УДК 519.21

М. М. Леоненко, М. М. Шарапов (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

ГАУССІВСЬКІ ТА НЕГАУССІВСЬКІ ГРАНИЧНІ РОЗПОДІЛИ ОЦІНОК КОЕФІЦІЄНТІВ РЕГРЕСІЇ ЧАСОВОГО РЯДУ ІЗ ДОВГОЮ ПАМ'ЯТТЮ

We obtain Gaussian and non-Gaussian distributions of estimates for coefficients of regression of a long-memory time series.

Отримано гауссівські та негауссівські розподіли оцінок коефіцієнтів регресії часового ряду із довгою пам'яттю.

1. Вступ. Останнім часом значна увага приділяється дослідженню статистичних моделей для часових рядів із довгою пам'яттю (слабким спаданням кореляції або сильною залежністю). Це означає, що спектральна щільність необмежена в деякій точці (найчастіше у точці нуль) або кореляційна функція не сумовна (тобто слабко спадає). Такі емпіричні феномени досить часто зустрічаються, зокрема, серед економічних даних (ціни, як правило, мають довгу пам'ять). Огляд основних результатів статистичного аналізу часових рядів із дискретним часом та довгою пам'яттю можна знайти у роботі Берана [1]. В ній можна знайти перелік робіт прикладного характеру, в яких емпіричні дані характеризуються далекою пам'яттю. Оскільки в цій роботі досліджуються оцінки коефіцієнтів регресії, то згадаємо роботи Яджіми [2, 3], Кюнша, Берана та Хемпела [4], Дахлхауза [5] та Робінсона і Хідалго [6], у яких досліджуються розподіли оцінок коефіцієнтів регресії часових рядів із далекою пам'яттю. Так само, як у цитованих вище роботах, вважаємо відомим параметр, який характеризує далеку пам'ять (його називають також параметром Харста, фрактальним параметром або параметром автомодельності). Задача статистичного оцінювання цього параметра розглядалась багатьма авторами (див., наприклад, огляд в [1], а також роботи Робінсона [7, 8]). На відміну від цитованих вище робіт, у яких асимптотичні розподіли оцінок коефіцієнтів регресії були гауссівськими, у цій роботі отримано також систему негауссівських розподілів оцінок найменших квадратів коефіцієнтів регресії часових рядів із далекою пам'яттю. Ці розподіли є узагальненням класу розподілів, які виникають при дослідженні нелінійних функціоналів від випадкових процесів та полів із далекою пам'яттю. Зараз існує багато результатів у цій області, тому відзначимо лише основні роботи на цю тему, які належать Текку [9] та Добрушину і Майору [10]. При отриманні негауссівських граничних розподілів використовуються ідеї згаданих вище робіт, а також ідеї роботи Бермана [11], в якій негауссівські розподіли функціоналів від процесів із неперервним часом отримано з допомогою відповідних результатів для процесів із дискретним часом. А в цій роботі за допомогою узагальнення одного результату Бермана [10] на функціонали більш складної структури асимптотичні розподіли для перенормованих функціоналів від процесів із дискретним часом одержано з допомогою відповідних результатів для процесів із неперервним параметром, які отримано у роботі Леоненка і Сілак-Бенчіч [12]. Відзначимо, що моделі стаціонарних процесів із неперервним часом та далекою пам'яттю запропоновані у роботах Віано, Деньо та Опенхейма [13], Комте [14], Чамберса [15] та ін. З огляду на це запропоновані у цій роботі теореми редукції граничних теорем для функціоналів від процесів із дискретним та неперервним часом, мають більш загальний інтерес. Зазначимо, що при доведенні необхідних нам результатів, які стосуються випадкових процесів із неперервним часом, істотно використовуються спеціальні теореми тауберового типу (див., наприклад, книгу Бінгхема, Голді та Тойгельса [16], Іванова та Леоненка [17] або статтю Леоненка та Оленка [18]).

2. Теорема редукції. Сформулюємо результати, які дають можливість знаходити асимптотичні розподіли перенормованих локальних функціоналів спеціальної структури від процесів із дискретним часом, якщо відомі асимптотичні розподіли аналогічних функціоналів від процесів із неперервним часом, та навпаки.

