УДК 517.9

О. В. Капустян (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

АТРАКТОР НАПІВПОТОКУ, ЩО ПОРОДЖУЄТЬСЯ СИСТЕМОЮ ФАЗОВО-ПОЛЬОВИХ РІВНЯНЬ БЕЗ ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ

We prove the existence of a global compact attractor for multivalued semiflow generated by a system of phase-field equations with conditions on nonlinearity which do not guarantee the uniqueness of solution.

Доводиться існування глобального компактного атрактора для багатозначного напівпотоку, що породжується системою фазово-польових рівнянь з умовами на нелінійність, які не забезпечують єдиність розв'язку.

Розглядається задача

$$\begin{gathered}\tau\varphi_t - \xi^2\Delta\varphi + f(x,\varphi) = 2u + h_1(x),\\ u_t + l/2\varphi_t = k\Delta u + h_2(x), \quad x\in\Omega, \quad t\in R_+,\\ \varphi\big|_{\partial\Omega} = u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t\in R_+,\\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x\in\Omega, \quad \tau,\xi,l,k\in R_+, \quad \dim\Omega = 3.\end{gathered} \tag{1}$$

При цьому Ω — обмежена регулярна область і виконані обмеження:

1) $h_i \in L_2(\Omega)$, $i=1,2$, $\{\varphi_0, u_0\} \in H_0^1(\Omega)$;

2) для кожного $s\in R$ $f(\cdot, s): \Omega\to R$ — вимірна, для м. в. $x\in\Omega$ $f(x,\cdot): R\to R$ — неперервна;

3) $\exists\, C_i > 0$, $i=1,2$ при $s\in R$, для м. в. $x\in\Omega$:

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,r)\,dr \ge -C_1; \quad f(x,s)s - F(x,s) \ge -C_2;$$

4) $\exists\, A_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, $\exists\, g\in L_2(\Omega)$, $g>0$, такі, що для кожного $s\in R$ для м. в. $x\in\Omega$:

$$|f(x,s)| \le g(x) + \sum_{i=1}^{3} A_i |s|^i.$$

Теорема 1. *При виконанні умов* $1-4$ *задача* (1) *для довільного* $T>0$ *має на* $Q_T = [0,T]\times\Omega$ *узагальнений розв'язок* $\{\varphi, u\}$, *причому він є глобальним, належить до простору* $C\big(R_+; H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\big)$ *і для нього має місце оцінка*

$$\xi^2/2\|\varphi_x\|^2 + 2\tau k/l^2\|u_x\|^2 \le L + \left(K_0 + K_1\left\|\varphi_{0_x}\right\|^2 + K_2\left\|u_{0_x}\right\|^2\right)e^{-\delta t}, \tag{2}$$

де K_i, $i=0,1,2$, L, δ *— додатні числа, що залежать лише від констант задачі.*

Доведення грунтується на оцінці (2), встановлення якої з невеликими змінами повторює встановлення цієї ж оцінки в [1]. Проте за умов неперервної диференційовності f і оцінки росту на її похідну в [1] доводиться однозначна розв'язність (1), в той час як у нашому випадку про єдиність отриманого розв'язку нічого сказати не можна.

Стандартним чином (див. [6], звідти також всі позначення) приходимо до того, що $\forall T>0$ $\exists\,\{\varphi, u\}\in V_2(Q_T)$ $\forall \eta\in W_2^{1,1}$, $\eta(x,T)=0$:

© О. В. КАПУСТЯН, 1999

$$
\begin{gathered}
-\tau \int\limits_{Q_T} \varphi\eta_t - \tau\int\limits_{\Omega} \varphi_0\eta(x,0) + \xi^2 \int\limits_{Q_T} \varphi_x\eta_x + \int\limits_{Q_T} f(x,\varphi)\eta = 2\int\limits_{Q_T} u\eta + \int\limits_{Q_T} h_1\eta, \\
-\int\limits_{Q_T} u\eta_t - l/2\int\limits_{Q_T} \varphi\eta_t - \int\limits_{\Omega} u_0\eta(x,0) - l/2\int\limits_{\Omega} \varphi_0\eta(x,0) = -k\int\limits_{Q_T} u_x\eta_x + \int\limits_{Q_T} h_2\eta,
\end{gathered}
\tag{3}
$$

причому для $\{\varphi, u\}$ справджується (2). Останнє дозволяє стверджувати, що $\{\varphi, u\}$ — глобальний розв'язок, тобто (3) для нього справедливе для кожного $T > 0$.

