УДК 519

А. Ю. Кондратьев, студ. (Киев. ун-т),
В. З. Энольский, канд. физ.-мат. наук (Ин-т металлофизики НАН Украины, Киев)

ПОЛИНОМЫ ЯКОБИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА ДЛЯ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

We consider the method for studying a completely integrable dynamical system by means of the L representation of the motion equations. The Lax representation is obtained for Hénon-Heiles system the case where it is integrable and for an anisotropic oscillator.

Розглядається метод дослідження цілком інтегровних динамічних систем шляхом зображен їх рівнянь руху у формі Лакса. Одержані зображення Лакса для інтегровного випадку систе Енона–Еліса та анізотропного осцилятора.

1. Нахождение представления Лакса

$$\dot{L} = [L, A] \qquad ($$

для алгебраической вполне интегрируемой системы [1, 2] является важны средством для исследования системы. Если система ассоциирована с неси гулярной гиперэллиптической кривой C рода g, уравнение которой дается форме Вейерштрасса формулой

$$w^2 = f(z), \qquad ($$

где $f(z)$ является полиномом степени $2g+1$, то полезная информация, о легчающая построение представления Лакса, может быть извлечена из анали полиномов Якоби [3], определяемых следующим образом. Пусть $p_1, \ldots, p_g \in \mathbb{C}$, тогда полиномы Якоби имеют вид

$$U(z; p_1, \ldots, p_g) = \prod_{i=1}^{g} (z - z(p_i)),$$

$$V(z; p_1, \ldots, p_g) = \sum_{i=1}^{g} w(p_i) \times$$

$$\times \frac{(z - z(p_1)) \ldots (z - z(p_i))^{\wedge} \ldots (z - z(p_g))}{(z(p_i) - z(p_1)) \ldots (z(p_i) - z(p_i))^{\wedge} \ldots (z(p_i) - z(p_g))},$$

$$W(z; p_1, \ldots, p_g) = \frac{f(z) - V^2(z; p_1, \ldots, p_g)}{U(z; p_1, \ldots, p_g)}.$$

Выражение $(\ldots)^{\wedge}$ обозначает отсутствие данного множителя. При этом в полняется тождество $UW + V^2 = f(z)$. В настоящей статье мы развиваем по ход работы [4], показывая как по известным полиномам Якоби построить L $-A$-пару в терминах матриц размера 2×2. В качестве примера рассмотрен один из интегрируемых случаев системы Энона–Элиса [5] и анизотропный о циллятор [1], для которых представления Лакса в полученной форме не бы ранее известны. Два других интегрируемых случая системы Энона–Элиса ассо циированы с негиперэллиптическими кривыми и этим методом не могут бы рассмотрены. Представление Лакса для этих случаев можно получить из р зультатов работы [6]. Полное изложение обсуждаемого в данной работе во роса приведено в [7].

2. Ограничимся в нашем рассмотрении кривой (2) второго рода. В этом случае полиномы Якоби (3) имеют вид

$$U = z^2 - z(\mu_1 + \mu_2) + \mu_1\mu_2,$$
$$V = z\frac{\sqrt{f(\mu_2)} - \sqrt{f(\mu_1)}}{\mu_2 - \mu_1} + \frac{\mu_2\sqrt{f(\mu_1)} - \mu_1\sqrt{f(\mu_2)}}{\mu_2 - \mu_1}, \tag{4}$$
$$W = \frac{f - V^2}{U}$$

где $\mu_1 = z(p_1)$, $\mu_2 = z(p_2)$. В переменных μ_1, μ_2 уравнения движения имеют вид

$$\frac{d\mu_1}{\sqrt{f(\mu_1)}} + \frac{d\mu_2}{\sqrt{f(\mu_2)}} = 0,$$
$$\frac{\mu\, d\mu_1}{\sqrt{f(\mu_1)}} + \frac{\mu\, d\mu_2}{\sqrt{f(\mu_2)}} = -\frac{1}{\kappa}dt. \tag{5}$$

Легко видеть, что $V = \kappa\dot{U}$. Обозначим

$$U = z^2 + U_1 z + U_0,\ V = V_1 z + V_0, \quad W = W_3 z^3 + W_2 z^2 + W_1 z + W_0,$$

где коэффициенты полиномов определяются из (4).

