УДК 517.53

Ю. Ю. Трохимчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
В. М. Сафонов (Укр. ун-т пищ. технологий, Киев)

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ПОСТОЯНСТВА КОМПЛЕКСНОЙ ФУНКЦИИ

A new criterion of constancy of complex functions is proved.

Доводиться новий критерій сталості комплексних функцій.

Известно, что если для непрерывной в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ функции $f(z) = u + iv$ комплексной переменной в каждой точке существует конечный предел

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{1}$$

и если на плотном множестве в $\mathcal{D}$ он равен нулю, то $f \equiv \text{const}$.

Целью настоящей статьи является доказательство обобщения этого утверждения, а именно: то же заключение, но с заменой условия (1) условием существования предела

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| = \rho(z) \le \infty. \tag{2}$$

Итак, докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть для непрерывной в области* $D \subset \mathbb{C}$ *функции* f *существует предел* (2) *в каждой точке, за исключением не более чем счетного их множества. Если он равен нулю на плотном множестве, то* $f \equiv \text{const}$.

Замечание. То, что утверждение теоремы нетривиально, показывает пример функции $f(z) = \varphi(x) + i\varphi(y)$, где φ — всюду дифференцируемая возрастающая функция на прямой [1], для которой множество $\{x\colon \varphi'(x) = 0\}$ всюду плотно; функция f здесь осуществляет даже гомеоморфизм плоскости. Конечно, о существовании предела (2) здесь нет и речи.

Перед доказательством теоремы 1 приведем некоторые сведения о дифференциальных свойствах комплексных функций.

Из условия существования предела (2) прежде всего следует дифференцируемость функций u, v почти всюду в $\mathcal{D}$ [2]; в точке дифференцируемости z множество $\mathfrak{M}_z$ производных чисел функции $f = u + iv$, т. е. всех предельных значений разностного отношения

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

при $h \to 0$, есть окружность плоскости ζ с параметрическим представлением

$$\zeta = f_z + f_{\bar{z}} e^{-2i\alpha}, \qquad \alpha \in [0, 2\pi], \quad \alpha = \lim \operatorname{Arg} h,$$

где

$$f_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Далее, существование предела $\rho(z)$ (2) означает, что почти всюду в $\mathcal{D}$ либо $f_{\bar{z}} = 0$, т. е. функция f моногенна в точке z и $\mathfrak{M}_z$ — единственная точка

$$\zeta = f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

либо $f_z = 0$, т. е. $\mathfrak{M}_z$ — полная окружность с центром $\zeta = 0$ и радиусом $\rho(z)$ (или, что то же, моногенной является сопряженная функция $\bar{f}$). Равенство $f_{\bar{z}} = 0$ это условия Коши – Римана (CR) для функции f:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

а $f_z = 0$ — условия Коши – Римана для сопряженной функции $\bar{f}$ $(\overline{\mathrm{CR}})$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

При этом (опять-таки почти всюду)

$$\rho(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2.$$

Отметим, что якобиан отображения $w = f(z)$ равен

$$J(f) = |f_z|^2 + |f_{\bar{z}}|^2.$$

Напомним свойства определенного класса вещественных и комплексных функций с некоторыми особенностями.

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы непрерывная функция f и нигде не плотное замкнутое множество p такие, что в каждом интервале смежности к p функция f (монотонно) возрастает; если при этом ни в какой окрестности каждой точки из p она не является монотонной, то будем говорить, что имеем функцию с (существенно) особым множеством p; точки его дополнения (временно) назовем регулярными.

Пример. $f(z) = x - \theta(x)$, $x \in [0, 1]$, где $\theta(x)$ — монотонно неубывающая сингулярная функция, известная как „канторова лестница". Канторово множество $\mathcal{P}_0$ является здесь существенной особенностью: на плотном в $\mathcal{P}_0$ подмножестве производная $f'(x) = -\infty$.

Легко видеть, что существенная особенность p не содержит изолированных точек, т. е. в этом случае p всегда совершенное множество.

