УДК 517.53

А. П. Голуб, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА БИОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К АППРОКСИМАЦИЯМ ПАДЕ

Transformations of biorthogonal polynomials under certain transformations of the sequences that can be made biorthogonal are studied. The obtained result is used to construct Pade approximants of orders $[N-1/N]$, $N \in \mathbb{N}$, for the functions

$$\tilde{f}(z) = \sum_{m=0}^{M} \alpha_m \frac{f(z) - T_{m-1}[f; z]}{z^m}$$

where $f(z)$ is a function, for which Pade approximants of these orders are known, $T_j[f; z]$ are Taylor polynomials of degree j of the function $f(z)$, and α_m, $m = \overline{1, M}$, are some constants.

Досліджені перетворення біортогональних поліномів при деяких певних перетвореннях послідовностей, що біортогоналізуються. Одержаний результат використано при побудові апроксимант Паде порядків $[N-1/N]$, $N \in \mathbb{N}$, функцій вигляду

$$\tilde{f}(z) = \sum_{m=0}^{M} \alpha_m \frac{f(z) - T_{m-1}[f; z]}{z^m},$$

де $f(z)$ — функція, для якої апроксиманти Паде вказаних порядків відомі, $T_j[f; z]$ — многочлени Тейлора порядку j функції $f(z)$, а α_m, $m = \overline{1, M}$, — деякі константи.

1. Введение. Одним из подходов к построению и исследованию аппроксимаций Паде аналитических функций является предложенный В. К. Дзядыком в 1981 г. метод обобщенных моментных представлений [1].

Определение 1. *Для числовой последовательности* $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ $\Big($ *или для функции, представимой степенным рядом* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$ $\Big)$ *ее обобщенным моментным представлением в банаховом пространстве* X *называется двупараметрическая совокупность равенств*

$$s_{k+j} = l_j(x_k), \quad k, j = \overline{0, \infty}, \tag{1}$$

где $x_k \in X$, $k = \overline{0, \infty}$, *а* $l_j \in X^*$, $j = \overline{0, \infty}$.

Главная трудность, возникающая при использовании обобщенных моментных представлений в вопросах аппроксимации Паде, заключается в построении и исследовании биортогональных полиномов.

Определение 2. *Последовательности обобщенных полиномов*

$$L_M = \sum_{j=0}^{M} c_j^{(M)} l_j, \quad M = \overline{0, \infty},$$

и

$$X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_k, \quad N = \overline{0, \infty},$$

по системам функций, входящих в равенства (1), *называются биортогональными, если*

$$L_M(X_N) = 0 \quad при \quad M \neq N. \tag{2}$$

Некоторые свойства биортогональных полиномов изучались в [2–4].

В ряде случаев, однако, упомянутая трудность оказывается преодолимой благодаря тому, что в этих случаях в роли биортогональных полиномов выступают обычные ортогональные многочлены, свойства которых достаточно хорошо изучены. Проиллюстрируем изложенное на примерах.

***Пример* 1** [5]. Для последовательности $s_k = 1/(k+1)!$ (или для функции $f(z) = (\exp z - 1)/z$) справедливо обобщенное моментное представление вида

$$s_{k+j} = \int_0^1 a_k(t) b_j(t) d\mu(t), \tag{3}$$

где $a_k(t) = t^k/k!$, $k = \overline{0,\infty}$, $b_j(t) = (1-t)^j/j!$, $j = \overline{0,\infty}$, $d\mu(t) = dt$. Так как $\deg a_k(t) \equiv k$, а $\deg b_j(t) \equiv j$, то биортогонализация этих последовательностей приведет к классическим смещенным на отрезок $[0,1]$ многочленам Лежандра (см. [6, с. 116]).

