УДК 517.5

В. М. Алданов, Г. О. Михалін (Нац. пед. ун-т, Київ)

ТАУБЕРОВІ ТЕОРЕМИ ІЗ ЗАЛИШКОМ ДЛЯ (H,p, α, β)- І (C, p, α, β)-МЕТОДІВ ПІДСУМОВУВАННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

We suggest a general method to obtain the Tauberian theorems with a remainder for the Hölder and Cesàro type methods of summation.

Наведено загальний спосіб одержання тауберових теорем із залишком для методів підсумовування типу методів Гельдера і Чезаро.

1. Нехай функції p, λ і σ мають вигляд $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ (наприклад, $p(x, y) = p_1(x)p_2(y)$), причому кожен співмножник є невід'ємним, обмеженим і L-інтегровним на $[0; b]$ для кожного $b > 0$,

$$P_i(x) := \int_0^x p_i(u)\,du; \qquad P(x, y) := P_1(x)P_2(y),$$

$$0 < P_i(x) \uparrow +\infty \quad (0 < x \to \infty), \tag{1}$$

$$P_i(x+1)/P_i(x) \to 1 \quad (x \to \infty), \qquad i = 1, 2, \tag{2}$$

$$\exists \gamma \in (0; 1), \quad a_1 > 0, \quad b_1 > 0 : 0 < \lambda(x, y) \le a_1\lambda(u, v) \le b_1\left(\frac{P(u, v)}{P(x, y)}\right)^{\gamma}\lambda(x, y) \tag{3}$$

$$0 < \sigma(x, y) \le a_1\sigma(u, v) \le b_1\left(\frac{P(u, v)}{P(x, y)}\right)^{\gamma}\sigma(x, y) \quad \forall u \ge x, \quad v \ge y.$$

Для функції $f = f(x, y)$, що є L-інтегровною і обмеженою на $\Delta = [0; a] \times [0; b]$ при $a > 0$, $b > 0$, позначимо

$$H_{0,0}(x, y) := f(x, y), \quad H_{0,\beta}(x, y) := \frac{1}{P_2(y)}\int_0^y p_2(v)H_{0,\beta-1}(x, v)\,dv \quad \forall \beta \in N,$$

$$H_{\alpha,\beta}(x, y) := \frac{1}{P_1(x)}\int_0^x p_1(u)H_{\alpha-1,\beta}(u, y)\,du \quad \forall \alpha \in N, \quad \beta \in N_0 := N \cup \{0\},$$

$$S_{0,0}(x, y) := f(x, y), \quad S_{0,\beta}(x, y) := \int_0^y p_2(v)S_{0,\beta-1}(x, v)\,dv \quad \forall \beta \in N,$$

$$S_{\alpha,\beta}(x, y) := \int_0^x p_1(u)S_{\alpha-1,\beta}(u, y)\,du \quad \forall \alpha \in N, \quad \beta \in N_0,$$

$$C_{\alpha,\beta}(x, y) := \frac{S_{\alpha,\beta}(x, y)}{P_{\alpha,\beta}(x, y)} \quad \forall \alpha, \beta \in N_0,$$

де через $P_{\alpha,\beta}(x, y)$ позначено $S_{\alpha,\beta}(x, y)$ у випадку $f(x, y) \equiv 1$.

Середні $H_{\alpha,\beta}(x, y)$ і $C_{\alpha,\beta}(x, y)$ визначають (H, p, α, β)- і (C, p, α, β)-методи підсумовування типу методів Гельдера і Чезаро порядків $(\alpha, \beta) \in N_0^2$. Вони перетворюються у класичні методи Гельдера і Чезаро, коли $p(x, y) \equiv 1$.

Точку $z = 0$ назвемо (p, λ, σ)-точкою функції f, якщо існують послідовності (x_k), $\left(x_k^*\right)$, (y_k), $\left(y_k^*\right)$ і (θ_k) такі, що

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{(x,y)\in\Delta_k} \operatorname{Re} e^{i\theta_k} f(x,y)\lambda(x_k,y_k)/\sigma(x_k,y_k) = \omega > 0,$$

де $\Delta_k = \left[x_k; x_k^*\right]\times\left[y_k; y_k^*\right]$, причому

$$\varliminf_{k\to\infty} \sigma(x_k,y_k)\left(1-\frac{P_1(x_k)}{P_1\left(x_k^*\right)}\right)\left(1-\frac{P_2(y_k)}{P_1\left(y_k^*\right)}\right) > 0.$$

Якщо у наведеному означенні $\omega = +\infty$, то будемо говорити, що точка $z=\infty$ є (p,λ,σ)-точкою функції f.

