УДК 517.949.2

І. М. Черевко (Черпів. уп-т)

ПРО АСИМПТОТИКУ ІНТЕГРАЛЬНИХ МНОГОВИДІВ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

We investigate the problem of constructing asymptotic decompositions of integral manifolds of slow variables for linear and nonlinear singularly perturbed systems with delay.

Досліджено задачу про побудову асимптотичних розкладів інтегральних многовидів повільних змінних для лінійних та нелінійних сингулярно збурених систем із запізненням.

Ефективним апаратом дослідження сингулярно збурених диференціальних систем із запізненням є метод інтегральних многовидів [1 – 4], який дозволяє зменшити розмірність вихідної системи на інтегральному многовиді, а також здійснити асимптотичне розщеплення швидких і повільних змінних. У зв'язку з цим важливою є задача про побудову точного або наближеного інтегрального многовиду. Для сингулярно збурених звичайних диференціальних рівнянь ці питання розглядались у роботах [5, 6].

В даній роботі вивчається задача про побудову асимптотичного розкладу інтегральних многовидів сингулярних систем із малим запізненням.

1. Розглянемо систему сингулярно збурених рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x, y, \varepsilon), \tag{1}$$

$$\varepsilon\frac{dy(t)}{dt} = C(t)y(t) + D(t)y(t-\varepsilon\Delta) + g[t, x(t), x(t-\varepsilon\Delta), y(t), y(t-\varepsilon\Delta), \varepsilon],$$

праві частини якої визначені в області

$$\begin{gathered} t\in\mathbb{R},\ x(t),\ x(t-\varepsilon\Delta)\in\mathbb{R}^n, \\ y(t),\ y(t-\varepsilon\Delta)\in\Omega_\rho = \{y\in\mathbb{R}^m, |y|<\rho\},\ \varepsilon>0. \end{gathered} \tag{2}$$

Припустимо, що для системи (1) виконуються умови, аналогічні наведеним у роботах [1, 2]:

1) функція f в області (2) неперервна, задовольняє умову Ліпшіца по x, y із сталою K і обмежена: $|f(t, x, y, \varepsilon)| \le M$;

2) функція g неперервна в області (2), задовольняє нерівність $|g(t, x(t), x(t-\varepsilon\Delta), 0, 0, \varepsilon)| \le \omega(\varepsilon)$ і умову Ліпшіца по $x(t)$, $x(t-\varepsilon\Delta)$, $y(t)$, $y(t-\varepsilon\Delta)$ із сталою $L(\varepsilon,\rho)$, де $\omega(\varepsilon)$, $L(\varepsilon,\rho)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, $\rho\to 0$;

3) матричні функції $C(t)$, $D(t)$ обмежені сталою N і всі корені $\lambda_i = \lambda_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, характеристичного рівняння

$$\operatorname{Det}(\lambda E - C - De^{-\lambda\Delta}) = 0$$

при всіх $t\in\mathbb{R}$ задовольняють умову $\operatorname{Re}\lambda_i(t) \le -2\mu < 0$.

При виконанні припущень 1 – 3 система (1) має інтегральний многовид повільних змінних

$$y = h(t, x, \varepsilon), \tag{3}$$

де функція h задовольняє нерівності

$$|h(t, x, \varepsilon)| \le \rho(\varepsilon), \qquad |h(t, x_1, \varepsilon) - h(t, x_2, \varepsilon)| \le \gamma(\varepsilon)|x_1 - x_2|, \tag{4}$$
$$\rho(\varepsilon)\to 0, \quad \gamma(\varepsilon)\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0.$$

Інтегральний многовид (3) стійкий в тому розумінні, що будь-який розв'язок $(x(t), y(t))$ системи (1), що задовольняє умови $x(t_0) = x_0$, $y(t) = \varphi(t)$ для $t\in$

$\in [t_0 - \varepsilon\Delta, t_0]$ $(|\varphi| < \rho)$, буде притягуватись до многовиду (3) за експоненціальним законом [1 – 3].