Известно [3], что образ $f(p)$ содержит невырожденные отрезки, причем на p имеется плотное множество типа G_δ (т. е. всюду второй категории на p) точек бесконечной кратности, т. е. таких точек x_0, для каждой из которых существует сходящаяся к ней бесконечная последовательность $\{x_n\}$ регулярных точек (а отсюда легко следует, что существует подобная последовательность и точек из p) таких, что $f(x_n) = f(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Аналогично непрерывную функцию $\mathcal{F}(x, y)$, заданную в прямоугольнике $\Pi \equiv [a, b] \times [c, d]$, назовем функцией с возможным особым множеством $\mathcal{P}$, если: 1) $\mathcal{P}$ замкнуто и нигде не плотно в Π и 2) для любой вертикали $l: x = x_0$, $a \le x_0 \le b$, функция $\mathcal{F}(x_0, y)$ возрастает на каждом интервале смежности к $P \cap l$.

Очевидно, что в дополнении к $\mathcal{P}$ отображение $\Phi \equiv x + i\,\mathcal{F}(x, y)$ является (положительным) локальным гомеоморфизмом. Будем говорить, что $\mathcal{P}$ является существенно особым для $\mathcal{F}$ (и для Φ), если ни в какой окрестности каждой точки из $\mathcal{P}$ отображение Φ уже не является гомеоморфизмом. Опять-таки в этом случае на $\mathcal{P}$ имеется плотное подмножество типа G_δ точек бесконечной кратности, т. е. для каждой его точки (x_0, y_0) найдется сходящаяся к ней бесконечная последовательность (x_0, y_n) (отметим, что Φ сохраняет вертикали) регулярных точек таких, что $\Phi(x_0, y_n) = \Phi(x_0, y_0)$.

Наконец, напомним, что отображение $\Phi: \mathcal{D} \to \mathbb{C}_1$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, называется внутренним (по Стоилову), если оно открыто и нульмерно, т. е. для любой точки $w_0 \in \mathbb{C}_1$ ее прообраз $\Phi^{-1}(w_0)$ есть нульмерное замкнутое множество (ни один континуум не стягивается в точку). Известная теорема Стоилова утверждает, что каждое положительное внутреннее отображение есть композиция положительного гомеоморфизма с аналитической функцией. Опять же, если непрерывное отображение $\Phi: \mathcal{D} \to \mathbb{C}_1$ является положительным внутренним вне некоторого замкнутого нигде не плотного множества $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$ и ни в какой окрестности каждой его точки уже внутренним не является, то будем говорить, что имеем отображение с (существенно) особым множеством $\mathcal{P}$. Оказывается, что теорема о точках бесконечной кратности справедлива и для таких отображений. Точнее, имеет место следующее утверждение: пусть в области $\mathcal{D} \in \mathbb{C}$ даны замкнутое нигде не плотное множество $\mathcal{P}$ и непрерывное отображение $\Phi: \mathcal{D} \to \mathbb{C}_1$ такие, что: 1) Φ — нульмерно в $\mathcal{D}$; 2) Φ является положительным внутренним отображением в каждой компоненте открытого множества $\mathfrak{O} = \mathcal{D} \setminus \mathcal{P}$; 3) ни в какой окрестности каждой точки из $\mathcal{P}$ уже внутренним не является; тогда на $\mathcal{P}$ существует плотное подмножество типа G_δ точек бесконечной кратности, т. е. для каждой точки z_0 этого подмножества найдется бесконечная последовательность $\{z_n\}$ точек из $\mathfrak{O}$ таких, что $z_n \to z_0$ и $\Phi(z_n) = \Phi(z_0)$.

Вернемся к условиям теоремы 1. Прежде всего, множество $\{z: \rho(z) = 0\}$, как множество уровня функции первого класса, имеет тип G_δ; поскольку оно плотно в $\mathcal{D}$, то оно — всюду второй категории (в $\mathcal{D}$); оно также содержит плотное подмножество типа G_δ точек непрерывности $\rho(z)$. На нем $\rho(z) = 0$, а значит, $df = 0$. Отсюда легко следует, что в $\mathcal{D}$ выделяется плотное множество кругов, в каждом из которых f удовлетворяет условию Липшица.

Допустим теперь, что мы сумеем доказать теорему при дополнительном ограничении, что f — липшицева; покажем, как отсюда следует ее заключение и в общем случае.