Ці означення для випадку, коли f є однократною послідовністю, введено у роботах [1, 2], і вони узагальнюють поняття (C)-точки, введене М. О. Давидовим (див., наприклад, [3 – 5]).

Зауважимо, що у наведених означеннях можна вважати $\dfrac{P_1(x_k^*)}{P_1(x_k)} \le 2$ і $\dfrac{P_2\left(y_k^*\right)}{P_2(y_k)} \le 2$ при $k \in N$.

2. Основними результатами роботи є наступні твердження.

Теорема 1. *Якщо точка* $z=\infty$ $(z=0)$ *є* (p,λ,σ)-*точкою функції* f, *то* $\lambda(x,y)H_{1,1}(x,y) \ne O(1)$ $\left(\lambda(x,y)H_{1,1}(x,y)\ne o(1)\right)$ $(x,y\to\infty)$.

Теорема 2. *Нехай функція* f *задовольняє умову*

$$f(x,y)\in R \;\; i \;\; \varliminf (f(x,y)-f(u,v))\lambda(u,v)/\sigma(u,v) \ge -r > -\infty,$$

$$\text{коли } x>u\to\infty,\quad y>v\to\infty,\quad \sigma^*(u,v)\left(1-\frac{P_1(u)}{P_1(x)}\right)\to 0 \;\; i \tag{4}$$

$$\sigma^{**}(u,v)\left(1-\frac{P_2(v)}{P_2(y)}\right)\to 0,$$

або умову

$$\varlimsup |f(x,y)-f(u,v)|\lambda(u,v)/\sigma(u,v) \le r < +\infty,$$

$$\text{коли } x>u\to\infty,\quad y>v\to\infty,\quad \sigma^*(u,v)\left(1-\frac{P_1(u)}{P_1(x)}\right)\to 0 \;\; i \tag{5}$$

$$\sigma^{**}(u,v)\left(1-\frac{P_2(v)}{P_2(y)}\right)\to 0,$$

де функції σ^* *і* σ^{**} *мають структуру, аналогічну структурі функції* σ, *причому* $\sigma(x,y)=\sigma^*(x,y)\sigma^{**}(x,y)$ $\forall (x,y)\in R_+^2 := [0;+\infty)\times[0;+\infty)$. *Тоді якщо* $\lambda(x,y)H_{1,1}(x,y)=O(1)$ $(x,y\to\infty)$, *то* $\lambda(x,y)f(x,y)=O(\sigma(x,y))$ $(x,y\to\infty)$. *А якщо* $r=0$ *і* $\lambda(x,y)H_{1,1}(x,y)=o(1)$ $(x,y\to\infty)$, *то* $\lambda(x,y)f(x,y) = o(\sigma(x,y))$ $(x,y\to\infty)$.

Наслідок 1. *Нехай* $\sigma(x,y)\equiv 1$, *функція* $\lambda(u,v)(f(x,y)-f(u,v))$ *обмежена знизу, коли* $y\ge v\ge 0$ *і* $a\ge x\ge u\ge 0$ *або* $x\ge u\ge 0$ *і* $a\ge y\ge v\ge 0$ $\forall a>0$, *і виконується умова* (4) *або* (5). *Тоді якщо* $\exists(\alpha,\beta)\in N_0^2 : \lambda(x,y)H_{\alpha,\beta}(x,y) = O(1)$ *або* $\lambda(x,y)C_{\alpha,\beta}(x,y)=O(1)$ $(x,y\to\infty)$, *то* $\lambda(x,y)f(x,y)=O(1)$ $(x,y\to\infty)$. *А якщо* $r=0$ *і* $\exists(\alpha,\beta)\in N_0^2 : \lambda(x,y)H_{\alpha,\beta}(x,y)=o(1)$ *або*

$\lambda(x, y)C_{\alpha,\beta}(x, y)=o(1)$ $(x, y\to\infty)$, *то* $\lambda(x, y)f(x, y)=o(1)$ $(x, y\to\infty)$.

Наслідок 2. *Нехай існує* $\delta > 0$ *таке, що для будь-якого* $t\in(0;\delta)$ *виконуються умови*

$$f(x, y+t) - f(x, y) \geq -a\frac{\sigma_2^2(y)\sigma_1(x)}{\lambda(x, y)}\left(\frac{P_2(y+t)}{P_2(y)}-1\right) \text{ і}$$

$$f(x+t, y) - f(x, y) \geq -a\frac{\sigma_1^2(x)\sigma_2(y)}{\lambda(x, y)}\left(\frac{P_1(x+t)}{P_1(x)}-1\right) \ \forall (x, y)\in R_+^2.$$