На інтегральному многовиді (3) система рівнянь (1) зводиться до рівняння

$$\dot{u}(t) = f(t, u, h(t, u, \varepsilon), \varepsilon), \tag{5}$$

яке регулярно залежить від малого параметра ε і, крім того, не містить запізнення аргументу. Аналіз цього рівняння часто дозволяє спростити задачу якісного дослідження вихідної системи (1) [7]. При цьому центральною є задача про знаходження функції $h(t, u, \varepsilon)$, що описує інтегральний многовид. Як правило, її точне обчислення є неможливим, тому використовують різні види наближення, наприклад асимптотичний розклад $h(t, u, \varepsilon)$ за степенями малого параметра ε. Використання наближених інтегральних многовидів дозволяє в некритичних випадках встановити принцип зведення для системи (1), а також здійснити її асимптотичне розщеплення аналогічно випадку звичайних диференціальних рівнянь [6, 8].

2. Дослідимо асимптотичні властивості функції $h(t, x, \varepsilon)$, що визначає інтегральний многовид системи (1).

Нехай для системи (1) крім умов 1 – 3 виконуються такі припущення:

4) функції f, g рівномірно обмежені для $t \in \mathbb{R}$ разом із своїми частинними похідними за всіма аргументами до $(n+1)$-го порядку включно величиною $\nu(\varepsilon)$ $(\nu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0)$, а функція $[C + D]^{-1}$ та її похідні до $(n+1)$-го порядку рівномірно обмежені сталою N_1;

5) функція $g(t, u_1, u_2, v_1, v_2, \varepsilon)$ і її частинні похідні $\partial g/\partial v_1$, $\partial g/\partial v_2$ тотожно дорівнюють нулю при $v_1 = v_2 = 0$ і $\varepsilon = 0$.

В системі (1) зробимо заміну

$$y = H(t, x, \varepsilon) + \varepsilon^{n+1} z, \tag{6}$$

де H — функція, яка буде визначена нижче. Для змінних x та z одержимо систему

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = \tilde{f}(t, x, z, \varepsilon), \\ \varepsilon^{n+2} \frac{dz(t)}{dt} = \varepsilon^{n+1} C(t) z(t) + \varepsilon^{n+1} D(t) z(t - \varepsilon\Delta) + \\ + \tilde{g}[t, x(t), x(t-\varepsilon\Delta), z(t), z(t-\varepsilon\Delta), \varepsilon], \end{gathered} \tag{7}$$

де

$$\tilde{f}(t, x, z, \varepsilon) = f[t, x, H(t, x, \varepsilon) + \varepsilon^{n+1} z],$$

$$\begin{gathered} \tilde{g}[t, x(t), x(t-\varepsilon\Delta), z(t), z(t-\varepsilon\Delta), \varepsilon] = g\{t, x(t), x(t-\varepsilon\Delta), H(t, x, \varepsilon) + \varepsilon^{n+1} z(t), \\ H[t-\varepsilon\Delta, x(t-\varepsilon\Delta), \varepsilon] + \varepsilon^{n+1} z(t-\varepsilon\Delta), \varepsilon\} + C(t) H(t, x, \varepsilon) + \\ + D(t) H[t-\varepsilon\Delta, x(t-\varepsilon\Delta), \varepsilon] - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial x} \tilde{f}(t, x, z, \varepsilon). \end{gathered}$$

Припустимо, що функцію $H(t, x, \varepsilon)$ вдалось підібрати так, що при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ вона рівномірно обмежена разом із своїми частинними похідними по t та x і, крім того,

$$\tilde{g} = \varepsilon^{n+1} G, \tag{8}$$

де функція G задовольняє ті ж умови, що і функція g. Тоді система (7) задовольняє умови 1 – 3 і для неї існує інтегральний многовид

$$z = h^*(t, x, \varepsilon), \tag{9}$$

де функція h^* задовольняє умови (4). Згідно з проведеною заміною (6), якщо система (7) має інтегральний многовид вигляду (9), то система (1) має такий інтегральний многовид:

$$y = H(t, x, \varepsilon) + \varepsilon^{n+1} h^*(t, x, \varepsilon). \tag{10}$$