Предложение. *Пусть U, V, W являются полиномами Якоби гиперэллиптической кривой второго рода. Тогда равенство* (2), *в котором*

$$L = \begin{pmatrix} -\kappa\dot{U}_1 z - \kappa\dot{U}_0 & z^2 + U_1 z + U_0 \\ W_3 z^3 + W_2 z^2 + W_1 z + W_0 & \kappa\dot{U}_1 z + \kappa\dot{U}_0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$A = \frac{1}{2\kappa}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ W_3 z - U_1 + W_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

эквивалентно уравнениям движения динамической системы с двумя степенями свободы. Уравнения движения имеют вид

$$2\kappa^2\ddot{U}_1 = W_3U_0 + W_2U_1 - W_1 - W_3U_1^2, \quad 2\kappa^2\ddot{U}_0 = W_2 - U_1W_3U_0 - W_0,$$
$$\dot{W}_1 = U_1\ddot{U}_1W_3 - W_2\ddot{U}_1 - \ddot{U}_0W_3,\ \dot{W}_2 = -W_3\ddot{U}_1, \quad \dot{W}_0 = U_1\ddot{U}_0W_3 - W_2\ddot{U}_0.$$

Доказательство основано на прямом вычислении.

3. Рассмотрим два примера, имеющих разнообразные применения к физике. А именно, рассмотрим систему Энона–Элиса в интегрируемом случае [8], в котором гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + Aq_1^2 + Bq_2^2\right) - q_1^2 q_2 - 2q_2^2,$$

A и B — произвольные константы. Запишем гамильтоновы уравнения движения

$$\dot{q}_1 = p_1, \quad \dot{p}_1 = 2q_1q_2 - Aq_1,$$
$$\dot{q}_2 = p_2, \quad \dot{p}_2 = q_1^2 + 6q_2^2 - Bq_2, \tag{8}$$

и второй интеграл движения

$$F = q_1^4 + 4q_1^2 q_2^2 + 4p_1(p_1q_2 - p_2q_1) - 4Aq_1^2q_2 + (4A-B)(p_1^2 + Aq_1^2).$$

Известно [8], что уравнение Гамильтона – Якоби, соответствующее системе (8), разделяется в координатах μ_1, μ_2, определяемых формулами $q_1^2 = -4\mu_1\mu_2$, $q_2 = \mu_1 + \mu_2 + (B-4A)/4$. В этих переменных уравнения движения имеют вид (5) с $\kappa = 2$ и $f(z) = zP(z)$, где

$$P(z) = 16z^2 - 8(6A-B)z^3 + (12A-B)(4A-B)z^2 + (8H - A(4A-B)^2)z - F.$$

Коэффициенты полиномов Якоби для этой гиперэллиптической кривой таковы:

$$U_1 = \frac{1}{4}B - q_2 - A,\quad U_0 = -\frac{1}{4}q_1^2,\quad V_1 = 2p_2,\quad V_0 = p_1q_1,\quad W_3 = 16,$$

$$W_2 = 16q_2 - 32A + 4B,\quad W_1 = (12A-B)(4A-B) + 4q_1^2 +$$

$$+ (16q_2 - 32A + 4B)(q_2 + A - B/4),\quad W_0 = 4p_1^2.$$

Рассмотрим второй пример — анизотропный осциллятор в потенциале четвертого порядка (см., например, [1]). Уравнениями движения этой динамической системы являются

$$\begin{aligned} \dot q_1 &= p_1, \quad \dot p_1 = q_1(\lambda_1 - q_1^2 - q_2^2), \\ \dot q_2 &= p_2, \quad \dot p_2 = q_2(\lambda_2 - q_1^2 - q_2^2). \end{aligned} \tag{9}$$