Выше было отмечено, что в $\mathcal{D}$ выделяется плотное множество кругов, в каждом из которых f удовлетворяет условию Липшица. Но тогда в $\mathcal{D}$ существует всюду плотное открытое множество $\mathfrak{O}$, в каждой компоненте которого $f \equiv \text{const}$; конечно, на оставшемся множестве $\mathcal{P} = \mathcal{D} \setminus \mathfrak{O}$ существует предел (2), за исключением не более чем счетного множества точек. Нам нужно показать, что $\mathcal{P} = \varnothing$.

Если же $\mathcal{P} \neq \varnothing$, то оно совершенно; можем считать, что ни в какой окрестности любой его точки функция f уже не является константой. На плотном его подмножестве (например, в граничных точках компонент из $\mathfrak{O}$) $\rho(z) = 0$; это подмножество также второй категории, но уже на $\mathcal{P}$, а потому на $\mathcal{P}$ выделяются порции, на которых $f|_{\mathcal{P}}$ удовлетворяет условию Липшица. Тогда из леммы, которую мы докажем ниже, следует, что f удовлетворяет этому условию и в полной окрестности некоторых точек из $\mathcal{P}$, а значит, по предположению, в этих окрестностях $f = \text{const}$, что противоречит определению множества $\mathcal{P}$.

Докажем сначала упомянутое утверждение, которое сформулируем в более общем виде.

Лемма 1. *Пусть в круге d задана непрерывная функция f и нигде не плотное множество p такое, что в каждой компоненте открытого множества $\mathfrak{D} = d\setminus p$ либо f, либо $\bar{f}$ является аналитической. Если $f|_p$ — липшицева, то f — локально липшицева в d.*

Доказательство. Возьмем производную точку $z_0 \in p$ и круг $d_r(z_0) \subset d$ радиуса $r < 1$. Можем считать, что в круге d_r есть компоненты $\mathfrak{D}$ аналитичности: иначе мы рассматривали бы сопряженную функцию $\bar{f}$.

По условию имеем

$$|f(z) - f(z')| \leq L|z - z'|$$

для любых $z, z' \in p$ при некотором $L > 0$. Продолжим функцию $f|_p$ на всю плоскость до функции $\tilde{f}$ с сохранением условия Липшица и рассмотрим ее ограничение только на компоненты $\mathfrak{D}$, где аналитической является $\bar{f}$. Полученную в результате функцию обозначим через f_1.

Пусть $\max\limits_{z \in d_r}|f_1(z) - f_1(z_0)| = \Delta$. Тем самым образ круга d_r при отображении $w = f_1(z) - f_1(z_0)$ имеет диаметр $\leq 2Lr$.

Покажем, что модуль производной f_1' в круге d_r в точках аналитичности f_1 не превышает $2L$.

Предположим противное и пусть в некоторой точке $\tilde{z} \in d_r\setminus p$ имеем $f'(\tilde{z}) = A_1 e^{i\alpha}$, $A_1 > 2L$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(z) = f_1(z) - f_1(z_0) - A_1 e^{i\alpha}(z - z_0).$$

В каждой компоненте из $d_r\setminus p$ эта функция является либо аналитической, либо осуществляет положительный гомеоморфизм: при $z, z' \in d$, $z \neq z'$:

$$|g(z) - g(z')| \geq A_1|z - z'| - |f_1(z) - f_1(z')| \geq$$

$$\geq (A_1 - L)|z - z'| > 0;$$

при этом множества моногенности $\mathfrak{M}_z(g)$ в точках дифференцируемости g являются окружностями, не проходящими через начало координат $\zeta = 0$. Следовательно, якобиан $J(g)$ в этих точках положителен. Гомеоморфизм отображения g имеет место и на множестве p, что следует из того же неравенства.

Согласно теореме о продолжении [2], отсюда следует, что g есть внутреннее отображение (по Стоилову), а для таких отображений имеет место принцип аргумента.

Очевидно, порядок отображения $w = A_i e^{i\alpha}(z - z_0)$ на границе ∂d_r относительно начала координат $w = 0$ w-плоскости равен ± 1. При этом образ этой границы есть, конечно, окружность $|w| = A_1 r$. Поскольку диаметр образа круга d_r при отображении $f_1(z) - f_1(z_0)$ меньше $2Lr$, то отсюда следует (ср. с теоремой Руше), что порядок отображения g на ∂d_r также равен $+1$ относительно каждой точки круга $|w| \leq Lr$. А это означает, что $g|_{d_{r/2}}$ есть гомеоморфизм. С другой стороны, в точке $\tilde{z}$ имеем

$$g'(\tilde{z}) = f_1'(\tilde{z}) - A_1 e^{i\alpha} = f'(z_0) - A_1 e^{i\alpha} = 0,$$

но в такой точке аналитичности функция не может быть даже локальным гомеоморфизмом.