Запишемо вираз для функції $\tilde{g}$ у вигляді

$$\tilde{g} = \frac{\partial \tilde{g}\,[t, x(t), x(t-\varepsilon\Delta), \theta z(t), z(t-\varepsilon\Delta), \varepsilon]}{\partial z(t)} \varepsilon^{n+1} z(t) +$$

$$+ \frac{\partial \tilde{g}\,[t, x(t), x(t-\varepsilon\Delta), z(t), \theta z(t-\varepsilon\Delta), \varepsilon]}{\partial z(t-\varepsilon\Delta)} \varepsilon^{n+1} z(t-\varepsilon\Delta) +$$

$$+ g\,\{t, x(t), x(t-\varepsilon\Delta), H(t, x, \varepsilon), H[t-\varepsilon\Delta, x(t-\varepsilon\Delta), \varepsilon], \varepsilon\} +$$

$$+ C(t) H(t, x, \varepsilon) + D(t) H[t-\varepsilon\Delta, x(t-\varepsilon\Delta), \varepsilon] - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial t} -$$

$$- \varepsilon \frac{\partial H}{\partial x}\left[\varepsilon^{n+1} \frac{\partial f\big(t, x, H(t, x, \varepsilon) + \varepsilon^{n+1}\theta z(t), \varepsilon\big)}{\partial z(t)} z(t) + f(t, x, H(t, x, \varepsilon), \varepsilon)\right] =$$

$$= \varepsilon^{n+1} G_0(t, x(t), x(t-\varepsilon\Delta), z(t), z(t-\varepsilon\Delta), \varepsilon) + T[H(t, x, \varepsilon)], \ 0 < \theta < 1, \tag{11}$$

де

$$T[H(t, x, \varepsilon)] = C(t) H(t, x, \varepsilon) + D(t) H[t-\varepsilon\Delta, x(t-\varepsilon\Delta), \varepsilon] +$$

$$+ g\,\{t, x(t), x(t-\varepsilon\Delta), H(t, x, \varepsilon), H[t-\varepsilon\Delta, x(t-\varepsilon\Delta), \varepsilon], \varepsilon\} -$$

$$- \varepsilon \frac{\partial H}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial x} f[t, x, H(t, x, \varepsilon), \varepsilon]. \tag{12}$$

Покажемо, що існує функція $H(t, x, \varepsilon)$, яку можна зобразити у вигляді

$$H(t, x, \varepsilon) = \varepsilon h_1(t, x) + \ldots + \varepsilon^n h_n(t, x) \tag{13}$$

($h_i(t, x)$ — рівномірно обмежені функції разом із своїми $(n-i+1)$-ми похідними), така, що

$$T[H(t, x, \varepsilon)] = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Розглянемо деякі допоміжні розклади

$$H[t-\varepsilon\Delta, x(t-\varepsilon\Delta), \varepsilon] = \varepsilon h_1[t-\varepsilon\Delta, x(t-\varepsilon\Delta)] + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^{n+1} h_n[t-\varepsilon\Delta, x(t-\varepsilon\Delta)] =$$

$$= \varepsilon\{h_1(t, x) + \ldots + \varepsilon^{n-1} h_1^{(n-1)}(t, x) + \varepsilon^n h_1^{(n)}[t-\varepsilon\theta\Delta, x(t-\varepsilon\theta\Delta)]\} + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^n h_n(t, x) + \varepsilon^{n+1} h_n^{(1)}[t-\varepsilon\theta\Delta, x(t-\varepsilon\theta\Delta)] = \varepsilon h_1(t, x) +$$

$$+ \varepsilon^2\big[h_2(t, x) + h_1^{(1)}(t, x)\big] + \ldots + \varepsilon^n\big[h_n(t, x) + h_1^{(n-1)}(t, x) + \ldots + h_{n-1}^{(1)}(t, x)\big] +$$

$$+ \varepsilon^{n+1} \bar{h}[t, x(t-\varepsilon\theta\Delta), \varepsilon],$$

$$f[t, x, H(t, x, \varepsilon), \varepsilon] = f(t, x, 0, 0) + \varepsilon f_1(t, x, h_1) + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^n f_n(t, h_1, \ldots, h_n) + \varepsilon^{n+1} f_{n+1}(t, h_1, h_2, \ldots, h_n, \varepsilon),$$

$$g\,\{t, x, x(t-\varepsilon\Delta), H(t, x, \varepsilon), H[t-\varepsilon\Delta, x(t-\varepsilon\Delta), \varepsilon], \varepsilon\} =$$

