k \notin C_H(b)$, то отсюда следует, что элементы $b, b^A, \ldots, b^{A^{2^{n-2}-1}}$ попарно различны. Оказывается, что они коммутируют друг с другом.

Лемма 8. $\left\langle b, b^A, \ldots, b^{A^{2^{n-2}-1}} \right\rangle$ *— элементарная абелева группа.*

Доказательство. Из леммы 3 следует, что все b^{A^k} являются самосопряженными элементами, так как $A \in H(KG)$, и $b = \bar{b}$. Из доказательства леммы 6 следует, что самосопряженные элементы группы $U(KG)$ коммутируют между собой. Далее, так как $b^2 = 1$, то $\left(b^{A^k}\right)^2 = 1$ для произвольного k, и лемма доказана.

Следующая лемма устанавливает связь между степенями R и элементами b^{A^k}.

Лемма 9. *Пусть*

$$A = a + (1+a)b \in H(KG), \quad R = \varphi(a) = 1 + a + a^{-1}.$$

Тогда

$$b^{A^k} = (1+R^k) + R^k b, \quad k = 1, 2, \ldots, 2^{n-2}.$$

Доказательство. Пусть $x = h_1 + h_2 b$, $h_1 + h_2 = 1$, $x = \bar{x}$. Тогда согласно лемме 3 для $y^{-1}xy$ при $f_1 = a$, $f_2 = 1 + a$ $A^{-1}(h_1 + h_2 b)A = t_1 + t_2 b$, где

$$t_1 = h_1 + h_2(a + a^2 + a^{-1} + a^{-2})(1 + a + a^{-1})^{-1} =$$

$$= h_1 + h_2(1 + a + a^{-1} + 1 + a^2 + a^{-2})(1 + a + a^{-1})^{-1} =$$

$$= h_1 + h_2(1+R) = 1 + h_2 R,$$

$$t_2 = h_2(1 + a^2 + a^{-2})(1 + a + a^{-1})^{-1} = h_2 R.$$

Таким образом, $A^{-1}(h_1 + h_2 b)A = 1 + h_2 R + h_2 R b$. Для $b \in G$ $h_1 = 0$, $h_2 = 1$. Поэтому $b^A = (1+R) + Rb$. Пусть теперь $b^{A^k} = (1+R^k) + R^k b$. Тогда $h_1 = 1 + R^k$, $h_2 = R^k$ и $b^{A^{k+1}} = (1 + R^{k+1}) + R^{k+1} b$, что и требовалось доказать.

Последняя из лемм необходима для построения сплетения.

Лемма 10. *Имеет место следующее прямое разложение*:

$$\left\langle b, b^A, \ldots, b^{A^{2^{n-2}-1}} \right\rangle = \langle b \rangle \times \langle b^A \rangle \times \ldots \times \left\langle b^{A^{2^{n-2}-1}} \right\rangle.$$

Доказательство. Требуется проверить, что произведение вида $(b)^1 \times \times (b^A)^2 \ldots (b^A)^{k+1}$, где $k = 2^{n-2} - 1$ и не все i_n равны нулю, не равно единичному элементу. Поскольку умножение на b только переставляет компоненты $((h_1 + h_2 b)b = h_2 + h_1 b)$, достаточно убедиться в том, что произведение элементов вида b^{A^j}, где $j = 0$, не может быть равно 1 или b.

Заметим, что $b^A \in H(KG) \cap C_{U(KG)}(b)$ и имеет вид $x = h_1 + h_2 b$, где $h_1 + h_2 = 1$ и $x = \bar{x}$. Произведение элементов такого вида вычисляется посредством сложения их компонент:

$$(f_1+f_2b)(h_1+h_2b) = (f_1h_1+f_2h_2) + (f_1h_2+f_2h_1)b =$$
$$= (f_1h_1 + (1+f_1)(1+h_1)) + (f_1(1+h_1) + (1+f_1)h_1)b =$$
$$= (1+f_1+h_1)(f_1+h_1)b.$$

Аналогично вычисляется произведение большего числа элементов b^{A^j}. Компоненты этого произведения будут различаться на единицу и с учетом леммы 9 иметь вид $R^{i_1}+R^{i_2}+\ldots+R^{i_k}$ или $1+R^{i_1}+R^{i_2}+\ldots+R^{i_k}$, где $i_1 < i_2 < \ldots$ $\ldots < i_k$. Далее, $\operatorname{Supp}(R^{i_1}+R^{i_2}+\ldots+R^{i_k}) \neq \varnothing$, так как согласно лемме 7 ему принадлежат a^{i_k}. Поэтому мы не можем получить 1 или b в результате умножения элементов b^{A^j}, и лемма доказана.

Теперь мы можем завершить доказательство основной теоремы. Итак, в группе $U(KG)$ содержится полупрямое произведение F групп

$$\langle b\rangle \times \langle b^A\rangle \times \ldots \times \left\langle b^{A^{2^{n-2}-1}}\right\rangle$$

и $\langle A\rangle$. Как отмечалось выше, порядок элемента A — либо 2^{n-2}, либо 2^{n-1}. В первом случае F и есть искомое сплетение: $F = \langle b\rangle \operatorname{wr}(A) \cong C_2 \operatorname{wr} G'$. Во втором получаем требуемое, факторизуя по $D = \left\langle A^{2^{n-2}}\right\rangle$. Тогда $F/D \cong$ $\cong C_2 \operatorname{wr} G'$, и теорема доказана.

1. *Shalev A.* On some conjectures concerning units in p-group algebras. Proceedings of the Second International Group Theory Conference (Bressanone, 1989) // Rend. Circ. mat. Palermo. – 1990. – № 23. – P. 279 – 288.
2. *Buckley J. T.* Polynomial functions and wreath products // Ill. J. Math. – 1970. – № 14. – P. 274 – 282.
3. *Shalev A.* The nilpotency class of the unit group of a modular group algebra. I // Isr. J. Math. – 1990. – **70**, № 3. – P. 257 – 266.
4. *Shalev A.* Dimension subgroups, nilpotency indices, and the number of generators of ideals in p-group algebras // J. Algebra. – 1990. – № 129. – P. 412 – 438.
5. *Sharma R. K., Bist V.* A note on Lie nilpotent group rings // Bull. Austral. Math. Soc. – 1992. – **45**, № 3. – P. 503 – 506.
6. *Sandling A.* Presentations for unit group of modular group algebras of groups of order 16 // Math. Comp. – 1992. – **59**, № 200. – P. 689 – 701.
7. *Shalev A.* Lie dimension subgroups, Lie nilpotency indices, and the exponent of the group of normalized units // J. London Math. Soc. – 1991. – **2**, № 43. – P. 23 – 36.
8. *Bhandari A. K., Passi I. B. S.* Lie nilpotency indices of group algebras // Bull. London. Math. Soc. – 1992. – **24**, № 1. – P. 68 – 70.
9. *Shalev A.* The nilpotency class of the unit group of a modular group algebra. III // Arch. Math. (Basel). – 1993. – № 60. – P. 136 – 145.
10. *Du X.* The centers of radical ring // Can. Math. Bull. – 1992. – № 35. – P. 174 – 179.

Получено 15.09.93