Тоді якщо $\lambda(x, y)H_{1,1}(x, y) = O(1)$ $(=o(1))$ $(x, y\to\infty)$, *то* $\lambda(x, y)f(x, y) = O(\sigma(x, y))$ $(=o(\sigma(x, y)))$ $(x, y\to\infty)$. *А якщо* $\sigma(x, y)\equiv 1$ *і* $\exists(a,\beta)$: $\lambda(x, y)H_{\alpha,\beta}(x, y) = O(1)$ $(=o(1))$ *або* $\lambda(x, y)C_{\alpha,\beta}(x, y) = O(1)$ $(=o(1))$ $(x, y\to\infty)$, *то* $\lambda(x, y)f(x, y)=O(1)$ $(=o(1))$ $(x, y\to\infty)$.

Наслідок 3. *Нехай* $f(x, y) = \int_0^x\int_0^y c(u, v)\,du\,dv$, *причому* $c(x, y) = 0$, *коли* $x\leq 1$ *або* $y\leq 1$, $\exists a>1$, $b>1$: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ *і*

$$c(x, y) \geq -d\frac{p(x, y)}{P_1^{\alpha}(x)+P_2^{b}(y)}$$

або (6)

$$|c(x, y)| \leq d\frac{p(x, y)}{P_1^{\alpha}(x)+P_2^{b}(y)} \quad \forall (x, y)\in R_+^2.$$

Тоді якщо $\lambda(x, y)H_{1,1}(x, y)=O(1)$ $(=o(1))$ $(x, y\to\infty)$, *то* $\sqrt[3]{\lambda(x, y)}\,f(x, y) = O(1)$ $(=o(1))$ $(x, y\to\infty)$. *А якщо* $\exists(a,\beta)$: $H_{\alpha,\beta}(x, y) = O(1)$ $(=o(1))$ *або* $C_{\alpha,\beta}(x, y)=O(1)$ $(=o(1))$ $(x, y\to\infty)$, *то* $f(x, y) = O(1)$ $(=o(1))$ $(x, y\to\infty)$.

Наслідок 4. *Нехай функція* f *задовольняє умову наслідку* 3 *і права частина нерівностей* (6) *має ще множник* $c_1(x, y)$, *де* $c_1(x, y) = \min\{\sigma_1(x), \sigma_2(y)\}$ *або* $c_1(x, y)=\sqrt{\sigma(x, y)}$. *Тоді якщо* $\lambda(x, y)H_{1,1}(x, y) = O(1)$ $(=o(1))$ $(x, y\to\infty)$, *то* $f(x, y)=O(1)$ $(=o(1))$ $(x, y\to\infty)$.

Наслідок 5. *Нехай виконано умови наслідку* 1,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\lambda_i(x)}{P_i(x)}\int_0^x\frac{p_i(x)}{\lambda_i(x)}dx = a_i, \quad i=1,2,$$

і $\lambda(x, y)H_{\alpha,\beta}(x, y)=S+o(1)$ $(x, y\to\infty)$ *або* $\lambda(x, y)C_{\alpha,\beta}(x, y) = S+o(1)$ $(x, y\to\infty)$. *Тоді*

$$\lambda(x, y)f(x, y) = \frac{S}{a_1^{\alpha}a_2^{b}}+o(1) \ (x, y\to\infty).$$

Наведені твердження узагальнюють результати робіт [1 – 6], а також теореми Кноппа, Харді – Літтлвуда і Челідзе (див., наприклад, [7, с. 358 – 360]), якщо мати на увазі класичні методи Чезаро підсумовування подвійних послідовностей.

3. ***Доведення теореми*** **1.** Легко бачити, що коли $x_k^* > x_k$, $y_k^* > y_k$, то

$$\frac{\int\limits_{x_k}^{x_k^*} p_1(u)\,du \int\limits_{y_k}^{y_k^*} p_2(v) \operatorname{Re} e^{i\theta_k} f(u,v)\lambda(x_k, y_k)/\sigma(x_k, y_k)\,dv}{\left(P_1\left(x_k^*\right) - P_1(x_k)\right)\left(P_2\left(y_k^*\right) - P_2(y_k)\right)} =$$

$$= \operatorname{Re} e^{i\theta_k}\left(\lambda(x_k, y_k)H_{1,1}\left(x_k^*, y_k^*\right) + \lambda(x_k, y_k)H_{1,1}\left(x_k, y_k\right)\frac{P_1(x_k)}{P_1\left(x_k^*\right)}\frac{P_2(y_k)}{P_2\left(y_k^*\right)} - \right.$$

$$- \lambda(x_k, y_k)H_{1,1}\left(x_k, y_k^*\right)\frac{P_1(x_k)}{P_1\left(x_k^*\right)} -$$

$$\left. - \lambda(x_k, y_k)H_{1,1}\left(x_k^*, y_k\right)\frac{P_2(y_k)}{P_2\left(y_k^*\right)}\right) \Bigg/ \left(\left(1 - \frac{P_1(x_k)}{P_1\left(x_k^*\right)}\right)\left(1 - \frac{P_2(y_k)}{P_2\left(y_k^*\right)}\right)\sigma(x_k, y_k)\right). \qquad (7)$$