Усі випадкові величини розглядаються на повному ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$. Нехай $\varphi(u) = e^{-u^2} / \sqrt{2\pi}$, $u \in R^1 = (-\infty, +\infty)$, — щільність розподілу стандартної гауссівської величини, $L^2(R^1, \varphi(u)\, du)$ — гільбертів простір дійсних функцій таких, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G^2(u)\varphi(u)\, du < \infty. \tag{1}$$

При умові (1) функція G допускає розвинення у вигляді ряду

$$G(u) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k H_k(u) / k!, \quad C_k = \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) H_k(u) \varphi(u)\, du, \tag{2}$$

який збігається у просторі $L_2(R^1, \varphi(u)\, du)$. У формулах (2) $\{H_k(u)\}_{k=0}^{\infty}$ — поліноми Чебишева – Ерміта із старшим коефіцієнтом, що дорівнює одиниці, які утворюють повну ортогональну систему у просторі $L_2(R^1, \varphi(u)\, du)$. Добре відомо, що $H_0(u) = 1$, $H_1(u) = u$, $H_2(u) = u^2 - 1, \ldots$.

Введемо такий комплекс умов.

***A*.** Нехай $\xi_c(t)$, $t \in R^1$, — дійсний вимірний неперервний у середньому квадратичному стаціонарний гауссівський процес із неперервним часом, причому $E\xi_c(t) = 0$, $E\xi_c^2(0) = 1$, а кореляційна функція

$$R(t) = \operatorname{cov}(\xi_c(0), \xi_c(t)) = \frac{L(|t|)}{|t|^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{3}$$

де $L(t)$, $t > 0$, — невід'ємна функція, що повільно змінюється на нескінченності ($\lim_{t\to\infty} L(ts)/L(t) = 1 \quad \forall s > 0$) та обмежена у кожному обмеженому інтервалі.

***Зауваження* 1.** При умові A функція $R(t)$, $t \in R^1$, є неперервною, але не є інтегровною, причому якщо процес має спектральну щільність $f_c(\lambda) = f_c(|\lambda|)$, $\lambda \in R^1$, яка монотонно прямує до нуля при $\lambda \geq \lambda_0 > 0$, то при $\lambda \to 0$

$$f_c(\lambda) \sim \frac{\alpha |\lambda|^{\alpha-1} L(1/|\lambda|)}{[2\Gamma(1+\alpha)\cos(\alpha\pi/2)]}. \tag{4}$$

Асимптотична формула (4) є наслідком спеціальної тауберової теореми (див., наприклад, [15 – 17]). Таким чином, спектральна щільність необмежена в нулі. Цей феномен називаємо далекою пам'яттю (див. також [13 – 15]).

***B*.** Функція $G \in L_2(R^1, \varphi(u)\, du)$ має ермітів ранг $m \geq 1$, тобто $C_1 = C_2 = \ldots$ $\ldots = C_{m-1} = 0$, $C_m \neq 0$ для деякого $m \geq 1$. Припускаємо також, що $C_0 = 0$.

***Зауваження* 2.** Умова B віддзеркалює деякі властивості симетрії функції $G(u)$. Наприклад, якщо функція $G(u)$ — непарна $(G(-u) = -G(u),\ u \geq 0)$, то $C_1 \neq 0$, якщо функція $G(u)$ — парна $(G(-u) = G(u),\ u \geq 0)$, то $C_1 = 0$, але $C_2 \neq 0$.

***C*.** Нехай $g(t)$, $t \in R^1$, — дійсна вимірна додатна при $t > 0$ функція, причому вона має невід'ємний порядок зростання, тобто існує $\nu \geq 0$ таке, що при $t > 0$ $O(1) \leq g(t) \leq O(t^{\nu})$, та задовольняє такі умови:

1) для цілого $m \geq 1$, визначеного умовою B, при $0 < \alpha m < 1$ існує скінченна границя

$$\lim_{T\to\infty} g^{-2}(T) \int_0^1 \int_0^1 \left[g(Tu)\, g(Tv) / |u-v|^{m\alpha} \right] du\, dv = l \in (0, \infty);$$

2) існує скінченна границя

$$\lim_{T\to\infty} g^{-2}(T) \int_0^1 g^2(uT)\, du = L \in (0, \infty);$$

3) для функції R, яка визначається умовою $\boldsymbol{A}$, та цілого $m > 1$, визначеного умовою $\boldsymbol{B}$, виконується умова

$$\lim_{T\to\infty} \left[R^m(T) T^2 g^2(T) \right]^{-1} = 0.$$

***Зауваження* 3.** Надалі основним прикладом буде функція $g(t) = t^{\nu}$, $\nu \ge 0$, яка задовольняє умову $\boldsymbol{C}$, причому

$$L = (2\nu+1)^{-1}, \quad l = \int_0^1 \int_0^1 \left[u^{\nu} v^{\nu} / |u-v|^{m\alpha} \right] du\, dv, \quad 0 < \alpha m < 1. \tag{5}$$

$\boldsymbol{A'}$. Нехай $\xi_d(t) = \xi_c(t)$ при $t \in Z^1 = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ — стаціонарна гауссівська послідовність, що утворюється із випадкового процесу $\xi_c(t)$, $t \in R^1$, який задовольняє умову $\boldsymbol{A}$, якщо розглядати його у дискретні моменти часу.

