УДК 519.21

Ю. В. Козаченко (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

ПРО РОЗПОДІЛ СУПРЕМУМА ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З КВАЗІБАНАХОВИХ K_σ-ПРОСТОРІВ

Random processes from quasi-Banach K_σ-spaces of random variables are studied, whose domain of definition is not necessarily a compact set. Conditions are established under which the supremum of respectively normalized process belongs to the same space as the process itself. Estimates of a norm of this supremum are also found.

Вивчаються випадкові процеси з квазібанахових K_σ-просторів випадкових величин, область означення яких не обов'язково компакт. Знайдено умови, за яких супремум відповідно нормованого процесу належить тому ж простору, що й сам процес, а також оцінки норми цього супремума.

1. Вступ. У цій роботі продовжуються дослідження, започатковані в роботах [1 – 3]. Розглядаються випадкові процеси з квазібанахових K_σ-просторів випадкових величин. Клас банахових K_σ-просторів дуже широкий (простори Орлича та ін.). У роботі розглядається більш широкий клас, а саме, квазібанахові K_σ-простори, тобто простори з квазінормою замість норми. Наведено новий приклад квазібанахового простору випадкових величин — $D(\Omega)$-простір.

Досліджуються умови вибіркової неперервності з імовірністю одиниця та умови того, що супремуми процесів належать тому ж простору, що й самі процеси. Отримано оцінки розподілу цих супремумів.

Работа відрізняється від попередніх робіт з цієї тематики, де досліджуються випадкові процеси, область означення яких є метричний компакт, тим, що тут розглядаються випадкові процеси, область означення яких не є компактом. Це дало змогу, наприклад, вивчати поведінку випадкових процесів $X(t)$ на R^1 при прямуванні t до нескінченності.

Зауважимо, що навіть у випадку, коли область означення процесу є компакт, отримано нові умови неперервності та обмеженості процесів, з яких випливають вже відомі умови їх неперервності та обмеженості.

Приклади, наведені у роботі, акцентують увагу на випадках, коли область означення процесу не є компакт.

Для процесів, означених на компактах, приклади та результати можна знайти в роботах [1 – 4], а також в [5 – 8].

2. Квазібанахові K_σ-простори випадкових величин. Нехай $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ — стандартний імовірнісний простір, $K(\Omega)$ — простір випадкових величин $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Означення 1 [9]. *Квазінормою на просторі $K(\Omega)$ назвемо функціонал $\|\cdot\|$, який кожній випадковій величині $\xi \in K(\Omega)$ ставить у відповідність невід'ємне число $\|\xi\|$ так, що виконуються умови*:

1) $\|\xi\| = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$ *з імовірністю одиниця*;
2) $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$;
3) *при* $|\lambda| \leq 1$ $\|\lambda\xi\| \leq \|\xi\|$.

***Зауваження* 1.** Коли замість умови 3 маємо рівність $\|\lambda\xi\| = |\lambda| \, \|\xi\|$, то $\|\cdot\|$ — звичайна норма на $K(\Omega)$. Рівність $\rho(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|$ задає на $K(\Omega)$ метрику, тому $K(\Omega)$ можна розглядати як метричний простір. З другого боку, якщо на $K(\Omega)$ задана метрика $\rho(\xi, \eta)$, то рівність $\|\xi\| = \rho(\xi, 0)$ задає на $K(\Omega)$ квазінорму, для якої може не виконуватись третя умова. Цю квазінорму називатимемо квазінормою, що породжується метрикою ρ.

Означення 2. *Нехай* $j = \{j(\lambda), \lambda \in [0, 1]\}$ — *монотонно неспадна функція така, що* $j(\lambda) \geq 0$, $j(\lambda) \to 0$, *якщо* $\lambda \to 0$. *Якщо для квазінорми* $\|\cdot\|$ *на* $K(\Omega)$ *виконується нерівність* $\|\lambda\xi\| \leq j(|\lambda|)\,\|\xi\|$, *коли* $|\lambda| \leq 1$, *то називатимемо цю квазінорму підпорядкованою функції* j.

***Зауваження* 2.** У випадку, коли $\|\cdot\|$ — норма, вона підпорядкована функції $j(|\lambda|) = |\lambda|$.

Означення 3. *Повний відносно квазінорми* $\|\cdot\|$ *простір* $K(\Omega)$ *називатимемо квазібанаховим простором.*

Означення 4. *Квазібанаховий простір* $K(\Omega)$ *називатимемо квазі-*K_σ*-простором, якщо* $K(\Omega)$ *має такі властивості*:

a_1) *якщо* $\xi, \eta \in K(\Omega)$, *то* $\max(\xi, \eta) \in K(\Omega)$ *та* $\min(\xi, \eta) \in K(\Omega)$, *отже*, $|\xi| \in K(\Omega)$;

a_2) *якщо* $\xi, \eta \in K(\Omega)$ *та* $|\xi| \leq |\eta|$ *майже скрізь, то* $\|\xi\| < \|\eta\|$;

a_3) *якщо для послідовності* $(\xi_n,\ n \geq 1)$ *випадкових величин з* $K(\Omega)$ *існує випадкова величина* $\eta \in K(\Omega)$ *така, що* $\sup_{n\geq 1}|\xi_n| \leq \eta$, *то й* $\sup_{n\geq 1}|\xi_n| \in K(\Omega)$.

Якщо при цьому $K(\Omega)$ — *банаховий простір, то його називатимемо* K_σ*-простором.*

***Зауваження* 3.** Якщо $K(\Omega)$ — квазі-K_σ-простір, то третя умова квазінорми виконується автоматично. Дійсно, якщо $|\lambda| \leq 1$, то $|\lambda\xi| \leq |\xi|$ і за властивістю a_2) $\|\lambda\xi\| \leq \|\xi\|$.

Це зауваження істотне у випадку, коли квазінорма $\|\cdot\|$ породжується деякою метрикою.

***Зауваження* 4.** Функціональні K_σ-простори розглядались, наприклад, в [10], K_σ-простори випадкових величин — в [2], а квазі-K_σ-простори — в [3].

Означення 5. *Додатна монотонно неспадна послідовність* $\mu = \{\mu(n),\ n = 1, 2, \ldots\}$ *є характеристикою квазі-*K_σ*-простору* $K(\Omega)$, *якщо для будь-яких* $\xi_k \in K(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *виконується нерівність*

$$\left\| \max_{1\leq k\leq n} |\xi_k| \right\| \leq \mu(n) \max_{1\leq k\leq n} \|\xi_k\|. \tag{1}$$

Поняття характеристики для просторів Орлича вперше введено в роботі [1], для K_σ-просторів — в [2], а для квазі-K_σ-просторів — в [3].

Для квазі-K_σ-просторів має місце така лема.