Якщо точка $z = \infty$ є (p, λ, σ)-точкою функції f, то ліва, а тому і права частини рівності (7) прямують до $+\infty$, коли $k \to \infty$. Припустимо, що $\lambda(x, y)H_{1,1}(x, y) = O(1)$ $(x, y \to \infty)$. Тоді , враховуючи зауваження, зроблене після означення (p, λ, σ)-точки, та умову (3), дістаємо обмеженість правої частини рівності (7), що неможливо. Тому $\lambda(x, y)H_{1,1}(x, y) \neq O(1)$, коли точка $z = \infty$ є (p, λ, σ)-точкою функції f. Аналогічно доводимо, що $\lambda(x, y)H_{1,1}(x, y) \neq o(1)$ $(x, y \to \infty)$, коли точка $z = 0$ є (p, λ, σ)-точкою функції f.

Теорему 1 доведено.

4. Для доведення теореми 2 та наслідків 1 – 5 потрібні допоміжні твердження, що мають і самостійний інтерес у тауберовій теорії.

Лема 1. *Нехай функція f задовольняє умову* (4) *або* (5). *Тоді якщо* $\lambda(x, y)f(x, y) \neq O(\sigma(x, y))$ $(x, y \to \infty)$, *то точка* $z = \infty$ *є* (p, λ, σ)-*точкою функції f. А якщо* $r = 0$ *і* $\lambda(x, y)f(x, y) \neq o(\sigma(x, y))$ $(x, y \to \infty)$, *то точка* $z = 0$ *є* (p, λ, σ)-*точкою функції f.*

Лема 2. *Нехай функція f задовольняє умови наслідку* 1. *Тоді для довільних* $\alpha, \beta \in N_0$ *функції* $H_{\alpha,\beta}$ *і* $C_{\alpha,\beta}$ *також задовольняють відповідні умови.*

Лема 3. *Якщо функція f задовольняє умови наслідку* 2, *то вона задовольняє і умову* (4), *де* $r = 0$, $\sigma^*(u, v) = \sigma_1(u)$, $\sigma^{**}(u, v) = \sigma_2(v)$. *Якщо виконується умова* (6), *то виконується умова* (4) *або* (5), *де* $\sigma(x, y) = \lambda^{2/3}(x, y)$, $\sigma^*(x, y) = \sigma^{**}(x, y) = \sqrt{\sigma(x, y)}$. *А якщо виконуються умови наслідку* 4, *то виконуються умови теореми* 2, *де* $\sigma(x, y) = \lambda(x, y)$.

5. ***Доведення леми* 1.** Нехай функція f задовольняє умову (4), причому $\lambda(x, y)f(x, y) \neq O(\sigma(x, y))$ $(x, y \to \infty)$. Тоді

$$\exists x_k \uparrow +\infty,\ y_k \uparrow +\infty\colon f(x_k, y_k)\lambda(x_k, y_k)/\sigma(x_k, y_k) \to w \ (k \to \infty),$$

де $w = +\infty$ або $w = -\infty$.

Нехай $w = +\infty$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і знайдемо $x_0 = x_0(\varepsilon)$ і $\delta = \delta(\varepsilon)$ такі, що $\delta(\varepsilon) < 1$ і $(f(x, y) - f(u, v))\lambda(u, v)/\sigma(u, v) \geq -r - \varepsilon$, коли $x \geq u \geq x_0$, $y \geq v \geq x_0$, $\sigma^*(u, v)\left(1 - \frac{P_1(u)}{P_1(x)}\right) \leq \delta$ і $\sigma^{**}(u, v)\left(1 - \frac{P_2(v)}{P_2(y)}\right) \leq \delta$. Вважаємо, що $x_k \geq x_0$, $y_k \geq y_0$, $\sigma^*(x, y) = \sigma_1^*(x)\sigma_2^*(y)$, $\sigma^{**}(x, y) = \sigma_1^{**}(x)\sigma_2^{**}(y)$.