***Зауваження* 4.** За умов $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{A'}$ кореляційна функція часового ряду $\xi_d(t)$, $t \in Z^1$, також визначається формулою (3) при $t \in Z^1$, тобто вона не є сумовною, а спектральна щільність $f_d(\lambda)$, $-\pi \le \lambda < \pi$, процесу $\xi_d(t)$, $t \in Z^1$, має вигляд

$$f_d(\lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_c(\lambda + 2k\pi) \sim \alpha |\lambda|^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \Big/ \left[2\Gamma(1+\alpha) \cos\frac{\alpha\pi}{2} \right] \tag{6}$$

при $\lambda \to 0$. Тобто $f_d(0) = \infty$. Таким чином, процес $\xi_d(t)$, $t \in Z^1$, — стаціонарний гауссівський часовий ряд з далекою пам'яттю.

При умовах $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{C}$ введемо функціонали

$$F_T = \int_0^T g(t) G(\xi_c(t))\, dt \Bigg/ \left[\frac{C_m^2}{m!} \int_0^T \int_0^T R^m(|t-s|)\, g(t)\, g(s)\, dt\, ds \right]^{1/2} \tag{7}$$

та

$$F'_T = \sum_{t=0}^{T-1} g(t) G(\xi_d(t)) \Bigg/ \left[\frac{C_m^2}{m!} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{s=0}^{T-1} R^m(|t-s|)\, g(t)\, g(s) \right]^{1/2}. \tag{8}$$

Сформулюємо теорему про те, що функціонали F_T та F'_T мають однакові асимптотичні розподіли при $T \to \infty$, якщо один із них існує.

Теорема 1. *За умов* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{B}$ *та* $\boldsymbol{C}$ *при* $T \to \infty$

$$\lim E(F_T - F'_T)^2 = 0.$$

Доведення теореми подано у пункті 4. Відзначимо лише, що ця теорема узагальнює лему 5.1 роботи [11] (де розглядається частинний випадок теореми 1, а саме $g(t) \equiv 1$, $m = 2$, $G(u) = u^2 - 1$).

Із теореми 1 випливає таке твердження: якщо існує граничний розподіл одного з функціоналів F_T та F'_T, то існує граничний розподіл іншого, причому вони збігаються. Таким чином, замість того, щоб досліджувати асимптотичні розподіли певних нелінійних функціоналів від процесів із дискретним часом, можна досліджувати аналогічні нелінійні функціонали від процесів із неперервним часом, або навпаки. Цей прийом буде використовуватись далі у пункті 3. Відзначимо лише, що побудова дискретного аналога граничного переходу, який зроблено у роботі [12] для процесів із неперервним часом, викликає певні труднощі, пов'язані із заміною змінних у кратних стохастичних інтегралах Іто – Вінера, які використовувались у [12], тому що згадані вище заміни змінних, якщо їх виконувати для процесів із дискретним часом, деформують область визначення гауссівського білого шуму.

3. Оцінювання коефіцієнтів регресії. Нехай при $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ спостерігається випадкова послідовність

$$\zeta(t) = \theta g(t) + \varepsilon(t), \tag{9}$$

де $g(t)$, $t \in Z^1$, — відома функція регресії, яка задовольняє умову $\boldsymbol{C}$, θ — невідомий коефіцієнт регресії, який треба оцінити за результатами спостережень, а $\varepsilon(t) = G(\xi_d(t))$, $t \in Z^1$, — стаціонарний випадковий процес, причому виконуються умови $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{B}$ (із того, що $C_0 = 0$, випливає, що $E\varepsilon(t) = 0$). Як уже зазначалося, спектральна щільність „випадкового шуму" $\varepsilon(t)$, $t \in Z^1$, необмежена у точці нуль (див. формулу (6)); крім того, процес $\varepsilon(t)$, $t \in Z^1$, не обов'язково є гауссівським. Ці обставини ведуть до того, що класичні результати теорії лінійної регресії часових рядів (див., наприклад, Гренандер та Розенблатт [19] або Розанов [20]) не можуть бути використані у цій ситуації, бо вимагають обмеженості та неперервності спектральної щільності „випадкового шуму". Результати робіт [1 – 6] показують, що теорія регресії часових рядів із далекою пам'яттю містить контрасти у порівнянні з теорією регресії часових рядів із слабкою пам'яттю. В даній статті продовжуються наведені вище дослідження. Зокрема, нижче доведено, що при негауссівському „випадковому шумові" можуть з'являтися негауссівські граничні розподіли оцінок найменших квадратів (ОНК) коефіцієнтів регресії.