Точно так же, рассматривая сопряженную функцию $\bar{f}$, доказываем, что и $|\bar{f}'| \le 2L$ в точках d_r, где она аналитична. Учитывая условие Липшица на p и полученные оценки производных f', $\bar{f}'$, легко получаем неравенство

$$|f(z) - f(z')| \le 2L\,|z - z'|$$

для всех точек $z, z' \in d_r(z_0)$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *В условиях теоремы 1 найдется открытое всюду плотное в $\mathcal{D}$ множество $\mathfrak{D}$, в каждой компоненте которого f является константой.*

Доказательство. Предполагая противное, найдем круг $d \subset \mathcal{D}$, в котором f липшицева, и множества точек, где выполнено либо условие CR, либо $\overline{\mathrm{CR}}$, всюду плотны и положительной меры в каждой своей порции.

По условию в d имеем

$$|f(z) - f(z')| \le L\,|z - z'|, \qquad z, z' \in d;$$

очевидно, L является верхней гранью для $|f_z|$, $|f_{\bar{z}}|$, модулей всех частных производных от u, v (почти всюду) и $\rho(z)$.

Можем считать, что $\sup\limits_{d} \rho(z) = L$. Рассмотрим точку $\tilde{z} \in d$, в которой $f_z = 0$ и $|f_{\bar{z}}| = \lambda L > 0$, $3/4 < \lambda < 1$ (якобиан $J(f)|_{\tilde{z}} = -|f_{\bar{z}}|^2 = -\lambda^2 L^2 <$ < 0); этого всегда можно достичь, рассматривая, если нужно, сопряженную функцию $\bar{f}$. Умножая, в случае необходимости, f на $e^{i\theta}$, можем считать, что $f_{\bar{z}}|_{\tilde{z}} = \lambda L$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\mathcal{F} = f + az + b\bar{z} = u + iv + (a_1 + a_2 i)(x + iy) + (b_1 + b_2 i)(x - iy) =$$
$$= u + (a_1 + b_1)x + (b_2 - a_2)y + i\,[v + (a_1 - b_1)y + (a_2 + b_2)x] =$$
$$= U + iV.$$

Выберем сначала a_1, b_1 так, чтобы

$$a_1 - b_1 = kL, \qquad 0 < k < 1,$$
$$a_1 - b_1 = 2L,$$

т. е.

$$a_1 = \left(1 + \frac{k}{2}\right)L, \qquad b_2 = \left(1 - \frac{k}{2}\right)L,$$

$$a_1^2 + b_1^2 = \left(2 + \frac{k^2}{2}\right)L^2.$$

Затем a_2, b_2 выберем так, чтобы было

$$a_2^2 + b_2^2 = a_1^2 + b_1^2,$$
$$a_1^2 + a_2^2 > b_1^2 + b_2^2.$$

Этого можно достичь, положив $a_2^2 = \left(\dfrac{k^2}{2} + 1\right)L^2$, $b_2 = L$.

При таком выборе отображение $\mathcal{F}$ будет отображением с особенностью: в точке непрерывности из множества $\{z : \rho(z) = 0\}$, т. е. там, где все частные производные u, v равны нулю, якобиан

$$J(\mathcal{F}) = |a|^2 - |b|^2 = L^2(a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2) =$$
$$= \left(2k + \frac{k^2}{2}\right) L^2 > 0,$$

а значит, в окрестности этой точки $\mathcal{F}$ будет положительным гомеоморфизмом (напомним, что $f = u + iv$ липшицева). С другой стороны, в точке $\tilde{z}$

$$J(\mathcal{F}, \tilde{z}) = |f_z + a|^2 - |f_{\bar{z}} + b|^2 = |a|^2 - |\lambda L + b_1 + b_2 i|^2 =$$
$$= L^2 \left\{ \left(1 + \frac{k^2}{2}\right) + 1 + \frac{k^2}{2} - \left[\lambda^2 + 2\lambda\left(1 - \frac{k}{2}\right) + \left(1 - \frac{k}{2}\right)^2 + 1\right]\right\} <$$
$$< L^2 \left\{ 2 + k + \frac{3}{4}k^2 - \left[\frac{9}{16} + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{k}{2}\right) + \left(1 - \frac{k}{2}\right)^2 + 1\right]\right\} =$$
$$= L^2 \left(\frac{11}{4}k + \frac{k^2}{4} - \frac{33}{16}\right).$$