Для кожного $k \in N$ позначимо через x_k^* таке число, для якого $x_k \leq x_k^*$ і $\sigma_1^*\left(x_k^*\right)\left(1 - \frac{P_1(x_k)}{P_1\left(x_k^*\right)}\right)\sigma_2^*(y_k) = \delta$, але $\sigma_1^*(x_k)\left(1 - \frac{P_1\left(x_k\right)}{P_1\left(x_k^* + t\right)}\right)\sigma_2^*(y_k) > \delta \quad \forall t > 0$. Таке

x_k^* знайдеться внаслідок умови (1) та неперервності функції P_1. Аналогічно знаходимо $y_k^* > y_k$, для якого $\sigma^{**}(x_k, y_k)\left(1-\dfrac{P_2(y_k)}{P_2(y_k^*)}\right) = \delta \ \ \forall k$.

Звідси випливає, що для $(x, y) \in \Delta_k = \left[x_k; x_k^*\right] \times \left[y_k; y_k^*\right]$ виконується нерівність

$$(f(x, y) - f(x_k, y_k))\lambda(x_k, y_k)/\sigma(x_k, y_k) \geq -r - \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min_{(x,y)\in\Delta_k} f(x, y)\lambda(x_k, y_k)/\sigma(x_k, y_k) \geq$$

$$\geq f(x_k, y_k)\, \lambda(x_k, y_k)/\sigma(x_k, y_k) - r - \varepsilon \to +\infty \ \ (k \to \infty)$$

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(x_k; y_k)\left(1-\frac{P_1(x_k)}{P_1(x_k^*)}\right)\left(1-\frac{P_2(y_k)}{P_2(y_k^*)}\right) = \delta^2 > 0.$$

Отже, точка $z = \infty$ є (p, λ, σ)-точкою функції f, якщо

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k)\lambda(x_k, y_k)/\sigma(x_k, y_k) \to w = +\infty \ \ (k \to \infty).$$

Міркування для випадку $w = -\infty$ та для точки $z = 0$ аналогічні. Якщо функція задовольняє умову (5), то доведення аналогічне.

Лему 1 доведено.

6. ***Доведення леми 2.*** Обмеженість знизу функції $\lambda(u,v)\left(H_{0,1}(x,y) - H_{0,1}(u,v)\right)$, коли $y \geq v \geq 0$ і $a \geq x \geq u \geq 0$ або $x \geq u \geq 0$ і $a \geq y \geq v \geq 0 \ \ \forall a > 0$, випливає з відповідної обмеженості функції $\lambda(u,v)(f(x,y) - f(u,v))$.

Припустимо, що функція f задовольняє умову (4), де $\sigma = \sigma^* = \sigma^{**} \equiv 1$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists a_0 = a_0(\varepsilon)$ і $\delta = \delta(\varepsilon)$: $\delta < 1$ і $(f(x,y) - f(u,v))\lambda(u,v) \geq -r - \varepsilon$, коли $x \geq u \geq a_0$, $y \geq v \geq a_0$, $1 - \dfrac{P_1(u)}{P_1(x)} \leq \delta$ і $1 - \dfrac{P_2(v)}{P_2(y)} \leq \delta$.

Візьмемо довільні фіксовані числа x та u: $x > u \geq a_0$ і позначимо $x_0 = u$, а x_{k+1} — це таке число, для якого $x_{k+1} > x_k$ і $1 - \dfrac{P_1(x_k)}{P_1(x_{k+1})} = \delta$, але $1 - \dfrac{P_1(x_k)}{P_1(x_{k+1}+t)} > \delta \ \ \forall t > 0$. Тоді зрозуміло, що $x_k \to +\infty$ і тому $\exists\, \theta$: $x_\theta < x \geq \geq x_{\theta+1}$. Якщо $\theta = 0$, то $\left(1-\dfrac{P_1(u)}{P_1(x)}\right) \leq \delta$, $\left(1-\dfrac{P_2(y)}{P_2(y)}\right) \leq \delta \Rightarrow \Rightarrow (f(x,y) - f(u,y))\lambda(u,y) \geq -r - \varepsilon$. Нехай $\theta > 0$. Тоді $P_1(x) \leq P_1(x_{\theta+1})$ і тому, враховуючи побудову (x_k) та умову (3), маємо

$$f(x,y) - f(u,y) = \sum_{k=0}^{\theta-1}\left(f(x_{k+1}, y) - f(x_k, y)\right) + f(x,y) - f(x_\theta, y) \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{\theta} \frac{-r-\varepsilon}{\lambda(x_k, y)} \geq \frac{-C_1(\theta+1)}{\lambda(u,y)}.$$