Зауважимо, що ОНК невідомого коефіцієнта регресії θ у схемі регресії (9) має вигляд

$$\hat{\theta}_T = \sum_{t=0}^{T-1} g(t)\zeta(t) / Q_T = \theta + \sum_{t=0}^{T-1} g(t)\varepsilon(t) / Q_T, \tag{10}$$

де функція $Q_T = \sum_{t=0}^{T-1} g^2(t)$.

Відомо (див., наприклад, лемму 2.1.1 [17]), що

$$EH_m(\xi)H_r(\eta) = \delta_m^r \rho^m m!, \quad m \geq 1, \quad r \geq 1, \tag{11}$$

де δ_m^r — символ Кронекера, а (ξ, η) — гауссівські вектори, для яких $E\xi = E\eta = 0$, $E\xi^2 = E\eta^2 = 1$, $E\xi\eta = \rho$.

Із (10) та (11) отримаємо наступні вирази для перших двох моментів ОНК:

$$E\hat{\theta}_T = \theta, \quad D\hat{\theta}_T = Q_T^{-2} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{C_k^2}{k!} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{s=0}^{T-1} g(t) g(s) R^k(|t-s|).$$

Теорема 2. *За умов* $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ *при* $T \to \infty$

$$D\hat{\theta}_T = l \frac{C_m^2}{m!} Q_T^{-2} T^{2-m\alpha} L^m(T) g^2(t) (1 + o(1)).$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 1 роботи [13].

***Зауваження* 5.** Для поліноміальної регресії $g(t) = t^{\nu}$, $\nu \geq 0$, умови $\boldsymbol{C}$ виконуються, причому при $T \to \infty$

$$D\hat{\theta}_T = \left(l C_m^2 / Lm!\right) T^{-2(\alpha+\nu)} L^2(T) (1 + o(1)),$$

де постійні l та L визначені у зауваженні 3. Тому $\hat{\theta}_T$ є консистентною оцінкою невідомого параметра θ. Проблеми ефективності ОНК досліджувались у роботах [1–4].

Із результатів цих робіт випливає, що часто ефективність ОНК коефіцієнта поліноміальної регресії є досить високою для схеми регресії із далекою пам'яттю.

Введемо функціонали:

$$X_T = [\hat{\theta}_T - \theta] / \sqrt{D\hat{\theta}}$$

та

$$X_{m,T} = \frac{C_m}{m!} \sum_{t=0}^{T-1} g(t) H_m(\xi_d(t)) \Big/ \left[\frac{C_m^2}{m!} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{s=0}^{T-1} g(t) g(s) R^m(|t-s|) \right]^{1/2}. \qquad (12)$$

Наступна теорема редукції є типовою при дослідженні граничних теорем для локальних функціоналів від випадкових процесів із далекою пам'яттю (див., наприклад, [9, 10]).

Теорема 3. *Якщо виконуються умови* $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, *то при* $T \to \infty$

$$\lim E(X_T - X_{m,T})^2 = 0.$$

Зауважимо, що при $g(t) \equiv 1$ теорему 3 доведено у роботах [9, 10].

Таким чином, теорема 3 редукує задачу знаходження асимптотичних розподілів функціоналів X_T, які є перенормованими ОНК невідомого коефіцієнта регресії θ, до асимптотичних розподілів функціонала $X_{m,T}$, а теорема 1 редукує задачу знаходження асимптотичних розподілів функціонала $X_{m,T}$ до знаходження асимптотичних розподілів функціонала F_T, якщо вибрати у формулах (7) та (8) функцію $G(u) = (C_m / m!) H_m(u)$, де $H_m(u)$ — m-й поліном Чебишова – Ерміта. Але у цьому випадку асимптотичні розподіли функціонала F_T знайдені у роботі [12]. Тому із теорем 1 – 3 та теореми 5 [12] випливає наступна теорема, яка описує гауссівські та негауссівські граничні розподіли ОНК коефіцієнтів регресії і є основним результатом даної статті.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{B}$ *та* $\boldsymbol{C}$ *при* $0 < \alpha m < 1$, *причому існує функція* $g'(u)$ *така, що при* $T \to \infty$

$$\left| \frac{g(uT)}{g(T)} - g'(u) \right| \to 0 \qquad (13)$$

рівномірно по $u \in [0, 1]$, *причому*

$$\int_{R^m} \left| \int_0^1 g'(u) e^{iu(\lambda_1 + \ldots + \lambda_m)} du \right|^2 \frac{d\lambda_1 \ldots d\lambda_m}{|\lambda_1 \ldots \lambda_m|^{1-\alpha}} < \infty, \quad 0 < \alpha m < 1, \qquad (14)$$