Лема 1. *Нехай* ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, — *така послідовність випадкових величин, що* $\xi_n \in K(\Omega)$, *де* $K(\Omega)$ — *квазі-*K_σ*-простір. Якщо існує така випадкова величина* $\xi_n \in K(\Omega)$, *що* $\|\xi_n - \xi\| \to 0$, *якщо* $n \to \infty$, *то* $\xi_n \to \xi$ *за ймовірністю.*

Для K_σ-просторів ця лема доведена в [2]. Для квазі-K_σ-просторів доведення аналогічне.

Наведемо приклади квазібанахових K_σ-просторів.

2.1. Простори Орлича випадкових величин. Нехай $U = \{U(x),\ x \in \mathrm{R}^1\}$ — C-функція [1], тобто неперервна, парна, опукла функція така, що $U(0) = 0$, $U(x) > 0$, коли $x \neq 0$.

Простором Орлича випадкових величин $L_U(\Omega)$, що породжується C-функцією U, є простір випадкових величин ξ, для кожної з яких існує константа r_ξ така, що $EU(\xi / r_\xi) < \infty$.

Простір $L_U(\Omega)$ — банахів простір відносно норми [11]

$$\|\xi\|_U = \inf\{r>0: EU(\xi/r)\le 1\} \tag{2}$$

та K_σ-простір.

Лема 2. *Характеристикою простору $L_U(\Omega)$ є послідовність $\mu(n)=(1+ U(x_0))\,S_{x_0}(n)$, де $x_0>0$ — будь-яке число $S_{x_0}(n) = \sup_{x\ge x_0}(1/x)U^{(-1)}(nU(x))$, $U^{(-1)}(x)$ — функція, обернена до $U(x)$ при $x>0$.*

Цю лему доведено в [3]. В частинному випадку, а саме, для C-функцій з класу E вона доведена в [1]. Для цього класу з леми 1 легко отримати $\mu(n) = C_U\,U^{(-1)}(n)$, де C_U — певна константа. Значення цієї константи можна знайти в роботі [1].

У випадку, коли $U(x)=|x|^p$ ($L_p(\Omega)$ — простори), $\|\xi\|_U = (E|x|^p)^{1/p}$ та $\mu(n)=n^{1/p}$ [1].

У випадку, коли $U(x)=\exp\{|x|^\alpha\}-1$, $\alpha\ge 1$, при $n\ge 8$, $\mu(n)=e^2(\ln(n+1))^{1/\alpha}$ [1]. Коли при досить великих x $U(x)=\exp\{|x|^\alpha\}-1$, $0<\alpha<1$, то при досить великих n $\mu(n)=C_\alpha(\ln n)^{1/\alpha}$. Значення констант легко знайти з загальних формул роботи [1].

Лема 3 [1]. *Нехай випадкова величина ξ належить простору $L_U(\Omega)$. Тоді для будь-якого $\varepsilon>0$ виконується нерівність*

$$P\{|\xi|>\varepsilon\} \le (U(\varepsilon/\|\xi\|_U))^{-1}. \tag{3}$$

2.2. $F_\psi(\Omega)$-простори випадкових величин.

Означення 6 [12]. *Нехай $\psi(m)$, $m=1,2,\ldots,$ — додатна неспадна функція. Простором $F_\psi(\Omega)$ називатимемо простір випадкових величин ξ, для яких є скінченним такий вираз:*

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{m\ge 1}\frac{(E|\xi|^m)^{1/m}}{\psi(m)}.$$

Простір $F_\psi(\Omega)$ є K_σ-простором з нормою $\|\xi\|_\psi$. Його характеристикою є функція $\mu(n)=\inf_{l\ge 1}\psi(l)\,n^{1/l}$ [12].

2.3. Простори $M(\Omega)$ випадкових величин. Нехай $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$ — C-функції такі, що при кожному $D>0$ функція $U(W(x)/D)$ є C-функцією, а функція $W(x/D)/(1+V(x))$ монотонно не спадає при $x>0$. Ці умови виконуються, наприклад, коли $U(x)=|x|^p$, $W(x)=|x|^q$, $V(x)=|x|^s$, $p\ge 1$, $q\ge 1$, $s\ge 1$, $q\ge s$, або коли $U(x)=\exp\{|x|^\alpha\}-1$, $\alpha\ge 1$, $W(x)=|x|^q$, $q\ge 1$, $V(x)= |x|^s$, $s\ge 1$, $q\ge s$.

Означення 7. *Простором $M(\Omega)$ називатимемо простір випадкових величин ξ таких, що для кожної з них існує константа C_ξ така, що*

$$EU(W(\xi/C_\xi)/(1+V(\xi)))<\infty.$$

Простори $M(\Omega)$ були введені в частинному випадку в роботі [3].

Теорема 1. *Простір $M(\Omega)$ є квазібанаховим K_σ-простором відносно квазінорми*

$$\|\xi\|_M = \inf\{r>0:\ EU(W(\xi/r)/(1+V(\xi)))<1\}, \tag{4}$$

характеристикою цього простору є будь-яка з функцій $(x_0>0)$

$$\mu(n) = (1+U(W(x_0)))\, S^W_{x_0}\Big(S^U_{W(x_0)}(n)\Big), \tag{5}$$

де $S^g_{z_0}(n)$ *для будь-якого* $z_0>0$ *та будь-якої* C*-функції визначається так:*

$$S^g_{z_0}(n) = \sup_{x\ge z_0} \frac{1}{x} g^{(-1)}(ng(x)). \tag{6}$$

Зауваження 5. В частинних випадках теорему 1 було доведено в роботі [3].

Доведення теореми. Доведемо спочатку, що $\|\xi\|_M = \|\xi\|$ — квазінорма. Умови 1 та 3 очевидні, як і умова 2, коли $\|\xi\|=0$ та $\|\eta\|\neq 0$. Якщо $\|\xi\|\neq 0$, $\|\eta\|=0$, то умова 2 випливає з співвідношень

$$EU\left(\frac{1}{1+V(\xi+\eta)}W\left(\frac{\xi+\eta}{\|\xi\|+\|\eta\|}\right)\right) \le$$

$$\le EU\left(\frac{1}{1+V(|\xi|+|\eta|)}W\left(\frac{\|\xi\|}{\|\xi\|+\|\eta\|}\frac{|\xi|}{\|\xi\|} + \frac{|\eta|}{\|\eta\|}\frac{\|\eta\|}{\|\xi\|+\|\eta\|}\right)\right) \le$$

$$\le \frac{\|\xi\|}{\|\xi\|+\|\eta\|}EU\left(\frac{1}{1+V(|\xi|)}W\left(\frac{|\xi|}{\|\xi\|}\right)\right) + \frac{\|\eta\|}{\|\xi\|+\|\eta\|}EU\left(\frac{1}{1+V(|\eta|)}W\left(\frac{|\eta|}{\|\eta\|}\right)\right) \le 1.$$

Доведення повноти простору нічим не відрізняється від випадку просторів Орлича. Те, що $M(\Omega)$ є K_σ-простором, очевидно.