***Пример* 2** [5]. Для последовательности $s_k = (\kappa+\nu+1)_k/(\nu+1)_k$, $k = \overline{0,\infty}$, где $(\alpha)_k := \alpha(\alpha+1)\ \ldots\ (\alpha+k-1)$, $k = \overline{1,\infty}$, $(\alpha)_0 := 1$ (или для функции $f(z) = {}_2F_1(\kappa+\nu+1, 1; \nu+2; z)/(\nu+1)$ при $\nu > -1$, $\kappa+\nu+1 \notin \mathbb{Z}^-$, $1-\kappa \notin \mathbb{Z}^-$) также справедливо обобщенное моментное представление вида (3), в котором

$$a_k(t) = \frac{(\kappa+\nu+1)_k}{(\nu+1)_k} t^k, \quad k = \overline{0,\infty},$$

$$b_j(t) = \frac{(1-\kappa)_j}{j!} t^j + \frac{(\kappa)_j}{j!} \sum_{m=0}^{j-1} \frac{(1-\kappa)_m}{m!} t^m, \quad j = \overline{0,\infty},$$

$$d\mu(t) = t^\nu dt.$$

Биортогонализация в этом случае приведет к смещенным классическим многочленам Якоби, ортогональным на $[0,1]$ с весом $\omega(t) = t^\nu$ (см. [6, с. 268]).

***Пример* 3** [7]. Для последовательности $s_k = 1/(k+1)_q!$, $k = \overline{0,\infty}$, где $k_q = (1-q^k)/(1-q)$, $k = \overline{1,\infty}$, а $k_q! := \prod_{i=1}^k i_q$, $k = \overline{1,\infty}$, $0_q! := 1$, коэффициентов степенного разложения функции, называемой q-аналогом экспоненты [8] и являющейся частным случаем базисного гипергеометрического ряда [9, с. 195–196], $0 < q < 1$ справедливо обобщенное моментное представление вида

$$s_{k+j} = \int_0^1 a_k(t) b_j(t) d_q t, \tag{4}$$

где $a_k(t) = t^k/k_q!$, $k = \overline{0,\infty}$, $b_j(t) = \prod_{n=1}^j (1-tq^n)/j_q!$, $j = \overline{0,\infty}$, а фигурирующий в правой части (4) так называемый q-интеграл Джексона [10] определяется равенством

$$\int_0^1 \varphi(t) d_q t := (1-q) \sum_{n=0}^\infty \varphi(q^n) q^n.$$

В этом случае, биортогонализируя последовательности $\{a_k(t)\}_{k=0}^\infty$ и $\{b_j(t)\}_{j=0}^\infty$, получаем ортогональные многочлены дискретной переменной, являющиеся обобщениями классических ортогональных многочленов Лежандра (см., например, [11]).

В настоящей статье мы покажем, как можно использовать указанные и сходные с ними ситуации для построения биортогональных полиномов в более сложных случаях.

2. Основной результат. Сначала нам понадобится некоторая модификация представления (1) (см. [12]). Для этого предположим, что в банаховом пространстве X действует линейный ограниченный оператор $A: X \to X$ такой, что $A x_k = x_{k+1}$, $k = \overline{0, \infty}$. Тогда, как легко видеть, его сопряженный оператор $A^*: X^* \to X^*$ будет действовать таким образом, что $A^* l_j = l_{j+1}$, $j = \overline{0, \infty}$. В этом случае (1) можно переписать в виде

$$s_{k+j} = A^{*j} l_0(A^k x_0), \quad k, j = \overline{0, \infty},$$

или, что то же самое,

$$s_k = l_0(A^k x_0), \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Предположив биортогонализацию известной при некоторых фиксированных $x_0 \in X$, $l_0 \in X^*$, построим биортогональные полиномы также в случае, когда функционал l_0 заменен некоторым функционалом $\tilde{l}_0$, представимым в виде

$$\tilde{l}_0 = \prod_{m=1}^{M} (1 + \beta_m A^*) l_0 = \sum_{m=0}^{M} \alpha_m A^{*m} l_0. \tag{5}$$

Справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Допустим, что последовательность* $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$ *обобщенных полиномов вида*

$$X_k = \sum_{i=0}^{k} c_i^{(k)} A^i x_0 = P_k(A) x_0, \quad k = \overline{0, \infty}, \tag{6}$$