де $m \geq 1$ — *ермітів ранг функції* G (*див. умову* $\boldsymbol{B}$). *Тоді при* $T \to \infty$ *випадкові величини* X_T (*див.* (12)) *збігаються за розподілами до випадкової величини*

$$X_m = \frac{\operatorname{sign}\{C_m\} \sqrt{\alpha^m}}{\sqrt{m! 2^m \Gamma^m(1+\alpha) \cos^m \frac{\alpha\pi}{2} l}} \int_{R^m}' \frac{K(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) W(d\lambda_1) \ldots W(d\lambda_m)}{|\lambda_1 \ldots \lambda_m|^{(1-\alpha)/2}}, \qquad (15)$$

де в правій частині стоїть кратний стохастичний інтеграл Іто – Вінера $\left(\int_{R^m}' \ldots\right)$ *по комплексному гауссівському білому шуму* W *в* R^1 (*інтегрування по гіперплощинах* $\lambda_i = \pm\lambda_j$, $i, j = 1, \ldots, m$, $i \neq j$, *виключається, детальніше див.* [9, 10]), *а* $K(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \int_0^1 g'(u) e^{iu(\lambda_1 + \ldots + \lambda_m)} du$.

***Зауваження* 6.** Деякі властивості величин X_m можна знайти в роботі [12] (а при $g(t) \equiv 1$ — у [9, 10]). Відзначимо лише, що для будь-якого $m \ge 1$ $EX_m = 0$, $EX_m^2 < \infty$.

Для степеневої регресії $g(t) = t^{\nu}$ умови (13) та (14) виконуються, причому $g'(u) = u^{\nu}$, $\nu > 0$; а при $m = 1$ та цілому ν функція

$$K(\lambda) = \frac{1}{i^{\nu}} \frac{d^{\nu}}{d\lambda^{\nu}} \left(\frac{e^{i\lambda} - 1}{i\lambda} \right), \ \lambda \in R^1, \ \nu \ge 0$$

(у випадку $\nu = 0$ вважаємо $K(\lambda) = \dfrac{e^{i\lambda} - 1}{i\lambda}$, $\lambda \in R^1$).

При $m \ge 1$ та $\nu = 0$

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \left(e^{i(\lambda_1 + \ldots + \lambda_m)} - 1 \right) / [i(\lambda_1 + \ldots + \lambda_m)].$$

Величини X_m, $m \ge 2$, не є гауссівськими. Детальне вивчення випадкових величин X_m є цікавою нерозв'язаною задачею, так само як оцінювання ермітового рангу $m \ge 1$ та коефіцієнта C_m за результатами спостережень.

***Зауваження* 7.** Як уже відзначалося, задача статистичного оцінювання параметра $\alpha \in (0, 1)$ розглядалась в роботах [1, 7, 8].

4. Доведення. У цьому пункті замість $\xi_d(t)$ та $\xi_c(t)$ пишемо просто $\xi(t)$, тому що в кожному конкретному випадку буде зрозуміло, про який процес іде мова.

***Доведення теореми* 1.** Зауважимо, що за умов теореми

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{C_k^2}{k!} \int_0^t \int_0^t \frac{R^k(|u - v|) g(u) g(v) \, du \, dv}{\frac{C_m^2}{m!} L^m(t) \, t^{2 - m\alpha} g^2(t) l} = 1 \tag{16}$$

та

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{C_k^2}{k!} \int_0^t \int_0^t \frac{R^k(|u - v|) g(u) g(v) \, du \, dv}{\frac{C_m^2}{m!} \sum_{i=0}^{[t]-1} \sum_{j=0}^{[t]-1} R^k(|i - j|) g(i) g(j)} = 1. \tag{17}$$

Дійсно, формулу (16) доведено у роботі [12]. Доведення (17) пропускаємо, бо воно проводиться у такий же спосіб, як доведення (16) із використанням (11) та заміною асимптотичних формул для інтегралів на асимптотичні формули для сум.