Доведемо (4). Нехай ξ_i, $i=1,\ldots,n$, — випадкові величини такі, що $\xi_i \in M(\Omega)$. Позначимо $\theta = \max\limits_{i=1,\ldots,n}|\xi_i|$, $a = \max\limits_{i=1,\ldots,n}\|\xi_i\|$, $\chi(A)$ — індикатор множини A. Для будь-якого $r>0$, $x_0>0$, мають місце співвідношення

$$EU\left(W(\theta r^{-1})\frac{1}{1+V(\theta)}\right) \le EU\left(W(\theta r^{-1})\frac{1}{1+V(\theta)}\right)\chi\big(|\theta|r^{-1}\le x_0\big) +$$

$$+ EU\left(W(\theta r^{-1})\frac{1}{1+V(\theta)}\right)\chi\big(|\theta|r^{-1}> x_0\big) \le$$

$$\le EU\left(W(x_0)\frac{1}{1+V(\theta)}\right) + \max_{1\le i\le n} nE\chi\big(|\xi_i|r^{-1}>x_0\big)\,U\left(W\big(|\xi_i|r^{-1}\big)\frac{1}{1+V(|\xi_i|)}\right) \le$$

$$\le U(W(x_0)) + \max_{1\le i\le n} E\chi\big(|\xi_i|r^{-1}>x_0\big)\,U\left(S^U_{W(x_0)}(n)\frac{W\big(|\xi_i|r^{-1}\big)}{1+V(|\xi_i|)}\right) \le$$

$$\le U(W(x_0)) + \max_{1\le i\le n} E\chi\big(|\xi_i|r^{-1}>x_0\big)\,U\left(W\Big(|\xi_i|r^{-1}\,S^W_{x_0}\big(S^U_{W(x_0)}(n)\big)\Big)\frac{1}{1+V(|\xi_i|)}\right) \le$$

$$\le U(W(x_0)) + \max_{1\le i\le n} EU\left(W\Big(|\xi_i|r^{-1}\,S^W_{x_0}\big(S^U_{W(x_0)}(n)\big)\Big)\frac{1}{1+V(|\xi_i|)}\right).$$

Якщо покласти $\theta = a\,S^W_{x_0}\big(S^U_{W(x_0)}(n)\big)$, то отримаємо

$$EU\left(W(\theta r^{-1})\frac{1}{1+V(\theta)}\right) \le U(W(x_0)) + 1.$$

Тобто оскільки функція $U(W(x)D^{-1})$ є C-функцією, то

$$EU\left(W\Big(\theta r^{-1}\big(U(W(x_0)+1)^{-1}\big)\Big)\frac{1}{1+V(\theta)}\right) \le \frac{1}{U(W(x_0))+1}EU\left(W(\theta r^{-1})\frac{1}{1+V(\theta)}\right) \le 1.$$

Отже, $\|\theta\| \le aS^W_{x_0}\big(S^U_{W(x_0)}(n)\big)\big(1+U(W(x_0))\big)$.

Лема 4. *Нехай випадкова величина* ξ *належить простору* $M(\Omega)$. *Тоді для будь-якого* $\varepsilon>0$ *має місце нерівність*

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \le \left(U\left(W\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}\right)\frac{1}{1+V(\varepsilon)}\right)\right)^{-1}.$$

Доведення. З нерівності Чебишова та властивостей функцій $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$ випливають нерівності

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \le EU\left(W\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right)\frac{1}{1+V(\xi)}\right)\left(U\left(W\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}\right)\frac{1}{1+V(\varepsilon)}\right)\right)^{-1} \le$$

$$\le \left(U\left(W\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}\right)\frac{1}{1+V(\varepsilon)}\right)\right)^{-1}.$$

2.4. $D(\Omega)$-простори випадкових величин. Нехай $W = \{W(x),\ x \in [0, \infty]\}$ — така функція, що $W(x) > 0$, $x > 0$, $W(0) = 0$, $W(x)$ монотонно зростає, $W(x) \to \infty$, $x \to \infty$. $W(x)$ вгнута $(W(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \ge \alpha W(x_1) + (1 - \alpha) W(x_2),\ 0 < \alpha < 1)$.

Означення 8. *Простором $D(\Omega)$ називається простір випадкових величин ξ таких, що*

$$\sup_{x>0} xW(P\{|\xi| > x\}) < \infty.$$

Теорема 2. *Простір $D(\Omega)$ є квазібанаховим K_σ-простором відносно квазінорми*

$$\|\xi\|_D = \left(\sup_{x>0} xW(P\{|\xi| > x\})\right)^{1/2}. \tag{7}$$

При цьому для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність

$$P\{|\xi| > x\} \le W^{(-1)}\left(\frac{\|\xi\|_D^2}{x}\right). \tag{8}$$

де $W^{(-1)}(u)$ — функція, обернена до W.

Доведення. Зауважимо спочатку, що нерівність (8) має місце, оскільки для всіх $x > 0$ $xW(P\{|\xi| > x\}) \le \|\xi\|_D^2$. Якщо $\|\xi\|_D^2 = 0$, то з нерівності (8) випливає, що $|\xi| = 0$ з імовірністю одиниця. Якщо $|\xi| = 0$ з імовірністю одиниця, то з означення норми випливає, що $\|\xi\|_D = 0$. Доведемо, що для $\|\xi\|_D$ виконується нерівність трикутника. Зрозуміло, що потребує доведення лише випадок, коли $\|\xi\|_D \ne 0$ та $\|\eta\|_D \ne 0$. В цьому випадку при будь-яких $0 < \alpha < 1$ мають місце співвідношення

$$\|\xi+\eta\|_D^2 \le \sup_{x>0} xW(P\{|\xi| > \alpha x\} + P\{|\eta| > (1-\alpha)x\}) \le$$

$$\le \sup_{x>0}\left(\frac{\alpha x W(P\{|\xi| > \alpha x\})}{\alpha} + \frac{(1-\alpha)xW(P\{|\eta| > (1-\alpha)x\})}{(1-\alpha)}\right) \le \frac{\|\xi\|_D^2}{\alpha} + \frac{\|\eta\|_D^2}{1-\alpha}.$$

Якщо покласти $\alpha = \|\xi\|_D(\|\xi\|_D + \|\eta\|_D)^{-1}$, то отримаємо потрібну нерівність.