имеет свойства биортогональности в том смысле, что

$$l_j(X_k) = \delta_{k,j}, \quad j = \overline{0, k}. \tag{6'}$$

Тогда для каждого $N = \overline{0, \infty}$ *нетривиальный полином* $\tilde{X}_N$ *вида*

$$\tilde{X}_N = \sum_{i=0}^{N} \tilde{c}_i^{(N)} A^i x_0,$$

имеющий свойства биортогональности

$$\tilde{l}_j\left(\tilde{X}_N \right) = 0, \quad j = \overline{0, N-1}, \quad \tilde{l}_j = A^{*j} \tilde{l}_0, \tag{7}$$

где $\tilde{l}_0$ *имеет вид* (5), *может быть представлен в виде*

$$\tilde{X}_N = \prod_{m=1}^{M} (1 + \beta_m A)^{-1} \sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k X_k.$$

Здесь коэффициенты γ_k, $k = \overline{N, M+N}$, *определяются из однородной системы линейных алгебраических уравнений*

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k P_k^{(n)}\left(-\frac{1}{\beta_m} \right) = 0, \quad n = \overline{0, r_{m-1}}, \quad m = \overline{1, M^*}$$

в которой M^* — *число различных чисел* β_m, $m = \overline{1, M}$, *а* r_m — *кратность числа* β_m, $m = \overline{1, M^*}$

Доказательство. Из (7) имеем

$$l_j\left(\prod_{m=1}^{M} (1 + \beta_m A)\, \tilde{X}_N \right) = 0, \quad j \doteq \overline{0, N-1}.$$

Очевидно, возможно представление

$$\Phi_N := \prod_{m=1}^{M} (1 + \beta_m A)\, \tilde{X}_N = \sum_{k=0}^{M+N} \gamma_k X_k. \tag{8}$$

Далее получаем

$$\tilde{l}_j\left(\tilde{X}_N \right) = \tilde{l}_j(\Phi_N) = l_j\left(\sum_{k=0}^{M+N} \gamma_k X_k \right) = \gamma_j + l_j\left(\sum_{k=0}^{j-1} \gamma_k X_k \right) = 0.$$

Отсюда заключаем, что $\gamma_j = 0$, $j = \overline{0, N-1}$. Таким образом,

$$\Phi_N = \sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k X_k.$$

С учетом (8) получаем

$$\tilde{X}_N = \prod_{m=1}^{M} (1 + \beta_m A)^{-1} \sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k X_k.$$

Используя разложение

$$(1 + \beta A)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} (-\beta)^l A^l,$$

имеем

$$\tilde{X}_N = \sum_{l_1, \dots, l_M = 0}^{\infty} (-\beta_1)^{l_1} \dots (-\beta_M)^{l_M} A^{l_1 + \dots + l_M} \sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k \sum_{i=0}^{k} c_i^{(k)} A^i x_0. \tag{9}$$

Так как элементы $x_k = A^k x_0$, $k = \overline{0, \infty}$, линейно независимы (иначе не была бы осуществима невырожденная биортогонализация (6′)), то можно приравнять коэффициенты при них в обеих частях (9). В частности, коэффициенты при x_i, $i = \overline{N+1, \infty}$, в правой части (9) должны быть равны нулю. Считая, что $M \geq 1$ (случай $M = 0$ нас не интересует), приравниваем нулю коэффициенты при x_{N+M+j}, $j = \overline{0, M}$, в правой части (9). В результате получим

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k \sum_{i=0}^{k} c_i^{(k)} \sum_{l_1 + \dots + l_M = N + M + j - i} (-\beta_1)^{l_1} \dots (-\beta_M)^{l_M} = 0, \quad j = \overline{0, M}. \tag{10}$$

Обозначим

$$F_p^{(M)}(y_1, \dots, y_M) := \sum_{l_1 + \dots + l_M = p} y_1^{l_1} \dots y_M^{l_M}. \tag{11}$$

Как легко видеть,

$$F_{p+1}^{(M)}(y_1, \dots, y_M) = y_1 F_p^{(M)}(y_1, \dots, y_M) + F_{p+1}^{(M-1)}(y_2, \dots, y_M). \tag{12}$$