Окрім того,

$$\frac{P_1(x)}{P_1(u)} \geq \frac{P_1(x_\theta)}{P_1(x_0)} = \prod_{k=0}^{\theta-1} \frac{P_1(x_{k+1})}{P_1(x_k)} = \prod_{k=0}^{\theta-1} \frac{1}{1-\delta} = \left(\frac{1}{1-\delta}\right)^{\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\frac{P_1(x)}{P_1(u)} \geq \theta \ln\frac{1}{1-\delta} \Rightarrow \theta \leq C_2 \ln\frac{P_1(x)}{P_1(u)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x, y) - f(u, y) \geq \frac{-C_3}{\lambda(u, y)}\left(1 + \frac{P_1(x)}{P_1(u)}\right) \quad \forall x \geq u \geq a_0, \quad y \geq a_0.$$

Враховуючи обмеженість знизу функції $\lambda(u, y)(f(x, y) - f(u, y))$, коли $a_0 \geq x \geq \geq u \geq 0$ і $y \geq 0$, можна вважати правильність останньої нерівності $\forall x, y, u : x \geq \geq u,\ y \geq 0$. Аналогічно доводимо нерівність

$$f(x, y) - f(x, v) \geq \frac{-C_3}{\lambda(x, v)}\left(1 + \frac{P_2(y)}{P_2(v)}\right) \quad \forall x, y, v\colon y \geq v, \quad x \geq 0.$$

Враховуючи цю нерівність та умову (3), маємо

$$\forall x \geq a_0,\ y \geq 0 \ \text{ і } \ \forall t \in (0;1)\colon H_{0,1}(x, y+t) - H_{0,1}(x, y) =$$

$$= \frac{1}{P_2(y+t)P_2(y)}\left(P_2(y)\int_0^{y+t} p_2(v) f(x, v)\,dv - P_2(y+t)\int_0^{y} p_2(v) f(x, v)\,dv\right) =$$

$$= \frac{1}{P_2(y+t)P_2(y)} \int_y^{y+t} p_2(z)\,dz \int_0^{y} p_2(v)(f(x, z) - f(x, v))\,dv \geq$$

$$\geq -C_3 \frac{P_2(y+t) - P_2(y)}{P_2(y+t)P_2(y)} \int_0^{y} \frac{p_2(v)}{\lambda(x, v)}\left(1 + \ln\frac{P_2(y+t)}{P_2(v)}\right) \geq$$

$$\geq \frac{-C_4}{\lambda(x, y)} \frac{P_2(y+t) - P_2(y)}{P_2(y+t)P_2(y)} \int_0^{y} p_2(v)\left(\frac{P_2(y)}{P_2(v)}\right)^{\gamma}\left(1 + \ln\frac{P_2(y)}{P_2(v)}\right) dv.$$

Оскільки $\ln x < \frac{1}{\alpha} x^{\alpha}$ $\forall x > 0$ і $\forall \alpha > 0$, то виберемо α настільки малим, щоб $\gamma_1 = \gamma + \alpha < 1$. Враховуючи цей вибір, одержуємо

$$\left(\frac{P_2(y)}{P_2(v)}\right)^{\gamma} \ln\frac{P_2(y)}{P_2(v)} \leq \frac{1}{\alpha}\left(\frac{P_2(y)}{P_2(v)}\right)^{\gamma} \Rightarrow \frac{1}{P_2(y)} \int_0^{y} p_2(v)\left(\frac{P_2(y)}{P_2(v)}\right)^{\gamma}\left(1 + \ln\frac{P_2(y)}{P_2(v)}\right) dv \leq$$

$$\leq \frac{1}{P_2^{1-\gamma}(y)} \int_0^{y} \frac{p_2(v)\,dv}{P_2^{\gamma}(v)} + \frac{1}{\alpha P_2^{1-\gamma_1}(y)} \int_0^{y} \frac{p_2(v)\,dv}{P_2^{\gamma_1}(v)} \leq C_5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_{0,1}(x, y+t) - H_{0,1}(x, y) \geq -\frac{C_5}{\lambda(x, y)} \frac{P_2(y+t) - P_2(y)}{P_2(y)} \quad \forall x, y, t\colon t \in (0;1), \quad x \geq a_0.$$

Звідси випливає, що коли $y > v + 1$, то $\exists n \in N\colon \frac{y - v}{n} = t \leq 1$ і

$$y = v + nt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_{0,1}(x, y) - H_{0,1}(x, v) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(H_{0,1}(x, v + (k+1)t) - H_{0,1}(x, v + kt)\right) \geq$$

$$\geq -\frac{C_6}{\lambda(x,v)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_2(v+(k+1)t) - P_2(v+kt)}{P_2(v+kt)} \geq$$

$$\geq -\frac{C_7}{\lambda(x,v)} \frac{P_2(y) - P_2(v)}{P_2(v)} \quad \forall x, y, v \colon y \geq v, \ x \geq a_0,$$