$$= \varepsilon g_1(t, x) + \varepsilon^2 g_2(t, x, h_1) + \ldots + \varepsilon^n g_n(t, x, h_1, \ldots, h_{n-1}) +$$

$$+ \varepsilon^{n+1} g_{n+1}(t, h_1, \ldots, h_n, \varepsilon),$$

де $h_i^{(j)}$, f_i, g_i, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n-i}$ $\left(g_1(t,x)=\dfrac{\partial g(t,x,x,0,0,0)}{\partial\varepsilon}\right)$ — відповідні коефіцієнти розкладу за формулою Тейлора, а $h_1^{n+1},\ldots,h_n^1$, f_{n+1}, g_{n+1} — залишкові члени розкладу.

Підставляючи виписані розклади у співвідношення (12), одержуємо

$$T[H] = C(t)[\varepsilon h_1+\ldots+\varepsilon^n h_n]+D(t)\{\varepsilon h_1+\varepsilon^2(h_2+h_1^{(1)})+\ldots+\varepsilon^{n+1}\bar{h}\}+$$
$$+\varepsilon g_1(t,x)+\ldots+\varepsilon^{n+1}g_{n+1}(t,x,h_1,\ldots,h_n,\varepsilon)-\varepsilon\left[\varepsilon\frac{\partial h_1}{\partial t}+\ldots+\varepsilon^n\frac{\partial h_n}{\partial t}\right]-$$
$$-\varepsilon\left[\varepsilon\frac{\partial h_1}{\partial x}+\ldots+\varepsilon^n\frac{\partial h_n}{\partial x}\right][f(t,x,0,0)+\ldots+\varepsilon^n f_n(t,x,h_1,\ldots,h_n,\varepsilon)]. \quad (14)$$

Функції h_i, $i=1,2,\ldots,n$, будемо вибирати так, щоб у виразі (14) дорівнювали нулю всі члени, що містять ε в степені, меншому ніж $n+1$. При першому степені маємо

$$C(t)h_1(t,x)+D(t)h_1(t,x)+g_1(t,x) = 0,$$

звідки

$$h_1(t,x) = -[C(t)+D(t)]^{-1}g_1(t,x).$$

Функція $h_1(t,x)$ — обмежена і має обмежені частинні похідні по t і x до n-го порядку включно.

Припустимо, що всі функції h_i, $1\le i\le n-1$, визначені і мають обмежені частинні похідні по t і x до $(n-i+1)$-го порядку. Тоді, прирівнюючи до нуля коефіцієнт в (14) при ε^n, одержуємо

$$C(t)h_n+D(t)(h_n+h_1^{(n-1)}+\ldots+h_{n-1}^1)+g_n(t,x,h_1,\ldots,h_{n-1})-\frac{\partial h_{n-1}}{\partial t}-$$
$$-\frac{\partial h_{n-1}}{\partial x}f(t,x,0,0)-\frac{\partial h_{n-2}}{\partial x}f_1(t,x,h_1)-\ldots-\frac{\partial h_1}{\partial x}f_{n-2}(t,x,h_1,\ldots,h_{n-2}) = 0.$$

Отже,

$$h_n(t,x) = -[C(t)+D(t)]^{-1}\{D(t)(h_1^{(n-1)}+\ldots+h_{n-1}^{(1)})+g_n(t,x,h_1,\ldots,h_{n-1})-$$
$$-\frac{\partial h_{n-1}}{\partial t}-\frac{\partial h_{n-1}}{\partial x}f(t,x,0,0)-\ldots-\frac{\partial h_1}{\partial x}f_{n-2}(t,x,h_1,\ldots,h_{n-2})\}. \quad (15)$$

Обмеженість функції $h_n(t,x)$ та її частинних похідних по t і x випливає із припущень відносно функцій f, g, $[C+D]^{-1}$ і властивостей функцій $h_i(t,x)$, $i=1,2,\ldots,n-1$. Якщо функції $h_i(t,x)$, $i=1,2,\ldots,n$, вибрати згідно з формулами (15), то співвідношення (14) набуде вигляду

$$T[H(t,x,\varepsilon)] = \varepsilon^{n+1}g^*[t,x(t),x(t-\varepsilon\theta\Delta),\varepsilon],$$

де функція g^* рівномірно обмежена величиною $\tilde{\nu}(\varepsilon)$ $(\tilde{\nu}(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0)$.