Равенства (10) с учетом (11) можно переписать в виде

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k \sum_{i=0}^{k} c_i^{(k)} F_{N+M+j-i}^{(M)}(-\beta_1, \ldots, -\beta_M) = 0, \quad j = \overline{0, M}. \tag{13}$$

Вычитая из каждого $(j+1)$-го равенства (13) j-е, умноженное на $-\beta_1$, $j = \overline{0, M-1}$, на основании (12) имеем

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k \sum_{i=0}^{k} c_i^{(k)} F_{N+M+j-i}^{(M-1)}(-\beta_2, \ldots, -\beta_M) = 0, \quad j = \overline{0, M-1}.$$

Продолжая действовать и далее таким образом, получаем равенство

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k \sum_{i=0}^{k} c_i^{(k)} F_{N+M-i}^{(1)}(-\beta_M) = 0,$$

которое с учетом (11) можно записать в виде

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k \sum_{i=0}^{k} c_i^{(k)} (-\beta_M)^{-i} = 0,$$

или

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k P_k\left(-\frac{1}{\beta_M}\right) = 0.$$

Поскольку условия (13) симметричны относительно $\beta_1, \ldots, \beta_M$, то имеем

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k P_k\left(-\frac{1}{\beta_m}\right) = 0, \quad m = \overline{1, M}. \tag{14}$$

Допустим теперь, что среди чисел β_m, $m = \overline{1, M}$, есть кратные. Например, некоторое число β имеет кратность r. Рассмотрим тогда возмущенную задачу, в которой вместо кратного значения β есть r различных значений β, $\beta/(1-\beta h), \ldots, \beta/[1-(r-1)\beta h]$, причем $h > 0$ настолько мало, что ни одно из этих значений не совпадает с другими числами β_m. Тогда получим в числе прочих условия вида (14):

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k P_k\left(-\frac{1}{\beta} + jh\right) = 0, \quad j = \overline{0, r-1}.$$

Отсюда будет вытекать, что также равны нулю разделенные разности, а значит, при $h \to 0$ и соответствующие производные

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k P_k^{(j)}\left(-\frac{1}{\beta}\right) = 0, \quad j = \overline{0, r-1}.$$

Таким образом, теорема доказана.

3. Приложение к аппроксимациям Паде. Напомним следующее определение [13, с. 31].

Определение 3. *Для функции $f(z)$, аналитической в окрестности точки $z = 0$, ее аппроксимантой Паде порядка $[M/N]$, $M, N \in \mathbb{Z}^+$, называется рациональный полином $[M/N]_f(z) = P_M(z)/Q_N(z)$, где $P_M(z)$ и $Q_N(z)$ — алгебраические многочлены степени соответственно M и N, такой, что*

$$f(z) - [M/N]_f(z) = O(z^{M+N+1}), \ z \to 0.$$

С помощью теоремы 1 можно строить аппроксиманты Паде порядков [
$1/N]$, $N \in \mathbb{N}$, для функций вида

$$\tilde{f}(z) = \sum_{m=0}^{M} \alpha_m \frac{f(z) - T_{m-1}[f; z]}{z^m},$$

где $f(z)$ — функция, для которой аппроксиманты Паде указанных поряд
известны, а $T_j[f; z]$ — многочлены Тейлора порядка j функции $f(z)$. В ча
ности, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть для некоторой функции $f(z)$ известны ее аппроксим ты Паде порядков $[N+m-1/N+m]$, $m = \overline{1, M}$, и пусть*

$$\Psi_M(t) = \prod_{m=1}^{M^*} (1 + \beta_m t)^{r_m} = \sum_{m=0}^{M} \alpha_m t^m$$