а тому

$$\underline{\lim}\Big(H_{0,1}(x,y) - H_{0,1}(x,v)\Big)\lambda(x,v) \geq 0,$$

$$\text{коли } y > v \to \infty, \quad x \to \infty \ \text{ і } \ 1 - \frac{P_2(v)}{P_2(y)} \to 0.$$

Умова

$$\underline{\lim}\Big(H_{0,1}(x,y) - H_{0,1}(u,y)\Big)\lambda(u,y) \geq 0,$$

$$\text{коли } x > u \to \infty, \quad y \to \infty \ \text{ і } \ 1 - \frac{P_1(u)}{P_1(x)} \to 0,$$

доводиться значно простіше. Тепер неважко показати, що $H_{0,1}(x,y)$ задовольняє умову (4), де $\sigma \equiv 1$, а $r = 0$.

Для функції $H_{1,0}(x,y)$ міркування аналогічні.

Закінчуємо доведення леми 2 методом математичної індукції.

7. *Доведення леми 3.* Нехай існує $\delta > 0$ таке, що для довільного $t \in (0; \delta)$ виконуються умови

$$f(x, y+t) - f(x,y) \geq -a\frac{\sigma_2^2(y)\sigma_1(x)}{\lambda(x,y)}\left(\frac{P_2(y+t)}{P_2(y)} - 1\right),$$

$$f(x+t, y) - f(x,y) \geq -a\frac{\sigma_1^2(x)\sigma_1(y)}{\lambda(x,y)}\left(\frac{P_1(x+t)}{P_1(x)} - 1\right).$$

Тоді $(\forall y, v \colon y > v + \delta)$ $\exists n \in N \colon \dfrac{y-v}{n} = t < \delta$ і $y = v + tn$. Звідси, враховуючи умови (3), одержуємо

$$f(x,y) - f(x,v) = \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(x, v+(k+1)t) - f(x, v+kt)\big) \geq$$

$$\geq -a\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sigma_2^2(v+kt)\sigma_1(x)}{\lambda(x, v+kt)}\left(\frac{P_2(v+(k+1)t)}{P_2(v+kt)} - 1\right) \geq$$

$$\geq -a_2\frac{\sigma_2^2(y)\sigma_1(x)}{\lambda(x,v)}\frac{P_2(y) - P_2(v)}{P_2(v)} \quad \forall x, y, v \colon y > v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (f(x,y) - f(x,v))\lambda(x,v) / \sigma(x,v) \geq -a_3\sigma_2(v)\left(\frac{P_2(y)}{P_2(v)} - 1\right), \quad \text{коли} \quad \frac{P_2(y)}{P_2(v)} \leq 2,$$

тобто

$$\underline{\lim}(f(x,y) - f(x,v))\lambda(x,v) / \sigma(x,v) \geq 0,$$

$$\text{коли } y > v \to \infty, \quad x \to \infty \quad \text{і} \quad \sigma_2(v)\left(\frac{P_2(y)}{P_2(v)} - 1\right) \to 0.$$

Так само доводимо, що

$$\underline{\lim}(f(x,y) - f(u,y))\lambda(u,y) / \sigma(u,y) \geq 0,$$

$$\text{коли } x > u \to \infty, \quad y \to \infty \quad \text{і} \quad \sigma_1(u)\left(\frac{P_1(x)}{P_1(u)} - 1\right) \to 0.$$

Тому виконується умова (4), де $r = 0$ і $\sigma^*(u, v) = \sigma_1(u)$, а $\sigma^{**}(u, v) = \sigma_2(v)$.

Нехай має місце перша нерівність умови (6). Тоді для x, y, v таких, що $y > v$, маємо

$$f(x, y) - f(x, v) = \int_0^x du \int_v^y c(u, t)dt \geq -d\int_0^x du \int_v^y \frac{p_1(u)p_2(t)}{P_1^a(u) + P_2^b(t)}dt =$$

$$= -d\int_v^y \frac{p_2(t)\,dt}{P_2^b(t)} \int_0^x \frac{\left(p_1(u)/P_2^{b-1}(t)\right)P_2^{b-1}(t)}{1 + \left(\frac{P_1(u)}{P_2^{b-1}(t)}\right)^a}du \geq -d_1\int_v^y \frac{p_2(t)}{P_2(t)}dt \int_0^\infty \frac{dz}{1+z^a} =$$

$$= -d_1\frac{\pi}{a\sin(\pi/a)}\int_v^y \frac{p_2(t)}{P_2(t)}dt \geq -d_2\left(\frac{P_2(y)}{P_2(v)} - 1\right),$$

оскільки $a(b-1) = b$ (ми скористалися рівністю

$$\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^a} = \frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi}{a} \quad \forall\, a > 1$$

[8, с. 184]). Аналогічно доводимо нерівність

$$f(x, y) - f(u, y) \geq -d_2\left(\frac{P_1(x)}{P_1(u)} - 1\right) \quad \forall\, x, y, u\colon x \geq u.$$

Звідси отримуємо умову (4), де $\lambda \equiv \sigma \equiv \sigma^* \equiv \sigma^{**} \equiv 1$.