Зважаючи на (16) та (17), для доведення теореми 1 достатньо показати, що

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E\left[\int_0^t g(s) G(\xi(s)) \, ds - \sum_{j=0}^{[t]-1} g(j) G(\xi(j)) \right]^2}{R^m(t) \, t^2 g^2(t)} = 0. \tag{18}$$

Чисельник дробу (18) подамо у такому вигляді:

$$E\left[\int_0^t g(s) G(\xi(s)) \, ds - \sum_{j=0}^{[t]-1} g(j) G(\xi(j)) \right]^2 =$$

$$= E\left[\sum_{j=0}^{[t]-1} \int_0^1 [G(\xi(s + j)) g(s + j) - G(\xi(j)) g(j)] \, ds \right]^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{[t]-1} \sum_{j=0}^{[t]-1} \int_0^1 \int_0^1 [E G(\xi(s + i)) g(s + i) G(\xi(s' + j)) g(s' + j) -$$

$$- EG(\xi(s+i))g(s+i)G(\xi(j))g(j) - EG(\xi(i))g(i)G(\xi(s'+j))g(s'+j) +$$
$$+ EG(\xi(i))g(i)G(\xi(j))g(j)]\,ds\,ds' =$$
$$= \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{i=0}^{[t]-1}\sum_{j=0}^{[t]-1}\frac{C_k^2}{k!}\int_0^1\int_0^1 [R^k(|s'-s+j-i|)g(s+i)g(s'+j) -$$
$$- R^k(|-s+j-i|)g(s+i)g(j) - R^k(|s'+j-i|)g(i)g(s'+j) +$$
$$+ R^k(|j-i|)g(i)g(j)]\,ds\,ds' =$$
$$= \sum_{k=m}^{\infty}\frac{C_k^2}{k!}\int_0^t\int_0^t R^k(|s'-s|)g(s)g(s')\,ds\,ds' - \sum_{j=0}^{[t]-1}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{C_k^2}{k!}\int_0^t R^k(|j-s|)g(s)g(j)\,ds -$$
$$- \sum_{i=0}^{[t]-1}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{C_k^2}{k!}\int_0^t\int_0^t R^k(|s'-i|)g(i)g(s')\,ds' + \sum_{i=0}^{[t]-1}\sum_{j=0}^{[t]-1}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{C_k^2}{k!}R^k(|j-i|)g(i)g(j) =$$
$$= \sum_{k=m}^{\infty}A_1(k) - \sum_{k=m}^{\infty}A_2(k) - \sum_{k=m}^{\infty}A_3(k) + \sum_{k=m}^{\infty}A_4(k) =$$
$$= (A_1(m) - A_2(m) - A_3(m) + A_4(m)) + \sum_{k=m+1}^{\infty}\left(A_1(k) - A_2(k) - A_3(k) + A_4(k)\right) \le$$
$$\le (A_1(m) - A_2(m) - A_3(m) + A_4(m)) + \sum_{k=m+1}^{\infty}4A_1(k) \le S_1 + S_2,$$

де

$$S_1 = A_1(m) - A_2(m) - A_3(m) + A_4(m), \quad S_2 = 4KB_1(m+1), \quad K = \sum_{k=m}^{\infty}\frac{C_k^2}{k!} < \infty,$$
$$A_1(k) = B_1(k)\frac{C_k^2}{k!}.$$

Далі, для $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{A_i(m)}{R^m(t)\,t^2\,g^2(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{C_m^2}{m!}\int_0^t\int_0^t R^m(|s'-s|)g(s)g(s')\,ds\,ds'}{R^m(t)\,t^2\,g^2(t)} =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{C_m^2}{m!}t^2\int_0^t\int_0^t \frac{L^m(t|s'/t - s/t|)}{t^{m\alpha}|s'/t - s/t|^{m\alpha}}g(t\frac{s}{t})g(t\frac{s'}{t})\,d\frac{s}{t}\,d\frac{s'}{t}}{t^{-m\alpha}L^m(t)\,t^2\,g^2(t)} =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{C_m^2}{m!}t^{m\alpha}t^{-m\alpha}L^m(t)\int_0^1\int_0^1 \frac{L^m(t|s'-s|)}{L^m(t)|s'-s|^{m\alpha}}g(ts)g(ts')g^{-2}(t)\,ds\,ds'}{L^m(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{C_m^2}{m!}l = l\frac{C_m^2}{m!},$$

де l із умови C. Зауважимо, що $l \in (0, \infty)$ при $m\alpha < 1$ [12, с. 7]. Тому $S_1 = o(R^m(t)\,t^2\,g^2(t))$ при $t \to \infty$.