Із обмеженості функцій $h_i(t,x)$ та їх похідних по x випливає, що існують такі числа p, q, r, що H і $\partial H/\partial x$ обмежені величинами εp, εq і $\partial H/\partial x$ задовольняє умову Ліпшіца по x із сталою εr. Тоді функція

$$G = G_0[t,x,x(t-\varepsilon\Delta),z(t),z(t-\varepsilon\Delta),\varepsilon]+g^*[t,x(t),x(t-\varepsilon\theta\Delta),\varepsilon],$$

що входить у співвідношення (8), задовольняє ті ж умови, що і функція g в системі (1). Отже, справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* 1 – 5. *Тоді для достатньо малих* ε

система (1) *має інтегральний многовид* (10), *який можна зобразити у вигляді*

$$y = \varepsilon h_1(t, x) + \ldots + \varepsilon^n h_n(t, x) + \varepsilon^{n+1} h^*(t, x, \varepsilon), \tag{16}$$

де $h_i(t, x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *однозначно визначаються за формулами* (15).

Приклад. Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sin x \cos y,$$

$$\varepsilon \frac{dy(t)}{dt} = c y(t) + d y(t - \varepsilon\Delta) + \varepsilon\left[\sin(y(t - \varepsilon\Delta)) + \frac{\cos t}{1 + x^2}\right], \tag{17}$$

де c, d — сталі.

Припустимо, що всі корені рівняння $\lambda = c + d e^{-\lambda\Delta}$ лежать в лівій півплощині $\operatorname{Re}\lambda \le -2\mu < 0$. Тоді для системи (17) виконуються умови $1 - 5$ і, згідно з теоремою 1, існує інтегральний многовид цієї системи, асимптотичний розклад якого має вигляд (16). Обчислюючи коефіцієнти $h_i(t, x)$ за формулами (15), одержуємо

$$h_1(t, x) = -\frac{\cos t}{(c + d)\left(1 + x^2\right)},$$

$$h_2 = -\frac{1}{(c + d)\left(1 + x^2\right)}\left[(c\Delta + 1)\sin t - \cos t + \frac{4x(c\Delta + 1)\sin x}{1 + x^2}\right],$$

....

3. Розглянемо систему лінійних сингулярно збурених рівнянь із запізненням

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)y(t),$$

$$\varepsilon\, \dot{y}(t) = C(t)y(t) + D(t)y(t - \varepsilon\Delta) + F(t)x(t) + G(t)x(t - \varepsilon\Delta), \tag{18}$$

праві частини яких визначені в області (2).

Покажемо, що для системи (18) справедливе твердження, аналогічне теоремі 1 при дещо слабших припущеннях:

6) нехай матриці A, B, C, D, F, G та їх перші похідні рівномірно обмежені для $t \in \mathbb{R}$ додатною сталою N і виконується умова 3.

При виконанні умови 6 в [3, 4] доведено існування інтегрального многовиду повільних змінних системи (18), який можна подати у вигляді

$$y = H(t, \varepsilon)x. \tag{19}$$

Матриця $H(t, \varepsilon)$ рівномірно обмежена для $t \in \mathbb{R}$, задовольняє інтегральне рівняння

$$H(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t} Y(t, s)\,[F(s)X(s, t) + G(s)X(s - \varepsilon\Delta, t)]\,ds,$$

а також є обмеженим розв'язком диференціально-різницевого рівняння

$$\varepsilon\frac{dH(t, \varepsilon)}{dt} = -\varepsilon H(t, \varepsilon)[A(t) + B(t)H(t, \varepsilon)] + F(t) + G(t)X(t - \varepsilon\Delta, t) +$$
$$+ C(t)H(t, \varepsilon) + D(t)H(t - \varepsilon\Delta, \varepsilon)X(t - \varepsilon\Delta, t),$$

де $X(t, s)$ — фундаментальна матриця рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = [A(t) + B(t)H(t, \varepsilon)]\,x(t).$$

Якщо матриці A, B, C, D, F, G — сталі, то H задовольняє рівняння

$$\varepsilon H(A+BH) = F + G e^{-\varepsilon(A+BH)\Delta} + CH + DH e^{-\varepsilon(A+BH)\Delta},$$

яке при $\Delta = 0$ збігається із матричним рівнянням Ріккаті [5]

$$\varepsilon H(A+BH) = F + G + (C+D)H,$$

що визначає інтегральний многовид для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь без запізнення.