Якщо тепер вибрати $\sigma(x, y) = \lambda^{2/3}(x, y)$, то, враховуючи доведені нерівності, одержуємо

$$(f(x, y) - f(x, v))\lambda(x, v)/\sigma(x, v) \geq -d_2\sqrt{\sigma(x, v)}\left(\frac{P_2(y)}{P_2(v)} - 1\right), \quad y \geq v,$$

$$(f(x, y) - f(u, y))\lambda(u, y)/\sigma(u, y) \geq -d_2\sqrt{\sigma(u, y)}\left(\frac{P_1(x)}{P_1(u)} - 1\right), \quad x \geq u.$$

Тому виконується умова (4), де $\sigma(x, y) = \lambda^{2/3}(x, y)$, $\sigma^*(x, y) = \sqrt{\sigma(x, y)} = \sigma^{**}(x, y)$.

Нехай, нарешті, виконуються умови наслідку 4, тобто, наприклад,

$$c(x, y) \geq -d\,c_1(x, y)\frac{p_1(x)p_2(y)}{P_1^a(x) + P_2^b(y)} \quad \forall (x, y) \in R_+^2,$$

де $c_1(x, y) = \min\{\sigma_1(x), \sigma_2(y)\}$ або $c_1(x, y) = \sqrt{\sigma(x, y)}$. Тоді для $(u, v) \in [0; x] \times [0; y]$ $0 < c_1(u, v) \leq C c_1(x, y)$ і тому з проведених вище міркувань випливає, що коли $c_1(x, y) = \min\{\sigma_1(x), \sigma_2(y)\}$, то

$$f(x, y) - f(u, y) \geq -d_1\sigma_1(u)\left(\frac{P_1(x)}{P_1(u)} - 1\right) \quad \forall\, x, y, u\colon x \geq u,$$

$$f(x, y) - f(x, v) \geq -d_1\sigma_2(v)\left(\frac{P_2(y)}{P_2(v)} - 1\right) \quad \forall\, x, y, u\colon y \geq v.$$

Тому виконується умова (4), де $\lambda(x, y) = \sigma(x, y)$, $\sigma^*(x, y) = \sigma_1(x)$, а $\sigma^{**}(x, y) = \sigma_2(y)$.

Аналогічно доводимо, що коли $c_1(x, y) = \sqrt{\sigma(x, y)}$, то має місце умова (4), де $\lambda(x, y) = \sigma(x, y)$, $\sigma^*(x, y) = \sigma^{**}(x, y) = \sqrt{\sigma(x, y)}$.

Лему 3 доведено.

8. Теорема 2 випливає з теореми 1 та леми 1, наслідок 1 — з теореми 2 та леми 2. Наслідки 2 – 4 випливають з теореми 2 або наслідку 1 і леми 3. Наслідок 5 можна довести методом, яким доведено аналогічне твердження з роботи [1].

1. *Михалин Г. А.* Тауберовы теоремы с остатком для методов суммирования типа методов Гельдера и Чезаро // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 7. – С. 918 – 923.
2. *Михалин Г. А.* Тауберовы теоремы с остаточным членом для (H, p_n, α)-методов суммирования // Приближ. методы мат. анализа: Сб. науч. тр. – Киев: Изд-во Киев. пед. ин-та, 1980. – С. 113 – 124.
3. *Давыдов Н. А.* Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов // Мат. сб. – 1956. – **38(80)**, вып. 4. – С. 509 – 524.
4. *Бурляй М. Ф.* Об одном свойстве $(\overline{R}, p_m, q_n)$-методов суммирования двойных рядов и теоремы тауберова типа // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1972. – Вып. 16. – С. 3 – 12.
5. *Калаталова М. А.* (C)-свойство методов Чезаро суммирования двойных рядов // Укр. мат. журн. – 1971. – **23**, № 3. – С. 392 – 400.
6. *Калаталова М. А.* Теоремы тауберова типа для методов Чезаро суммирования двойных рядов // Там же. – 1971. – **23**, № 6. – С. 733–744.
7. *Субханкулов М. А.* Тауберовы теоремы с остатком. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
8. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов. – М.: Наука, 1973. – 228 с.

Одержано 24.03.98,
після доопрацювання — 18.11.98