Тепер доведемо, що простір $D(\Omega)$ повний. Нехай ξ_n — така послідовність випадкових величин з $D(\Omega)$, що $\|\xi_n - \xi_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$. З нерівності (8) випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$P\{|\xi_n - \xi_m| > \varepsilon\} \le W^{(-1)}\left(\frac{\|\xi_n - \xi_m\|_D^2}{x}\right).$$

Отже, при $n, m \to \infty$ для будь-якого $\varepsilon > 0$ $P\{|\xi_n - \xi_m| > \varepsilon\} \to 0$. Тобто $\xi_n - \xi_m \to 0$ при $n, m \to \infty$ за ймовірністю. Тому існує така випадкова величина ξ, що при $n \to \infty$ $\xi_n \to \xi$ за ймовірністю. Оскільки $\left|\|\xi_n\|_D - \|\xi_m\|_D\right| \le \|\xi_n - \xi_m\|_D$, то існує границя $\sigma = \lim_{n\to\infty} \|\xi_n\|_D$. Якщо в нерівності $(x > 0)$ $P\{|\xi_n|_D > x\} \le W^{(-1)}(\|\xi_n\|_D^2 / x)$ перейти до границі при $n \to \infty$ (досить розглянути лише точки неперервності функції розподілу випадкової величини $|\xi_n|$), то отримаємо нерівність $P\{|\xi| > x\} \le W^{(-1)}(\sigma^2 / x)$, тобто $\sup_{x>0} xW(P\{|\xi| > x\}) < \sigma^2$. Отже, випадкова величина ξ належить простору $D(\Omega)$ та $\|\xi\|_D \le \sigma$. Якщо цю нерівність застосувати до випадкової величини $\xi_n - \xi$, то отримаємо $\|\xi_n - \xi\|_D \le \lim_{m\to\infty} \|\xi_n - \xi_m\|_D$, тобто $\|\xi_n - \xi\|_D \to 0$ при $n \to \infty$. Таким чином, $D(\Omega)$ — квазібанаховий простір. Те, що $D(\Omega)$ — K_σ-простір, не потребує спеціального доведення.

Лема 5. *Характеристикою простору $D(\Omega)$ є функція*

$$\mu(n) = \sup_{0<t<1/n} \left(\frac{W(tn)}{W(t)}\right)^{1/2}.$$

Доведення. Нехай ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — випадкові величини з простору $D(\Omega)$ $a = \max_{1\le i\le n} \|\xi_i\|_D$. Мають місце співвідношення

$$\begin{aligned}
\left\|\max_{1\le i\le n} |\xi_i|\right\|_D^2 &= \sup_{x>0} \left(xW(P\{\max|\xi_i| > x\})\right) \le \\
&\le \sup_{x>0}\left(xW\left(\min\left(1, \sum_{i=1}^n P\{|\xi_i| > x\}\right)\right)\right) = \\
&= \sup_{x>0}\left(xW\left(\min\left(1, \sum_{i=1}^n W^{(-1)}\left(\frac{xW(P\{|\xi_i| > x\})}{x}\right)\right)\right)\right) \le \\
&\le \sup_{x>0}\left(xW\left(\min\left(1, \sum_{i=1}^n W^{(-1)}\left(\|\xi_i\|_D^2 x^{-1}\right)\right)\right)\right) \le \\
&\le \sup_{x>0}\left(xW\left(\min\left(1, \sum_{i=1}^n nW^{(-1)}(a^2 x^{-1})\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Якщо в останньому виразі покладемо $t = W^{(-1)}(a^2 x^{-1})$, $x = a^2 / W(t)$, то отримаємо

$$\left\|\max_{1\le i\le n} |\xi_i|\right\|_D^2 \le a^2 \sup_{0<t<1/n} \frac{W(nt)}{W(t)}.$$

Лема 6. *Квазінорма $\|\cdot\|_D$ підпорядкована функції $j = \{j(\lambda) = \lambda^{1/2}\}$.*

Доведення. Твердження леми випливає з рівностей

$$\|\lambda\xi\|_D = \left(\sup_{x>0} xW(P\{|\xi\lambda| > x\})\right)^{1/2} = |\lambda|^{1/2} \sup_{x>0}\left(\frac{x}{|\lambda|} P\left\{|\xi| > \frac{x}{|\lambda|}\right\}\right) = |\lambda|^{1/2} \|\xi\|_D.$$

Приклад 1. Якщо $W(x) = x^{1/p}$, $p > 1$, то для випадкової величини $\xi \in D(\Omega)$ $\|\xi\| = \left(\sup_{x>0} x(P\{|\xi| > x\})^{1/p}\right)^{1/2}$. Для $x > 0$ має місце нерівність

$$P\{|\xi| > x\} \le \frac{\|\xi\|^{2p}}{x^p}.$$

Для характеристики простору $\mu(n)$ виконується нерівність $\mu(n) \le n^{1/2p}$. Зауважимо, що в цьому випадку простір $D(\Omega)$ не збігається з простором $L_p(\Omega)$, оскільки, наприклад, випадкові величини ξ такі, що $P\{|\xi| > x\} = \dfrac{1}{1+|x|^p}$ належать простору $D(\Omega)$, але не належать простору $L_p(\Omega)$.

Приклад 2. Якщо $W(x) = [\ln(1/x+1)]^{-1/\alpha}$, $\alpha \ge 1$, то для випадкової величини $\xi \in D(\Omega)$ $\|\xi\| = \left(\sup\limits_{x>0} x \ln\left((P\{|\xi| > x\})^{-1}+1\right)\right)^{-1/\alpha}$. Для $x > 0$ має місце нерівність

$$P\{|\xi| > x\} \le \left(\exp\left\{\left(\frac{x}{\|\xi\|^2}\right)\right\} - 1\right)^{-1}.$$

Покажемо, що для характеристики цього простору справедлива нерівність $\mu(n) \le (\ln(n+1)/\ln 2)^{1/2\alpha}$. Дійсно, в цьому випадку

$$\mu(n) = \left[\sup_{0<t<1/n} \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{1}{nt}\right)}\right]^{1/2\alpha} = \left[\sup_{u>1} \frac{\ln(1+nu)}{\ln(1+u)}\right]^{1/2\alpha} = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln 2}\right)^{1/2\alpha}.$$

3. Випадкові процеси з квазібанахових K_σ-просторів. Нехай T — параметрична множина, на якій задана псевдометрика ρ. Нагадаємо, що псевдометрика відрізняється від метрики лише тим, що для псевдометрики з співвідношення $\rho(t, s) = 0$ не обов'язково випливає, що $t = s$.

Ми розглядаємо простори з псевдометрикою, а не лише метричні простори, тому що випадкові процеси з банахових або квазібанахових просторів породжують на параметричних множинах псевдометрики, а не метрики. Зауважимо також, що користуватимемося лише тими властивостями псевдометрики, які не відрізняються від властивостей метрик.

Означення 9. *Випадковий процес* $X = (X(t),\ t \in T)$ *належить квазібанаховому* K_σ*-простору* $K(\Omega)$, $X \in K(\Omega)$, *якщо при кожному* $t \in T$ *випадкова величина* $X(t)$ *належить* $K(\Omega)$.