Нехай для системи (18), крім наведеної вище, виконується умова:

7) матриці A, B, C, D, F, G, $[C+D]^{-1}$ рівномірно обмежені для $t \in \mathbb{R}$ разом із своїми похідними до $(n+1)$-го порядку включно сталою N_2.

Розглянемо диференціальний вираз

$$T(u) = C(t)u[t, x(t), \varepsilon] + D(t)u[t-\varepsilon\Delta, x(t-\varepsilon\Delta), \varepsilon] + F(t)x(t) + \\ + G(t)x(t-\varepsilon\Delta) - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}[A(t)x(t) + B(t)u(t, x, \varepsilon)]. \qquad (20)$$

Покажемо, що існує функція $u(t, x, \varepsilon)$, яку можна подати у вигляді

$$u(t, x, \varepsilon) = H(t, \varepsilon)x(t) = [h_0(t) + \varepsilon h_1(t) + \ldots + \varepsilon^n h_n(t)]\,x(t) \qquad (21)$$

(де $h_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, — рівномірно обмежені функції разом із своїми $(n-i+1)$-ми похідними), така, що на обмежених розв'язках системи (18)

$$T[H(t, \varepsilon)x] = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Розглянемо допоміжні розклади, аналогічні випадку нелінійної системи рівнянь

$$H[t-\varepsilon\Delta, \varepsilon] = H(t, \varepsilon) + \varepsilon\,\overline{h}_1(t, h_0) + \varepsilon^2\,\overline{h}_2(t, h_0, h_1) + \ldots \\ \ldots + \varepsilon^n\,\overline{h}_n(t, t_0, \ldots, h_{n-1}) + \varepsilon^{n+1}\,\overline{h}_{n+1}(t-\varepsilon\theta\Delta, h_0, \ldots, h_n, \varepsilon), \qquad (22)$$

$$x(t-\varepsilon\Delta) = [x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \ldots + \varepsilon^n x_n(t)]\,x(t) + \varepsilon^{n+1}x_{n+1}(t-\varepsilon\theta\Delta), \qquad (23)$$

де

$$\overline{h}_i = \sum_{k=1}^{i}\frac{(-1)^k\,\Delta^k\,d^k\,h_{i-k}(t)}{k!\,dt^k}, \quad x_0 = 1, \quad x_i = \frac{(-1)^i\,\Delta^i}{i!}\frac{d^i\,x(t)}{dt^i},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n+1, \quad 0 < \theta < 1.$$

Використовуючи розклади (22). (23), одержуємо

$$H[t-\varepsilon\Delta, \varepsilon]x(t-\varepsilon\Delta) = H(t, \varepsilon)x(t) + \left[\varepsilon\overline{\overline{h}}_1 + \varepsilon^2\overline{\overline{h}}_2 + \ldots + \varepsilon^n\overline{\overline{h}}_n\right]x(t) + \\ + \varepsilon^{n+1}\{l_1(t, h_0, \ldots, h_n, \varepsilon)x(t) + l_2(t, h_0, \ldots, h_n, \varepsilon)x(t-\varepsilon\theta\Delta)\}, \qquad (24)$$

де $\overline{\overline{h}}_i = \overline{h}_0 x_i + \overline{h}_1 x_{i-1} + \ldots + \overline{h}_i x_0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а функції $l_1(t, h_0, \ldots, h_n, \varepsilon)$, $l_2(t, h_0, \ldots, h_n, \varepsilon)$ однозначно визначаються із розкладів (22), (23).