В дальнейшем будем полагать $0 < k < \frac{1}{4}$; в этом случае $J(\mathcal{F}, \tilde{z}) < 0$. Но это и означает, что множество особенностей $\mathcal{P}$ отображения $\mathcal{F}$ непусто: $\tilde{z} \in \mathcal{P}$.

Поскольку

$$a_1 + b_1 > L, \quad a_1 - b_1 > 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + (a_1 + b_1) > 0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + (a_1 - b_1),$$

то функция $U(x, y)$ — возрастающая по x всюду в d, а $V(x, y)$ — возрастающая по y на плотном множестве кругов. Поэтому линии уровня функции U являются однозначными дугами относительно направления оси Ox (т. е. графиками однозначных непрерывных функций вида $x = x(y)$), уровни же V в плотном множестве кругов в d — графиками однозначных функций вида $y = y(x)$.

Поэтому если отображение $\mathcal{F}$ не нульмерно, то найдется дуга, — очевидно, график монотонной функции $y = y(x)$, — на которой обе функции U, $V = \text{const}$. Возьмем на ней произвольную точку $z_0 = x_0 + iy_0$ и некоторую последовательность $\{z_n\}$, $z_n = x_n + iy_n$, ее точек, сходящуюся к z_0. Имеем $\mathcal{F}(z_n) = \mathcal{F}(z_0)$, или $U(z_n) = U(z_0)$, $V(z_n) = V(z_0)$.

Это же означает, что

$$u(z_n) = -(a_1 + b_1)x_n - (b_2 - a_2)x_n + u(z_0) + (a_1 + b_1)x_0 + (b_2 - a_2)y_0,$$
$$v(z_n) = -(a_1 - b_1)x_n - (b_2 + a_2)x_n + v(z_0) + (a_1 - b_1)x_0 + (b_2 + a_2)y_0.$$

Будем считать z_0 не принадлежащим исключительному счетному множеству в теореме 1.

Оценим растяжение $\rho(z_0)$ по последовательности $\{z_n\}$:

$$\left|\frac{f(z_n)-f(z_0)}{|z_n-z_0|}\right| = \left|-\frac{(a_1+b_1)(x_n-x_0)}{|z_n-z_0|} - \frac{(b_2-a_2)(y_n-y_0)}{|z_n-z_0|} + \right.$$
$$\left. + \; i\left[-\frac{(a_1-b_1)(x_n-x_0)}{|z_n-z_0|} - \frac{(b_2+a_2)(y_n-y_0)}{|z_n-z_0|}\right]\right| =$$
$$= |(a_1+b_1)\cos\alpha_n + (b_2-a_2)\sin\alpha_n +$$
$$+ \; i[(a_1-b_1)\cos\alpha_n + (b_2+a_2)\sin\alpha_n]| = |r+is|.$$

Здесь

$$\cos\alpha_n = \frac{x_n-x_0}{|z_n-z_0|}, \qquad \sin\alpha_n = \frac{y_n-y_0}{|z_n-z_0|}.$$

Далее,

$$r^2 = (a_1+b_1)^2\cos^2\alpha_n +$$
$$+ \; 2(a_1+b_1)(b_2-a_2)\sin\alpha_n\cos\alpha_n + (b_2-a_2)^2\sin^2\alpha_n,$$
$$s^2 = (a_1-b_1)^2\cos^2\alpha_n +$$
$$+ \; 2(a_1-b_1)(b_2+a_2)\sin\alpha_n\cos\alpha_n + (b_2+a_2)^2\sin^2\alpha_n,$$
$$r^2+s^2 = 2[(a_1^2+b_1^2)\cos^2\alpha_n +$$
$$+ \; (a_1b_2-a_2b_1)\sin\alpha_n\cos\alpha_n + (a_2^2+b_2^2)\sin^2\alpha_n] =$$
$$= 2\left[\left(2+\frac{k^2}{2}\right)L^2 + (a_1b_2-a_2b_1)\sin\alpha_n\cos\alpha_n\right].$$