Означення 10. *Псевдометрика* $\rho(t, s)$ *породжується випадковим процесом* X, *якщо* $\rho(t, s) = \|\xi(t) - \xi(s)\|_K$.

Зробимо деякі припущення. Вважатимемо, що простір (T, ρ) — сепарабельний. Якщо B — компакт з (T, ρ), то позначимо через $N_B(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, число елементів мінімального покриття множини B відкритими кулями радіуса ε.

Розглянемо випадковий процес $X = (X(t),\ t \in T) \in K(\Omega)$, де $K(\Omega)$ — квазі-K_σ-простір з квазінормою $\|\cdot\|_K$, підпорядкованою функції $j = \{j(\lambda),\ |\lambda| < 1\}$, та характеристикою $\mu(n)$. Нехай існує така неперервна монотонно зростаюча неперервна функція $\sigma = \{\sigma(h),\ h \ge 0\}$, $\sigma(0) = 0$, що $\sup\limits_{\rho(t,s)\le h} \|x(t) - x(s)\|_K \le$ $\le \sigma(h)$. Зауважимо, що у випадку, коли $\rho(t, s) = \|x(t) - x(s)\|_K$, $\sigma(h) = h$. Для будь-якої обмеженої функції $f(t)$ на множині $B \subset T$ позначимо $\|f(t)\|_{C(B)} =$ $= \sup\limits_{t\in B} |f(t)|$.

Теорема 3. *Нехай* $c(t)$ *— деяка функція на* (T, ρ) *така, що* $|c(t)| < 1$, *а випадковий процес* $X = (X(t),\ t \in T)$ *— сепарабельний,* $X \in K(\Omega)$, $T = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, *де* B_k *— компакти. Тоді має місце нерівність*

$$\Big\| \| c(t) X(t) \|_{C(T)} \Big\|_K \le \sum_{k=1}^{\infty} j(\gamma_k) \left(\delta_k + \sum_{l=0}^{\infty} \mu\big(N_{B_k}(\varepsilon_{k,l+1})\big) \sigma(\varepsilon_{k,l}) \right), \tag{9}$$

де $\varepsilon_{k,l}$, $l = 1, \ldots, \infty$, *— будь-яка монотонно спадна послідовність,* $\varepsilon_{k,l} \to 0$, $l \to \infty$, *де* $\varepsilon_{k,0}$ *— таке найменше число, що для всіх* $t \in B_k$ *існує* $t_0 \in B_k$, *що* $\rho(t, t_0) \le \varepsilon_{k,0}$, $\varepsilon_{k,0} \le \sup_{t, s \in B_k} \rho(t, s)$, $\delta_k = \sup_{t \in B_k} \| X(t) \|_K = \big\| \| X(t) \|_K \big\|_{C(B_k)}$, $\gamma_k = \| c(t) \|_{C(B_k)}$.

Доведення. Якщо ряди в правій частині (9) розбігаються, то нерівність тривіальна. Отже, будемо вважати, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} j(\gamma_k) \left(\delta_k + \sum_{l=0}^{\infty} \mu\big(N_{B_k}(\varepsilon_{k,l+1})\big) \sigma(\varepsilon_{k,l}) \right) < \infty.$$

Справедлива нерівність

$$\| c(t) X(t) \|_{C(T)} \le \sup_{k=1,\ldots,\infty} \| c(t) X(t) \|_{C(B_k)} \le \sum_{k=1}^{\infty} \| c(t) X(t) \|_{C(B_k)} \le \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \| X(t) \|_{C(B_k)}.$$

З цієї нерівності випливає

$$\Big\| \| c(t) X(t) \|_{C(T)} \Big\|_K \le \sum_{k=1}^{\infty} j(\gamma_k) \Big\| \| X(t) \|_{C(B_k)} \Big\|_K. \tag{10}$$

Оцінимо $\Big\| \| X(t) \|_{C(B_k)} \Big\|_K$. Розглянемо мінімальне покриття компакта B_k кулями радіуса $\varepsilon_{k,l}$.

Нехай $V_{\varepsilon_{k,l}}$ — множина центрів куль цього покриття. Число точок в $V_{\varepsilon_{k,l}}$ дорівнює $N_{B_k}(\varepsilon_{k,l})$. Виконується нерівність

$$\| X(t) \|_{C(B_k)} \le \sum_{l=0}^{\infty} \sup_{t \in V_{\varepsilon_{k,l+1}}} | X(t) - X(\alpha_l(t)) | + | X(t_k) |, \tag{11}$$

де t_k — фіксована точка з B_k, $\alpha_l(t)$ — деяка фіксована точка з $V_{\varepsilon_{k,l}}$ така, що $\rho(t, \alpha_l(t)) < \varepsilon_{k,l}$. Нерівність (11) можна отримати точно так, як і подібну нерівність при доведенні теореми 1 з роботи [2], або з [1]. З означення 5 випливає співвідношення

$$\Big\| \sup_{t \in V_{\varepsilon_{k,l+1}}} | X(t) - X(\alpha_l(t)) | \Big\|_K \le \mu\big(N_{B_k}(\varepsilon_{k,l+1})\big) \sup_{t \in V_{\varepsilon_{k,l+1}}} \| X(t) - X(\alpha_l(t)) \|_K \le$$
$$\le \mu\big(N_{B_k}(\varepsilon_{k,l+1})\big) \sigma(\varepsilon_{k,l}).$$

З цього співвідношення та нерівності (11) отримаємо

$$\Big\| \| X(t) \|_{C(B_k)} \Big\|_K \le \| X(t_k) \|_K + \sum_{l=0}^{\infty} \mu\big(N_{B_k}(\varepsilon_{k,l+1})\big) \sigma(\varepsilon_{k,l}).$$

З (10) та останньої нерівності випливає твердження теореми, якщо врахувати, що $\| X(t_k) \| \le \delta_k$.

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови теореми 3 та збігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} j(\gamma_k) \left(\delta_k + \sum_{l=0}^{\infty} \mu\big(N_{B_k}(\varepsilon_{k,l+1})\big) \sigma(\varepsilon_{k,l}) \right) = A < \infty, \tag{12}$$

тоді з імовірністю одиниця $\| c(t) X(t) \|_{C(T)} \in K(\Omega)$ *та* $\Big\| \| c(t) X(t) \|_{C(T)} \Big\|_K \le A$.