Підставимо розклади (23), (24) в (20) і підберемо функції h_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, так, щоб в (20) перетворились в нуль всі члени, що містять ε в степені, меншому ніж $n+1$. Обгрунтування можливості такого вибору неважко провести за індукцією. Для коефіцієнтів розкладу (21) справедливі алгебраїчні співвідношення

$$h_0(t) = -[C(t) + D(t)]^{-1}[F(t) + G(t)], \\ h_i(t) = -[C(t) + D(t)]^{-1}\left[D(t)\,\overline{\overline{h}}_i + G(t)x_i - \frac{dh_{i-1}}{dt} - \right. \\ \left. - h_0 B(t)h_{i-1} - \ldots - h_{i-1}B(t)h_0 - h_{i-1}A(t)\right], \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (25)$$

Обмеженість h_i та їх частинних похідних до $(n-i+1)$-го порядку випливає із умов, накладених на коефіцієнти системи (18). Якщо функції $h_i(t)$ вибрані за формулами (25), то диференціальне співвідношення (20) набуде вигляду

$$T[H(t,\varepsilon)x] = \varepsilon^{n+1}[\eta_1(t,\varepsilon)x(t)+\eta_2(t,\varepsilon)x(t-\varepsilon\theta\Delta)],$$

де $\eta_1(t,\varepsilon)$, $\eta_2(t,\varepsilon)$ — рівномірно обмежені функції.

Якщо у вихідній системі (18) зробити заміну $y=H(t,\varepsilon)x+\varepsilon^{n+1}z$, то для змінних x і z одержимо систему

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= [A(t)+B(t)H(t,\varepsilon)]x(t)+\varepsilon^{n+1}B(t)z(t),\\ \varepsilon\frac{dz(t)}{dt} &= [C(t)-\varepsilon H(t,\varepsilon)B(t)]z(t)+D(t)z(t-\varepsilon\Delta)+\\ &\quad+\eta_1(t,\varepsilon)x(t)+\eta_2(t,\varepsilon)x(t-\varepsilon\theta\Delta).\end{aligned} \tag{26}$$

Система (26) — це система типу (18) і при виконанні умов 6, 7 для неї існує інтегральний многовид

$$z(t) = \overline{H}(t,\varepsilon)x(t), \tag{27}$$

де $\overline{H}(t,\varepsilon)$ — рівномірно обмежена матриця.

Якщо система (26) має інтегральний многовид (27), то система (18) має інтегральний многовид вигляду

$$y(t) = [H(t,\varepsilon)+\varepsilon^{n+1}\overline{H}(t,\varepsilon)]x(t),$$

для якого справедливий асимптотичний розклад

$$y(t) = h_0(t)x(t)+\varepsilon h_1(t)x(t)+\ldots+\varepsilon^n h_n(t)x(t)+\varepsilon^{n+1}\overline{H}(t,\varepsilon)x(t). \tag{28}$$

Сформулюємо це твердження у вигляді теореми.

Теорема 2. *Нехай відносно системи* (18) *виконуються умови* 6, 7. *Тоді для достатньо малих* ε *система* (18) *має інтегральний многовид вигляду* (28), *де коефіцієнти* $h_i(t)$ *однозначно визначаються із алгебраїчних співвідношень* (25).

1. *Митропольский Ю. А., Фодчук В. И.* Об устойчивых интегральных многообразиях для одного класса сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Укр. мат. журн. – 1968. – **20**, № 6. – С. 791–801.
2. *Митропольский Ю. А., Фодчук В. И.* О существовании и устойчивости ограниченного решения сингулярно возмущенной системы с запаздыванием // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1969. – № 3. – С.210–213.
3. *Фодчук В. И., Черевко И. М.* К теории интегральных многообразий сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 6. – С. 725–731.
4. *Halanay A.* An invariant surface for some linear singularly perturbed systems with time lag // J. Different. Equat. – 1966. – **2**, № 2. – P. 33–46.
5. *Стрыгин В. В., Соболев В. А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
6. *Воропаева Н. В., Соболев В. А.* Конструктивный метод расщепления нелинейных сингулярно возмущенных систем // Дифференц. уравнения. – 1995. – **31**, № 4. – С. 569–578.
7. *Черевко І. М.* Розщеплення лінійних сингулярно збурених диференціально-різницевих систем // Допов. НАН України. – 1997. – № 6. – С. 42–45.
8. *Лыкова О. Б., Барис Я. С.* Приближенные интегральные многообразия. – Киев: Наук. думка, 1993. – 314 с.

Одержано 03.02.97,
після доопрацювання – 26.08.98