Доведемо, що

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{C_k^2}{k!}\int_0^t\int_0^t R^k(|s'-s|)g(s)g(s')\,ds\,ds'}{R^m(t)\,t^2\,g^2(t)} = 0. \tag{19}$$

Оскільки $g(t)$ монотонно неспадна, а $R(t)\downarrow 0$ при $t \to \infty$, то

$$\frac{\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{C_k^2}{k!}\int_0^t\int_0^t R^k(|s'-s|)g(s)g(s')\,ds\,ds'}{R^m(t)\,t^2\,g^2(t)} \le \frac{K\int_0^t\int_0^t R^{m+1}(|s'-s|)g(s)g(s')\,ds\,ds'}{R^m(t)\,t^2\,g^2(t)} \le$$

$$\le \frac{K\int_0^t\int_0^t R^{m+1}(|s'-s|)\,ds\,ds'}{R^m(t)\,t^2} = \frac{2K\int_0^t (t-s)R^{m+1}(s)\,ds}{R^m(t)\,t^2} \le \frac{2K\int_0^t R^{m+1}(s)\,ds}{R^m(t)\,t},$$

$$K = \sum_{k=m}^{\infty}\frac{C_k^2}{k!} < \infty.$$

Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\tau > 0$ таке, що $R(s) < \varepsilon$ при $s > \tau$, звідки

$$\frac{2K\int_0^t R^{m+1}(s)\,ds}{R^m(t)\,t} = 2KR^{-m}(t)t^{-1}\left(\int_0^{\tau} R^{m+1}(s)\,ds + \int_{\tau}^{t} R^{m+1}(s)\,ds\right) \le$$

$$\le 2KR^{-m}(t)t^{-1}\left(\tau + \varepsilon\int_{\tau}^{t} R^m(s)\,ds\right).$$

Оскільки $m\alpha < 1$, то $\lim_{t\to\infty}(2KR^{-m}(t)\,t^{-1}\tau) = 0$, а

$$\lim_{t\to\infty} 2KR^{-m}(t)t^{-1}\varepsilon\int_{\tau}^{t} R^m(s)\,ds = 2K\varepsilon\lim_{t\to\infty}\int_{\tau}^{t}\frac{L^m(s)\,t^{m\alpha}\,ds}{s^{m\alpha}L^m(t)\,t} =$$

$$= 2K\varepsilon\lim_{t\to\infty}\int_{\tau}^{t}\frac{L^m(st/t)\,(s/t)^{-m\alpha}\,d(s/t)}{L^m(t)} = 2K\varepsilon\lim_{t\to\infty}\int_{\tau/t}^{1}\frac{L^m(st)\,(s)^{-m\alpha}\,ds}{L^m(t)} \le$$

$$\le 2K\varepsilon\lim_{t\to\infty}\int_0^1 s^{-m\alpha}\,ds = \frac{2K\varepsilon}{1-m\alpha}.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ довільне, то (19) доведено.

Із (19) випливає, що $S_2 = o(R^m(t)\,t^2\,g^2(t))$ при $t\to\infty$. Теорему 1 доведено.

Доведення теореми **3.** Із (11) отримуємо

$$E(X_T - X_{m,T})^2 = E\left(Q_T^{-1}(D\hat\theta_T)^{-1/2}\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{C_k}{k!}\sum_{t=0}^{T-1}H_k(\xi(t))\,g(t)\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{C_k^2}{k!\,Q_T^2\,D\hat\theta_T}\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{s=0}^{T-1}R^k(|t-s|)\,g(t)\,g(s) \le$$

$$\le Q_T^{-2}(D\hat\theta_T)^{-1}K\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{s=0}^{T-1}R^{m+1}(|t-s|)\,g(t)\,g(s),$$

де $K = \sum_{k=m}^{\infty}\frac{C_k^2}{k!}$.

Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує N_1 таке, що $R(n) < \varepsilon$ при $n > N_1$. Тому

$$Q_T^{-2}(D\hat\theta_T)^{-1}K\left[\sum_{|t-s|\le N_1}R^{m+1}(|t-s|)\,g(t)\,g(s) + \sum_{|t-s|>N_1}R^{m+1}(|t-s|)\,g(t)\,g(s)\right] \le$$

$$\le Q_T^{-2}(D\hat\theta_T)^{-1}K\left[\sum_{|t-s|\le N_1}g(t)\,g(s) + \varepsilon\sum_{|t-s|>N_1}R^m(|t-s|)\,g(t)\,g(s)\right].$$

Використовуючи стандартні аргументи, аналіз останнього виразу можна замінити аналізом наступного виразу:

$$Q_T^{-2}(D\hat{\theta}_T)^{-1}K\left[\int\limits_{\Delta_1} g(t)g(s)\,dt\,ds + \varepsilon\int\limits_{\Delta_1} R^m(|t-s|)g(t)g(s)\,dt\,ds\right],$$

де

$$\Delta_1 = \{(t,s)\in R^2 \mid t,s\in(0,T), \quad |t-s|\le N_1\},$$
$$\Delta_2 = \{(t,s)\in R^2 \mid t,s\in(0,T), \quad |t-s|> N_1\}.$$

Тому останній вираз можна записати [12, с. 8] так:

$$\frac{m!K}{C_m^2(1+o(1))}\left[cT^{m\alpha-1}L^{-m}(T)(1+o(1)) + \varepsilon^2(1+o(1))\right],$$

де c — константа, причому останній вираз прямує до нуля при $T\to\infty$, тому що (див. [12]):

$$(D\hat{\theta}_T)^{-1} = \frac{m!}{C_m^2}Q_T^2L^{-m}(T)T^{m\alpha-2}g^{-2}(T)l^{-1}(1+o(1))^{-1}, \quad m\alpha<1$$

і

$$\lim_{T\to\infty} T^{\alpha m-1}L^{-m}(T) = 0.$$

Теорему 3 доведено.

1. *Beran J.* Statistics for long-memory processes. – New York: Chapman and Hall, 1992. – 315 p.
2. *Yajima Y.* On estimation of regression model with long-memory stationary errors // Ann. Statist. – 1988. – **16**. – P. 791 – 807.
3. *Yajima Y.* Asymptotic properties of the LSE in a regression model with long-memory stationary errors // Ibid. – 1991. – **19**. – P. 158 – 177.
4. *Künsch H., Beran J., Hampel F.* Contrasts under long-range dependence // Ibid. – 1993. – **21**. – P. 943 – 965.
5. *Dahlhaus R.* Efficient location and regression estimation for long-range dependence regression model // Ibid. – 1995. – **23**. – P. 1028 – 1047.
6. *Robinson P., Hidalgo F. J.* Time series regression with long-range dependence // Ibid. – 1997. – **25**. – P. 77 – 104.
7. *Robinson P.* Semiparametric analysis of long-memory time series // Ibid. – 1994. – **22**. – P. 515 – 539.
8. *Robinson P.* Log-periodogram regression of time series with long-range dependence // Ibid. – 1995. – **24**. – P. 1048 – 1072.
9. *Taqqu M. S.* Convergence to intgrated process of arbitrary Hermite rang // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1979. – **50**. – P. 53 – 83.
10. *Dobrushin R. L., Major P.* Non-central limit theorem for non-linear functionals of Gaussian fields // Ibid. – 1979. – **50**. – P. 27 – 52.
11. *Berman S. M.* High level sojourns for strongly dependent Gaussian process // Ibid. – P. 223 – 236.
12. *Leonenko N. N., Šilac-Benšic M.* Asymptotic properties of the LSE in a regression model with long-memory Gaussian and non-Gaussian errors // Random Oper. and Stochast. Equat. – 1996. – **4**. – P. 1 – 32.
13. *Viano M. C., Deniau C., Oppenheim G.* Continuous-time fractional ARMA processes // Statist. Probab. Lett. – 1994. – **21**. – P. 323 – 336.
14. *Comte F.* Simulation and estimation of long memory continuous time models // J. Time Series Anal. – 1996. – **17**. – P. 19 – 36.
15. *Chambers M. J.* The estimation of continuous parameter long-memory time series models // Econ. Theory. – 1996. – **12**. – P. 374 – 390.
16. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. – Cambridge: Camb. Univ. Press, 1989. – 495 p.
17. *Ivanov A. V., Leonenko N. N.* Statistical analysis of random fields. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1989. – 244 p.
18. *Леоненко Н. Н., Оленко А. Я.* Тауберовы и абелевы теоремы для корреляционной функции однородного изотропного случайного поля // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 12. – С. 1652 – 1664.
19. *Grenander U., Rosenblatt M.* Statistical analysis of stationary time series. – New York: Wiley, 1956. – 300 p.
20. *Розанов Ю. А.* Гауссовские случайные процессы. – М.: Наука, 1970. – 384 с.

Одержано 25.06.97