***Наслідок* 2.** *Нехай виконуються умови теореми* 3, *крім цього, для будь-якого* $0 < q < 1$ *виконується умова*

$$\sum_{k=1}^{\infty} j(\gamma_k)\left(\delta_k + \frac{1}{q(1-q)}\int\limits_0^{q\sigma(\varepsilon_{k,0})} \mu\left(N_{B_k}(\sigma^{-1}(u))\right)du\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} j(\gamma_k)\left(\delta_k + \frac{1}{q(1-q)}\int\limits_0^{\gamma_{k,0}} \mu\left(N_{B_k}(t)\right)d\sigma(t)\right) = W_q < \infty, \tag{13}$$

де $\gamma_{k,0} = \sigma^{(-1)}(q(\sigma(\varepsilon_{k,0}))) \le \varepsilon_{k,0}$.

Тоді з імовірністю одиниця $\|c(t)X(t)\|_{C(T)} \in K(\Omega)$ та $\left\|\|c(t)X(t)\|_{C(T)}\right\|_K \le$ $\le W_q$.

Доведення. Позначимо $t_{k,l} = \sigma(\varepsilon_{k,l})$, тоді $\varepsilon_{k,l} = \sigma^{(-1)}(t_{k,l})$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\mu\left(N_{B_k}(\varepsilon_{k,l+1})\right)\sigma(\varepsilon_{k,l}) = \sum_{l=0}^{\infty}\mu\left(N_{B_k}(\sigma^{(-1)}(t_{k,l+1}))\right)t_{k,l}.$$

Виберемо послідовність $\varepsilon_{k,l}$ так, щоб $t_{k,l} = t_{k,0}\, q^l$, $0 < q < 1$, тобто $\varepsilon_{k,l} =$ $= \sigma^{(-1)}(t_{k,0}\, q^l)$. У цьому випадку

$$t_{k,l}\,\mu\left(N_{B_k}(\sigma^{(-1)}(t_{k,l+1}))\right) \le \int\limits_{t_{k,l+2}}^{t_{k,l+1}} \mu\left(N_{B_k}(\sigma^{(-1)}(u))\right)du\,\frac{t_{k,l}}{t_{k,l+1} - t_{k,l+2}} =$$

$$= \int\limits_{t_{k,l+2}}^{t_{k,l+1}} \mu\left(N_{B_k}(\sigma^{(-1)}(u))\right)du\,\frac{1}{q(1-q)}.$$

Отже,

$$\sum_{l=0}^{\infty}\mu\left(N_{B_k}(\varepsilon_{k,l+1})\right)\sigma(\varepsilon_{k,l}) \le \frac{1}{q(1-q)}\int\limits_0^{t_{k,0}q} \mu\left(N_{B_k}(\sigma^{(-1)}(u))\right)du =$$

$$= \frac{1}{q(1-q)}\int\limits_0^{\sigma^{(-1)}(q\sigma(\varepsilon_{k,0}))} \mu\left(N_{B_k}(t)\right)d\sigma(t).$$

З останніх нерівностей отримуємо, що для такої послідовності $A \le W_q$. Отже, твердження наслідку 2 випливає з наслідку 1.

***Наслідок* 3.** *Нехай* (T, ρ) — *компакт. Якщо збігається інтеграл*

$$\int\limits_0^{q\sigma(\varepsilon_0)} \mu\left(N_T(\sigma^{(-1)}(u))\right)du < \infty, \quad \text{де } \varepsilon_0 = \sup_{t,s\in T}\rho(t,s),$$

то $\|X(t)\|_{C(T)} \in \boldsymbol{K}(\Omega)$ *та*

$$\left\|\|X(t)\|_{C(T)}\right\|_K \le V_q, \quad 0 < q < 1, \tag{14}$$

де $V_q = \delta + \dfrac{1}{q(1-q)}\displaystyle\int\limits_0^{q\sigma(\varepsilon_0)} \mu\left(N_T(\sigma^{(-1)}(u))\right)du = \delta + \dfrac{1}{q(1-q)}\displaystyle\int\limits_0^{\gamma_0} \mu(N_T(t))\,d\sigma(t),$

$$\delta = \left\|\|X(t)\|_K\right\|_{C(T)}, \quad \gamma_0 = \sigma^{(-1)}(q\sigma(\varepsilon_0)).$$

Наслідок 3 випливає з наслідку 2, якщо покласти $B_1 = T$, $B_k = 0$, $k > 1$.

Зауваження 6. Якщо покласти $\rho(t,s) = \|X(t) - X(s)\|_K$, то з наслідку 3 випливає твердження теореми 1 з [2]. У цьому випадку

$$V_q = \delta + \frac{1}{q(1-q)} \int_0^{\gamma_0} \mu(N_T(t))\, d\sigma(t).$$

Зауваження 7. У випадку, коли $K(\Omega)$ — простір Орлича $L_U(\Omega)$, з нерівності (3) випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$P\{\|c(t)X(t)\|_{C(T)} > \varepsilon\} \le (U(\varepsilon/z))^{-1}. \tag{15}$$

де z дорівнює A, коли виконуються умови наслідку 1, або V_q, якщо виконуються умови наслідку 3. У цьому випадку $c(t) = 1$. Для $L_U(\Omega)$ $\mu(n)$ задана в лемі 2. Аналогічно у випадку, коли $K(\Omega)$ — простір $M(\Omega)$, з леми 4 для будь-якого $\varepsilon > 0$ випливає нерівність

$$P\{\|c(t)X(t)\|_{C(T)} > \varepsilon\} \le (U(W(\varepsilon/z))/(1+V(\varepsilon)))^{-1}, \tag{16}$$

де z таке, як і в попередньому випадку, $\mu(n)$ задана виразом (5).

Для тих же z у випадку, коли $K(\Omega)$ це простір $D(\Omega)$, для будь-якого $\varepsilon > 0$ має місце нерівність

$$P\{\|c(t)X(t)\|_{C(T)} > \varepsilon\} \le W^{(-1)}(z/\varepsilon). \tag{17}$$

Це випливає з (8). У цьому випадку $\mu(n)$ задана лемою 5.

Теорема 4. *Нехай випадковий процес $X = (X(t),\ t \in T)$, де (T, ρ) — компакт, такий, що X належить квазі-K_σ-простору $K(\Omega)$. Нехай виконується умова*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \mu(N_T(\varepsilon_{l+1}))\, \sigma(\varepsilon_l) < \infty, \tag{18}$$

де ε_l — будь-яка монотонно спадна послідовність така, що $\varepsilon_0 = \sup_{t,s \in T} \rho(t,s)$ та $\varepsilon_l \to 0$, коли $l \to \infty$. Якщо X — сепарабельний процес, то він вибірково неперервний з імовірністю одиниця.

Доведення. Нехай V_{ε_l} — множина центрів мінімального покриття компакта T кулями радіуса ε_l. Якщо без змін повторити доведення теореми 1 з [2], то можна довести, що для будь-якого $k > 0$ існує таке додатне число $d > 0$, що виконується нерівність

$$\sup_{\rho(t,s)<d} |X(t) - X(s)| \le 4 \sum_{l=k}^{\infty} \sup_{t \in V_{\varepsilon_{l+1}}} |X(t) - X(\alpha_l(t))|,$$

де $\alpha_l(t)$ — така фіксована точка з V_{ε_l}, що $\rho(t, \alpha_l(t)) < \varepsilon_l$.