В переменных μ_1, μ_2, определяемых формулами

$$q_1^2 = 2\frac{(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_1-\mu_2)}{\lambda_1-\lambda_1},\quad q_2^2 = 2\frac{(\lambda_2-\mu_1)(\lambda_2-\mu_2)}{\lambda_1-\lambda_1},$$

уравнения движения имеют вид (5) с $\kappa = 1/4$ и полиномом $f(z)$, определяемым по формуле

$$f(z) = z^5 - 2(\lambda_1+\lambda_2)z^4 + (2\lambda_1\lambda_2 + (\lambda_1+\lambda_2)^2 - H)z^3 -$$

$$-(F + 2\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2) - (\lambda_1+\lambda_2)H)z^2 +$$

$$+(F(\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_1^2\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 H)z - \lambda_1\lambda_2 F,$$

где H — гамильтониан системы (9),

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2) + \frac{1}{4}(q_1^2 + q_2^2)^2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2),$$

а F — второй интеграл движения,

$$F = \frac{1}{4}(p_1q_2 - p_2q_1)^2 + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2 q_1^2/2 - \lambda_1 q_2^2/2) -$$

$$-\lambda_2 p_1^2/2 - \lambda_1 p_2^2/2.$$

Коэффициенты полиномов Якоби имеют вид

$$U_1 = \frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2 - \lambda_1 - \lambda_2,\quad U_0 = \lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{2}q_1^2\lambda_2 - \frac{1}{2}q_2^2\lambda_1,$$

$$V_1 = \frac{1}{2}q_1p_1 + \frac{1}{2}q_2p_2,\quad V_0 = -\frac{1}{2}q_1p_1\lambda_2 - \frac{1}{2}q_2p_2\lambda_1,\quad W_3 = 1,$$

$$W_2 = -\frac{1}{2}q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2 - \lambda_1 - \lambda_2, \quad W_1 = \lambda_1\lambda_2 + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(q_1^2 + q_2^2) -$$

$$- \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2), \quad W_0 = \frac{1}{2}(\lambda_2 p_1^2 + \lambda_1 p_2^2) - \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2(q_2^2 + q_1^2).$$

Отметим, что в рамках предложенного метода могут быть построены представления Лакса в терминах матрицы размера 2×2 и для анизотропного осциллятора с n степенями свободы [1]. Развитый в этой работе метод может быть применен и к другим вполне интегрируемым динамическим системам. Отметим также, что представление Лакса такой формы позволяет эффективно проинтегрировать систему [9] и проквантовать ее [10].

1. *Переломов А. М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. – М.: Наука, 1990. – 240 с.
2. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 332 с.
3. *Мамфорд Д.* Лекции о тэта-функциях. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
4. *Fairbanks L. D.* Lax equation representation of certain completely integrable systems // Comp. Math. – 1988. – **68**. – P. 31 – 40.
5. *Henon M., Heiles C.* The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments // Astron. J. – 1964. – **69**. – P. 73.
6. *Fordy A. P.* The Henon–Heiles system revisited // Physica D. – 1991. – **52**. – P. 204 – 210.
7. *Enol'skii V. Z., Kondratiev A. Ju., Kostov N. A.* Lax representation for some dynamical systems. – Bielefeld Univ., 1991. – 8 p. – Preprint.
8. *Newell A. C., Tabor M., Zeng Y. B.* A unified approach to Panleve expansions // Physica D. – 1987. – **29**. – P. 1 – 68.
9. *Дубровин Б. А.* Тэта-функции и нелинейные уравнения // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, вып. 2. – С. 11 – 80.
10. *Фаддеев Л. Д., Тахтаджян Л. А.* Квантовый метод обратной задачи и *XYZ* модель Гейзенберга // Там же. – 1979. – **34**, вып.5. – С. 13 – 63.

Получено 09.06.92