— некоторый многочлен степени M. Тогда знаменатель $\tilde{Q}_N(z)$ аппрок манты Паде порядка $[N-1/N]$ функции

$$\tilde{f}(z) = \sum_{m=0}^{M} \alpha_m \frac{f(z) - T_{m-1}[f; z]}{z^m},$$

может быть представлен в виде

$$\tilde{Q}_N(z) = \frac{C}{z^M \Psi_M(1/z)} \det U_M(z), \qquad ($$

где матрица $U_M(z) = \| u_{k,j} \|_{k,j=1}^{M}$ составлена из элементов

$$u_{k,j} = \frac{d^i}{dw^i} \left\{ w^i Q_{N+j}(w) \right\} \Big|_{w=-\beta m}, \qquad ($$

$$k = \overline{1, M-1}, \quad j = \overline{1, M}, \quad m = \max \left\{ l \colon \sum_{p=1}^{l-1} r_p \le k \right\}, \quad i = k - \sum_{p=1}^{m} r_p,$$

$$u_{M,j} = z^j Q_{N+j}(z), \quad j = \overline{1, M}.$$

Здесь $Q_{N+j}(z)$, $j = \overline{1, M}$, — знаменатели аппроксимант Паде функции f порядков $[N+j-1/N+j]$, а $C = \text{const}$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда все β_m, $m = \overline{1, M^*}$, разл
ны, т. е. $r_m = 1$, $m = \overline{1, M^*}$, $M^* = M$. Как известно [1], знаменатель аппр
симанты Паде функции $\tilde{f}(z)$ порядка $[N-1/N]$ представим в виде

$$\tilde{Q}_N(z) = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} z^{N-k},$$

где $\tilde{c}_k^{(N)}$, $k = \overline{0, N}$, — коэффициенты биортогонального полинома

$$\tilde{X}_N = \sum_{i=0}^{N} \tilde{c}_i^{(N)} A^i x_0.$$

Из теоремы 1 видно, что эти коэффициенты могут быть вычислены по ф мулам

$$\tilde{c}_k^{(N)} = \sum_{m=N}^{M+N} \gamma_m \sum_{i=0}^{k} c_i^{(m)} \sum_{l_1+\ldots+l_m=k-i} (-\beta_1)^{l_1} \ldots (-\beta_M)^{l_M},$$

в которых γ_m, $m = \overline{N, M+N}$, определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k P_k\left(-\frac{1}{\beta_m}\right) = 0, \quad m = \overline{1, M}. \tag{17}$$

Итак,

$$\tilde{Q}_N(z) = \sum_{k=0}^{N} z^{N-k} \sum_{m=N}^{M+N} \gamma_m \sum_{i=0}^{k} c_i^{(m)} \sum_{l_1+\ldots+l_M=k-1} (-\beta_1)^{l_1} \ldots (-\beta_M)^{l_M} =$$

$$= \sum_{m=N}^{M+N} \gamma_m \sum_{i=0}^{N} c_i^{(m)} \sum_{k=i}^{N} z^{N-k} \sum_{l_1+\ldots+l_M=k-i} (-\beta_1)^{l_1} \ldots (-\beta_M)^{l_M} =$$

$$= \sum_{m=N}^{M+N} \gamma_m \sum_{i=0}^{N} c_i^{(m)} z^{N-i} \sum_{p=0}^{N-i} \sum_{l_1+\ldots+l_M=p} \left(-\frac{\beta_1}{z}\right)^{l_1} \ldots \left(-\frac{\beta_M}{z}\right)^{l_M}. \tag{18}$$

Из (17) заключаем, что для любых чисел κ_k, $k = \overline{N, M+N}$, имеем

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k \kappa_k =$$

$$= C \begin{vmatrix} Q_{N+M}(-\beta_1) & (-\beta_1) Q_{N+M-1}(-\beta_1) & \ldots & (-\beta_1)^M Q_N(-\beta_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_{N+M}(-\beta_M) & (-\beta_M) Q_{N+M-1}(-\beta_1) & \cdots & (-\beta_M)^M Q_N(-\beta_M) \\ \kappa_{N+M} & \kappa_{N+M-1} & \ldots & \kappa_N \end{vmatrix}$$

Поэтому многочлен, определенный по формулам (15), (16), может быть переписан в виде

$$\tilde{Q}(z) = \frac{1}{z^M \Psi_M(1/z)} \sum_{m=N}^{M+N} \gamma_m z^{N+M-m} Q_m(z). \tag{19}$$