Тепер розглянемо поведінку розв'язків (1) при великих t. Врахувавши неєдиність розв'язку, застосуємо до нашої задачі апарат, розроблений в [2 – 5], який дозволяє перенести на багатозначний випадок значну кількість результатів теорії динамічних систем. Утворимо таке багатозначне відображення: $G(t, \{\varphi_0, u_0\}) = \{\{\varphi(t), u(t)\} \mid \{\varphi, u\}$ — розв'язок (1), для якого справджується оцінка (2), $\varphi(0) = \varphi_0, \quad u(0) = u_0\}$,

$$G(\cdot,\cdot)\colon R_+ \times (H_0^1 \times H_0^1) \to 2^{H_0^1 \times H_0^1}.$$

Побудоване таким чином багатозначне відображення G є м-напівпотоком [2]. Доведемо, що при виконанні умов $1-4$ G має глобальний компактний атрактор в сенсі [2]. Для цього нам потрібні дві леми.

Лема 1. *Якщо* $\{\varphi, u\}$ *задовольняє* (3) *і оцінку* (2), *то* $\{\varphi, u\}$ *задовольняє* (1) *для м. в.* $(x, t) \in Q_T \ \forall T > 0$.

Доведення. Зафіксуємо $\{\varphi, u\}$ — деякий глобальний розв'язок (3), для якого виконується оцінка (2). Позначимо $F(x, t) = -f(x, \varphi(x, t)) + 2u + h_1$. Задача

$$
\begin{gathered}
-\tau \int\limits_{Q_T} \psi\eta_t - \tau\int\limits_{\Omega} \psi(0)\eta(x,0) + \xi^2 \int\limits_{Q_T} \psi_x\eta_x = \int\limits_{Q_T} F\eta, \\
\psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \psi(0) = \varphi_0
\end{gathered}
\tag{4}
$$

при $F \in L_2(Q_T)$ в класі $V_2(Q_T)$ має єдиний розв'язок [6]. Належність F до $L_2(Q_T)$ випливає з умови 4 та включення $H_0^1(\Omega) \subset L_6(\Omega)$ при $\dim\Omega = 3$. Отже, $\psi \equiv \varphi$ в $V_2(Q_T)$ для кожного $T > 0$. Але для розв'язку ψ задачі (4) можемо отримати оцінку [6]

$$\int\limits_0^T \|\Delta\psi\|^2 + \int\limits_0^T \|\psi_t\|^2 \le M\Big(1 + \big(\|\psi_x(0)\|^2 + \|u_x(0)\|^2\big)^3\Big), \tag{5}$$

де $M > 0$ залежить від T і констант задачі (1). Очевидно, що (5) справджується і для φ, а отже, в цьому легко пересвідчитись, і для u. Це дозволяє стверджувати, що $\{\varphi, u\}$ задовольняють (1) для м. в. $(x, t) \in Q_T$.

Лема 2. *За умов леми 1* $\{\varphi, u\} \in C\big([0, T-\varepsilon]; H_0^1 \times H_0^1\big)$.

Доведення з незначними змінами повторює доведення теореми 4.1 гл. 3 з роботи [6].

Теорема 2. *У фазовому просторі* $X = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ *для м-напівпотоку* G *існує глобальний компактний атрактор* Ξ.