З останньої нерівності випливають співвідношення

$$\left\| \sup_{\rho(t,s)<d} |X(t) - X(s)| \right\|_K \le 4 \sum_{l=k}^{\infty} \left\| \sup_{t \in V_{\varepsilon_{l+1}}} |X(t) - X(\alpha_l(t))| \right\|_K \le 4 \sum_{l=k}^{\infty} \mu(N_T(\varepsilon_{l+1}))\, \sigma(\varepsilon_l). \tag{19}$$

З умови (18) маємо, що $\sum_{l=k}^{\infty} \mu(N_T(\varepsilon_{l+1}))\, \sigma(\varepsilon_l) \to 0$, коли $k \to \infty$. Отже, з (19) випливає, що $\left\| \sup_{\rho(t,s)<\varepsilon} |X(t) - X(s)| \right\|_K \to 0$, коли $\varepsilon \to 0$. З леми 1 випливає, що $\sup_{\rho(t,s)<\varepsilon} |X(t) - X(s)| \to 0$, якщо $\varepsilon \to 0$ за ймовірністю. Отже, існує така послідовність ε_n, що $\sup\limits_{\rho(t,s)<\varepsilon_n} |X(t)-X(s)| \to 0$ з імовірністю одиниця; таким чином, процес $X(t)$ вибірково неперервний з імовірністю одиниця.

Наслідок 4. *Твердження теореми 4 виконується, якщо замість умови (18) вимагати, щоб збігався інтеграл*

$$\int_0^\delta \mu(N_T(t))\,d\sigma(t) < \infty, \tag{20}$$

де $\delta > 0$ — будь-яка константа.

Твердження наслідку 4 доводиться так, як і твердження наслідку 2.

***Зауваження* 8.** У випадку, коли $\rho(t,s) = \|X(t)-X(s)\|_K$, тобто якщо можна покласти $\sigma(h) = h$, умова (20) має вигляд

$$\int_0^\delta \mu(N_T(t))\,d(t) < \infty. \tag{21}$$

Цю умову отримано в роботі [3], а в частинних випадках — в [1, 2].

4. Випадкові процеси з R^1. Розглянемо застосування попередніх результатів у випадку, коли $T = R^1$ із звичайною метрикою. У випадку, коли $T = R^n$, можна отримати такі ж результати.

Теорема 5. *Нехай $X = (X(t),\ t\in R^1)$ — сепарабельний випадковий процес, $X \in K(\Omega)$, де $K(\Omega)$ — квазі-K_σ-простір з квазінормою $\|\cdot\|_K$, підпорядковано функції $j = \{j(\lambda),\ |\lambda| < 1\}$, та з характеристикою $\mu(n)$. Нехай існує така неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma = \{\sigma(h),\ h > 0\}$, де $\sigma(h) \to 0$, коли $h \to 0$, що*

$$\sup_{|t-s|\le h} \|X(t)-X(s)\| \le \sigma(h).$$

Нехай для будь-якого $\nu > 0$ існує інтеграл

$$\int_0^\nu \mu\left(\left[\frac{\nu}{t}\right]\right) d\sigma(t) < \infty. \tag{22}$$

Тоді на будь-якому замкненому інтервалі I процес $X(t)$ вибірково неперервний з імовірністю одиниця. Якщо, крім цього, для деякої неперервної функції $c(t)$, $|c(t)| < 1$, збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} j(\gamma_k)\left(\delta_k + \frac{1}{q(1-q)}\int_0^{\alpha_{k,0}} \mu\left(\left[\frac{z_k}{t}\right]\right) d\sigma(t)\right) = \Phi_q < \infty,$$

де $0 < q < 1$, z_k — довжина замкнених інтервалів B_k таких, що $R^1 \subset \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, $\gamma_k == \sup_{t\in B_k} |c(t)|$, $\delta_k = \sup_{t\in B_k} \|X(t)\|_K$, $\alpha_{k,0} = \sigma^{(-1)}(q(\sigma(z_k/2))) \le \le z_k/2$, то з імовірністю одиниця

$$\|c(t)X(t)\|^1_{C(R)} \le \eta, \tag{23}$$

де η — випадкова величина з простору $K(\Omega)$ така, що $\|\eta\|_K \le \Phi_q$.

Теорема випливає з наслідку 2 та теореми 4, якщо зауважити, що в цьому випадку

$$N_{B_k}(t) \le \left[\frac{z_k}{2t}\right] + 1 \le \left[\frac{z_k}{t}\right].$$

***Наслідок* 5.** *Нехай* $X = (X(t),\ t \in R^1)$ — *сепарабельний випадковий процес,* $X \in K(\Omega)$, $\sup_{t \in R^1} \|X(t)\|_K = \delta < \infty$. *Якщо збігається інтеграл* $(\varepsilon > 0)$

$$\int_0^{\varepsilon} \mu\left(\left[\frac{1}{t}\right]\right) d\sigma(t) \ < \infty, \tag{24}$$

то на будь-якому інтервалі I *з імовірністю одиниця процес* X *вибірково неперервний. Для будь-якої парної неперервної функції* $c(t)$, $0 < c(t) \leq 1$, *яка монотонно прямує до нуля при* $t \to \infty$ *і для якої* $\sum_{k=1}^{\infty} j(c(k)) < \infty$, *з імовірністю одиниця виконується нерівність*

$$\| c(t) X(t) \|_{C(R)}^1 \ \leq \ \theta, \tag{25}$$

де $\theta \in K(\Omega)$,

$$\|\theta\| \ \leq \ 2\left[\delta + \frac{1}{q(1-q)} \int_0^{\alpha_0} \mu\left(\left[\frac{1}{t}\right]\right) d\sigma(t)\right] \sum_{k=1}^{\infty} j(c(k+1)), \quad \alpha_0 \ = \ \sigma^{(-1)}(q(\sigma(1/2))). \tag{26}$$

Щоб отримати твердження наслідку, покладемо $B_k = [k,\ k+1]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. У цьому випадку $z_k = 1$, $\delta_k \leq \delta$, $\alpha_{k,0} = \sigma^{(-1)}(q(\sigma(1/2)))$. Отже,

$$\Phi_q \ = \ 2\left[\delta + \frac{1}{q(1-q)} \int_0^{\alpha_0} \mu\left(\left[\frac{1}{t}\right]\right) d\sigma(t)\right] \sum_{k=0}^{\infty} j(c(k+1)).$$

***Зауваження* 9.** У випадку, коли $K(\Omega)$ — банахів K_σ-простір, умови наслідку 5 задовольняє, наприклад, функція $c(t) = (1 + |t|^{\alpha})^{-1}$, $\alpha > 1$.