Убедимся теперь, что равенства (18) и (19) определяют один и тот же многочлен. Для этого достаточно показать, что разность правых частей равенств (18) и (19) равна нулю. Имеем

$$\sum_{m=N}^{M+N} \gamma_m \sum_{i=0}^{N} c_i^{(m)} z^{N-i} \sum_{p=0}^{N-i} \sum_{i_1+\ldots+l_m=p} \left(-\frac{\beta_1}{z}\right)^{l_1} \ldots \left(-\frac{\beta_M}{z}\right)^{l_M} -$$

$$- \frac{1}{z^M \Psi_M(1/z)} \sum_{m=N}^{M+N} \gamma_m z^{N+M-m} Q_m(z) =$$

$$= \sum_{m=N}^{M+N} \gamma_m \left\{ \sum_{i=0}^{N} c_i^{(N)} z^{N-i} \sum_{p=0}^{N-i} \sum_{l_1+\ldots+l_m=p} \left(-\frac{\beta_1}{z}\right)^{l_1} \ldots \left(-\frac{\beta_M}{z}\right)^{l_M} -\right.$$

$$- \prod_{m=1}^{M} (z+\beta_m)^{-1} z^{N+M-m} Q_m(z) \Big\}. \tag{20}$$

Преобразуем выражение в фигурных скобках:

$$\sum_{i=0}^{N} c_i^{(m)} z^{N-i} \sum_{p=0}^{N-i} \sum_{l_1+\ldots+l_M=p} \left(-\frac{\beta_1}{z}\right)^{l_1} \ldots \left(-\frac{\beta_M}{z}\right)^{l_M} -$$

$$- \prod_{m=1}^{M} \left(z+\frac{\beta_m}{z}\right)^{-1} z^{N-m} \sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)} z^{m-i} =$$

$$= - \sum_{i=0}^{N} c_i^{(m)} z^{N-i} \sum_{p=N-i+1} \sum_{l_1+\ldots+l_m=p} \left(-\frac{\beta_1}{z}\right)^{l_1} \ldots \left(-\frac{\beta_M}{z}\right)^{l_M} -$$

$$- \sum_{i=N+1}^{m} c_i^{(m)} z^{N-i} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l_1+\ldots+l_m=p} \left(-\frac{\beta_1}{z}\right)^{l_1} \ldots \left(-\frac{\beta_M}{z}\right)^{l_M}. \tag{21}$$

Мы видим, что в правой части (21) содержатся лишь отрицательные степени z. Поскольку же исходная разность (20) является многочленом степени не выше N, то это свидетельствует о том, что она равна нулю.

Этим представление (15) в случае, когда все β_m различны, доказано. Распространение на случай кратных β_m, как и в теореме 1, не представляет затруднений. Теорема 2, таким образом, доказана.

1. *Дзядык В. К.* Об обобщении проблемы моментов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 6. – С. 8 – 12.
2. *Голуб А. П.* Некоторые свойства биортогональных полиномов // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 10. – С. 1384 – 1388.
3. *Iserles A., Nørsett S. P.* Bi-orthogonal polynomials // Lect. Notes Math. – 1985. – **1171**. – P. 92 – 100.
4. *Iserles A., Nørsett S. P.* On the theory of bi-orthogonal polynomials // Math. and Comput. – 1986. – № 1. – 42 p.
5. *Голуб А. П.* Применение обобщенной проблемы моментов к аппроксимации Паде некоторых функций. – Киев, 1981. – С. 16 – 56. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.58).
6. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 416 с.
7. *Голуб А. П.* Об одной разновидности обобщенных моментных представлений // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 11. – С. 1455 – 1460.
8. *Walliser R.* Rationale Approximation des q-Analogons der Exponentialfunktion und Irrationalitätsaussagen für diese Funktion // Arch. Math. – 1985. – **44**, № 1. – S. 59 – 64.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1965. – 296 с.
10. *Jackson F. H.* Transformation of q-series // Messenger Math. – 1910. – **39**. – P. 145 – 153.
11. *Andrews E., Askey R.* Classical orthogonal polynomials // Lect. Notes Math. – 1985. – **1171**. – P. 36 – 62.
12. *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления и рациональные аппроксимации. – Киев, 1987. – 50 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.25).
13. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Р.* Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.

Получено 12.10.92