Доведення. Згідно з [3] потрібно перевірити наступні факти:

1) якщо для довільного $t > 0$ $\xi_n \to \xi$, $\eta_n \to \eta$, $\xi_n \in G(t, \eta_n)$, то $\xi \in G(t, \eta)$;

2) якщо $\xi_n \in G(t_n, B)$, $t_n \to +\infty$, B — обмежена множина в фазовому просторі, то послідовність $\{\xi_n\}$ передкомпактна в X.

Надалі все розглядається для функції φ (для u — аналогічно) і при переході від деякої послідовності $\{x_n\}$ до її підпослідовності цю підпослідовність теж будемо позначати $\{x_n\}$, якщо це не впливає на подальші міркування, наприклад, якщо нас цікавить передкомпактність $\{x_n\}$.

1. Нехай $\{\xi_n\} \in G(t, \eta_n)$. Тоді існують $\{\varphi_n\}$-розв'язки такі, що $\xi_n = \varphi_n(t)$. З оцінки (5) та леми про компактність випливає, що існує φ таке, що $\varphi_n \to \varphi$ в $L_2(0, T; H_0^1)$, $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ при $t \geq 0$ в $L_2(\Omega)$. Тоді φ — розв'язок (3), що задовольняє (2). Звідси випливає, що $\varphi \in C(R_+; H_0^1)$. Використовуючи оцінки (2), (5) та те, що $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ при $t \geq 0$ в L_2, отримуємо $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$, $t \geq 0$, в H_0^1 і $\varphi_{n_t} \to \varphi_t$ в $L_2(0, T; L_2)$. Неважко пересвідчитись, що виконується така нерівність (див. першу рівність (3)):

$$\xi^2 \|\varphi_x(t)\|^2 + \tau \int_s^t \|\varphi_t\|^2 + \int_s^t (f(x, \varphi), \varphi_t) - (h_1, \varphi(t)) \leq$$

$$\leq \xi^2 \|\varphi_x(s)\|^2 + 2 \int_s^t (u, \varphi_t) - (h_1, \varphi(s))$$

для м. в. $t, s \in [0, T]$, $t \geq s$, тобто для функції

$$\Phi(t) = \Phi^{\varphi, u}(t) = \xi^2 \|\varphi_x(t)\|^2 +$$

$$+ \tau \int_0^t \|\varphi_t\|^2 + \int_0^t (f(x, \varphi), \varphi_t) - (h_1, \varphi(t)) - 2 \int_0^t (u, \varphi_t)$$

виконується нерівність $\Phi(t) \leq \Phi(s)$ для $t \geq s$ і м. в. $t, s \in [0, T]$. Але за вже доведеним $\Phi(\cdot)$ — неперервна функція, отже, $\Phi(t) \leq \Phi(s)$ при $t, s \in [0, T]$, $t \geq s$. Нехай $\Phi_n(t) = \Phi^{\varphi_n, u_n}(t)$. Тоді $\Phi_n(t) \to \Phi(t)$ для м. в. $t \in [0, T]$ і, враховуючи монотонність і неперервність Φ_n, Φ, маємо $\Phi_n(t) \to \Phi(t)$ для кожного $t \in [0, T]$. Але

$$\underline{\lim}\, \Phi_n(t) \geq \underline{\lim}\, \xi^2 \left\|\varphi_{n_x}(t)\right\|^2 + \underline{\lim}\, \tau \int_0^t \left\|\varphi_{n_t}\right\|^2 +$$

$$+ \int_0^t (f(x, \varphi), \varphi_t) - (h_1, \varphi(t)) - 2 \int_0^t (u, \varphi_t).$$

Отже, $\left\|\varphi_{n_x}(t)\right\|^2 \to \left\|\varphi_x(t)\right\|^2$ $\forall t \in [0, T]$. Звідси, враховуючи слабку збіжність, маємо $\varphi_n \to \varphi$ в H_0^1 $\forall t \geq 0$. Скориставшись другою рівністю, отримаємо аналогічний результат щодо послідовності розв'язків $\{u_n\} \Rightarrow \varphi_n(t) \to \varphi(t)$ і якщо $\xi_n \to \xi$, то $\xi = \varphi(t)$, $\eta_n = \varphi_n(0) \to \varphi(0) = \eta \Rightarrow \xi \in G(t, \eta)$ при $t \geq 0$.