Поскольку

$$|a_1b_2-a_2b_1| = L^2\left|\left(1+\frac{k}{2}\right) - \sqrt{\frac{k^2}{2}+1}\left(1-\frac{k}{2}\right)\right| < L^2, \qquad 0<k<\frac{1}{4},$$

то

$$|(a_1b_2-a_2b_1)\sin\alpha_n\cos\alpha_n| < L^2.$$

Объединяя полученные оценки, имеем

$$|f(z_n)-f(z_0)| > \sqrt{2}\,L\,|z_n-z_0|,$$

что противоречит определению липшицевой константы L.

Если же $\mathcal{F}$ нульмерно, то на основании предыдущего имеются бесконечнократные точки, что снова приводит к противоречию.

Тем самым доказано, что не может существовать область d, в которой всюду плотными и всюду положительной меры были бы оба множества $\{z : f' \neq 0\}$ и $\{z : \bar{f}' \neq 0\}$. А это значит, что в условиях теоремы в каждой подобласти из d найдется круг, где почти всюду выполнены либо только условия CR, либо только $\overline{\text{CR}}$; но тогда в таком круге (в силу липшицевости f) либо f, либо $\bar{f}$ будет аналитической, а так как $\{z : \rho(z) = 0\}$ всюду плотно, то в этом круге в обоих случаях $f = \text{const}$.

Итак, доказано, что в области d найдется открытое плотное в ней множество $\mathfrak{D}$, в каждой компоненте которого f является константой.

***Завершение доказательства теоремы* 1.** Если предположить, что теомножество $\mathfrak{D}$, в каждой компоненте которого f есть константа.

Предполагая противное, найдем круг $d' \subset d$, в котором множества точек, где выполнены либо условия CR, либо $\overline{\mathrm{CR}}$, оба всюду плотны и положительной меры в каждой своей порции.

По условию в d функция f липшицева:

$$|f(z') - f(z'')| = L|z' - z''|;$$

очевидно, L является верхней гранью для модулей всех частных производных от u, v.

Можем считать, что

$$\sup_{d'} \rho(z) = \sup_{d'} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} = L.$$

Пусть в точке $\tilde{z} \in d'$ $f_z = 0$ и $|f_{\bar{z}}| = \lambda L$, где $\lambda > \dfrac{3}{4}$. И теперь, повторяя дословно соответствующую часть доказательства теоремы 1 (лишь с использованием леммы 3), приходим к противоречию с нашим предположением.

***Доказательство теоремы* 2** проводим по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.

Доказывая от противного, находим открытое плотное в $\mathcal{D}$ множество $\mathfrak{D}$, в каждой компоненте которого $f = \mathrm{const}$, и непустое совершенное множество $\mathcal{P} = \mathcal{D} \setminus \mathfrak{D}$ такое, что ни в какой окрестности каждой его точки f уже не является константой.

На плотном в $\mathcal{P}$ подмножестве все частные производные от u, v равны нулю, так как каждая компонента множества $\mathfrak{D}$ имеет на границе плотное множество точек, достижимых кругами, принадлежащими ей, а значит, и прямыми углами, ограниченными координатными линиями x, $y = \mathrm{const}$; при этом если какой-либо круг касается одной из этих прямых, то, в силу липшицевости f, производная ее вдоль окружности будет равна производной вдоль этой прямой.

Поскольку $\left\{z\colon \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0\right\}$ — типа G_δ, то это справедливо на подмножестве $\mathcal{P}$ всюду второй категории. При этом в точках этого подмножества, где частные производные непрерывны по множеству $\mathcal{P}$, а значит, в силу леммы 1, f липшицева и в их окрестности, снова f — константа в этой области (лемма 4), а это противоречит определению множества $\mathcal{P}$.

Теорема 2 доказана.

1. *Куратовский К.* Топология: в 2-х т. – М.: Мир, 1969. – Т. 2. – С. 624 с.
2. *Трохимчук Ю. Ю.* Непрерывные отображения и условия моногенности. – М.: Физматгиз, 1963. – 212 с.
3. *Трохимчук Ю. Ю.* Устранимые особенности аналитических функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 224 с.

Получено 09.06.98