Зрозуміло, що у частинних випадках можна отримати більш точний порядок росту.

***Наслідок* 6.** *Нехай* $X = (X(t),\ t \in R^1)$ — *сепарабельний випадковий процес з* $L_p(\Omega)$, $p > 1$, $\sup_{|t-s| \leq h} \|X(t) - X(s)\|_{L_p} = \sup_{|t-s| \leq h} \left(E|X(t) - X(s)|^p\right)^{1/p} \leq \leq |h|^{\alpha}$, $\alpha > 1/p$, $\sup_{|t| \leq z} \|X(t)\|_{L_p} \leq z^{\alpha}$. *Тоді процес* X — *вибірково неперервний з імовірністю одиниця на будь-якому інтервалі в* R^1 *та з імовірністю одиниця виконується нерівність*

$$\sup_{t \in R^1} |X(t)| \left(1 + |t|^{\tau}\right)^{-1} \ \leq \ \theta, \quad \theta \in L_p(\Omega), \quad \tau > \alpha, \tag{27}$$

$$\|\theta\| \ \leq \ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + |k|^{\beta\tau}} \left(\delta \ + \ \frac{1}{q(q-1)} \Delta\left[(k+1)^{\beta} - k^{\beta}\right]^{\alpha}\right), \tag{28}$$

де $\Delta = \left(\dfrac{q^{1/\alpha}}{2}\right)^{\alpha - 1/p} \dfrac{\alpha}{(\alpha - 1/p)}$, $\beta > (\tau - \alpha)^{-1}$, $\delta_k = (k+1)^{\beta\alpha}$.

Доведення. В умовах теореми 5 покладемо $B_k = \left[|k|^{\beta}, |k+1|^{\beta}\right]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\beta = (\tau - \alpha)^{-1} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Отже, $z_k = |k+1|^{\beta} - |k|^{\beta}$, $\alpha_{k,0} = (q)^{1/\alpha} z_k / 2$. Оскільки $\mu(n) = n^{1/p}$, то $\int_0^{\alpha_{k,0}} \mu\left(\left[\frac{z_n}{t}\right]\right) d\sigma(t) \leq [(k+1)^{\beta} - k^{\beta}]^{\alpha} \Delta$, тому має місце нерівність (28). Ряд в правій частині збігається, оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + |k|^{\beta\tau}} \left[(k+1)^{\beta} - k^{\beta}\right]^{\alpha} \ \leq \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{\beta\alpha}}{k^{\beta\tau}} \ \leq \ \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\beta\alpha} \frac{1}{k^{\beta(\tau - \alpha)}}.$$

***Наслідок* 7.** *Нехай* $X = (X(t),\ t \in R^1)$ *— сепарабельний випадковий процес,* $X \in L_u(\Omega)$, *де* $U(x) = \exp\{|x|^{\alpha}\} - 1$, $1 < \alpha$, $\sup_{|t-s| \le h} \|X(t) - X(s)\|_U \le \le \sigma(h) \le \sigma$, $\sup_{t \in R^1} \|X(t)\|_U \le \delta$. *Нехай збігається інтеграл*

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \left|\ln(3t/2)\right|^{1/\alpha} d\sigma(t) < \infty.$$

Тоді процес X *вибірково неперервний з імовірністю одиниця на будь-якому інтервалі в* R^1 *та з імовірністю одиниця виконується нерівність*

$$\sup_{t \in R^1} |X(t) c(t)| \le \eta, \tag{29}$$

де $\eta \in L_u(\Omega)$, $c(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le e; \\ (\ln t)^{-u}, & |t| \ge e, \end{cases} \quad u > \alpha,$

$$\|\eta\| \le 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-u\beta} \left(\delta + 4k^{\beta\alpha}(\sigma + I(\alpha))\right), \qquad \beta = I/(u-a) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{30}$$

Доведення. Для простору $L_u(\Omega)$ $\mu(n) = e^2 (\ln(n+1))^{1/\alpha}$. Тому

$$\mu\left(\frac{z_k}{t}\right) \le e^2 \left[\ln\left(\frac{z_k}{t} + 1\right)\right]^{1/\alpha} \le e^2 \left[(\ln z_k)^{1/\alpha} + (\ln(3t/2))^{1/\alpha}\right].$$

Отже, при $z_k > e$ $\int_0^{z_k/2} \mu\left(\frac{z_k}{t}\right) d\sigma(t) \le (\ln z_k)^{1/\alpha} (\sigma + I(\alpha)) e^2$. Далі в умовах теореми 1 виберемо $B_k = \left[\exp\left\{(|k| - 1)^{\beta}\right\}, \exp\left\{(|k|)^{b}\right\}\right]$, $k = +1, +2, \ldots$, $z_k = = \exp\left\{(|k|)^{b}\right\} - \exp\left\{(|k-1|)^{\beta}\right\}$, $\ln z_k \le k^{\beta}$.

***Зауваження* 10.** Умови цього наслідку задовольняє, наприклад, випадковий стаціонарний гауссів процес $X(t)$, якщо $EX(t) = 0$ і $EX(t)X(s+h) = = \exp\{-|h|\}$.

1. *Козаченко Ю. В.* Случайные процессы в пространствах Орлича // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1984. – Вып. 30. – С. 92 – 107; – 1984. – Вып. 31. – С. 44 – 50.
2. *Абжанов Е. А., Козаченко Ю. В.* Некоторые свойства случайных процессов в банаховых K_σ-пространствах // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 3. – С. 275 – 280.
3. *Абжанов Е. А., Козаченко Ю. В.* Случайные процессы в банаховых K_σ-пространствах случайных величин // Вероятностные методы исследования систем с бесконечным числом степеней свободы. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 4 – 11.
4. *Бондаренко І. В., Іванов О. В.* Про вибіркові властивості випадкових полів із стійкими приростами // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1992. – Вип. 47. – С. 11 – 15.
5. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. – М.: Мир, 1969. – 398 с.
6. *Ядренко М. И.* Спектральная теория случайных полей. – Киев: Выща шк., 1980. – 270 с.
7. *Dudly R. M.* Sample functions of the Gaussian processes // Ann. Probab. – 1973. – **1**, № 1. – P. 3 – 68.
8. *Fernique X.* Regularite' de traectoires de fonctions aléatoires gaussiennes // Lect. Notes Math. – 1974. – **480**. – P. 1 – 95.
9. *Булдыгин В. В.* Сходимость случайных элементов в топологических пространствах. – Киев: Наук. думка, 1980. – 239 с.
10. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 741 с.
11. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. – М.: Физматгиз, 1958. – 271 с.
12. *Ермаков С. В., Островский Е. И.* Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей. – М., 1986. – 42 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 3752 – В.86.0.

Одержано 24.04.97,
після доопрацювання — 09.09.97