2. Оцінка (2) дає нам обмежену в X множину B_0 таку, що для довільної обмеженої множини B існує $T_B > 0$ при $t \geq T_B$: $G(t, B) \subset B_0$. Тоді, використовуючи властивість м-напівпотоку, $G(t_1 + t_2, B) \subset G(t_1, G(t_2, B))$, маємо

$$\xi_n \in G(t_n, B) = G(t_n - t + t, B) \subset G(t, G(t_n - t, B)) \subset G(t, B_0))$$

для досить великих $n \geq 1$. Візьмемо $T > t$ і $\delta > 0$ таке, що $t \in (\delta, T - \delta)$. Так само, як в пункті 1, маємо, що існують $\{\varphi_n\}$: $\xi_n = \varphi_n(t)$, $\varphi_n(0) \in B_0$. Існує φ_T таке, що $\varphi_n \to \varphi_T$ в $L_2(0, T; H_0^1)$ (функція φ_T залежить від T), але $\{\varphi_n(0)\}$ може не бути передкомпактною, отже, міркування з леми 2 дослівно не застосовні. Але φ_T все ж таки задовольняє (5). Тоді, замінюючи функцію ω в доведенні теореми 4.1 гл. 3 роботи [6] на таку:

$$\omega^* = \begin{cases} 1, & t \in [-T - \delta, -\delta] \cup [\delta, T - \delta], \\ 0, & |t| < \delta/2;\ |t| \geq T \end{cases}$$

і повторюючи всі викладки цього доведення для функції $v = \varphi_T \omega^*$, отримаємо, що φ_T неперервна, як функція $[\delta, T - \delta] \to H_0^1$. Тоді, застосовуючи всі міркування пункту 1 на цьому відрізку, отримаємо $\xi_n = \varphi_n(t) \to \varphi_T(t)$, $t \in (\delta, T - \delta)$, отже, $\{\xi_n\}$ — передкомпактна.

Зауваження. Цікаво, що якщо накласти на f додаткову умову: $\exists f'$ і $f'(s) \geq -C_0$ $\forall s \in R$, то вона теж не буде гарантувати єдиності розв'язку (1) і навіть не полегшить (принаймні для функції u) наведених вище міркувань. Проте ця умова дозволяє оцінити фрактальну розмірність отриманого атрактора.

Неважко навести приклад функції, яка не задовольняє умови із роботи [1] і задовольняє умови 2 – 4: $f(x, r) = g(x) + \phi(r)$, де функція $g(x)$ — з умови 4, а функція ϕ є неперервною на R, має невід'ємну похідну скрізь, крім зліченної кількості точок, в околі яких похідна необмежена.

Очевидно, так побудована $f(x, r)$ задовольняє умови 2 – 4, але її похідна необмежена зверху на скінченних інтервалах, отже, умови роботи [1] не виконані.

1. *Калантаров В. К.* О минимальном глобальном аттракторе системы фазово-полевых уравнений // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1987. – **188** (22). – С. 70 – 96.
2. *Мельник В. С.* Многозначная динамика нелинейных бесконечномерных систем. – Киев, 1994. – 40 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т кибернетики; № 92 – 14).
3. *Капустян О. В., Мельник В. С.* Аттракторы многозначных полудинамических систем и их аппроксимации // Допов. НАН України. – 1998. – № 10. – С. 25 – 39.
4. *Mel'nik V. S., Valero J.* On attraction of multivalued semi-flows and differential inclusions // Set-valued Anal. – 1998. – **6**. – С. 83 – 111.
5. *Чебан Д. Н., Факих Д. С.* Глобальные аттракторы дисперсных динамических систем. – Кишинев: Сигма, 1994. – 168 с.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

Одержано 09.12.98,
після доопрацювання – 18.02.99