УДК 517.9

В. Г. Самойленко, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КВАЗИИНВАРИАНТНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

For nonlinear Hamiltonian dynamical systems and their small perturbations, quasiinvariant deformations of their invariant submanifolds are studied.

Для нелінійних гамільтонових динамічних систем та їх малих збурень вивчаються квазіінваріантні деформації їх інваріантних підмноговидів.

Рассмотрим на гладком бесконечномерном многообразии $M \subset C^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ нелинейную интегрируемую по Лаксу гамильтонову динамическую систему [1, 2]

$$u_t = K[u], \tag{1}$$

где $K : M \to T(M)$ — гладкое по Фреше векторное поле на M, $t \in \mathbb{R}$ — эволюционный параметр. В силу интегрируемости динамическая система (1) имеет бесконечную иерархию конечномерных инвариантных подмногообразий $M^{2n} \subset M$, $n \in \mathbb{Z}_+$, на которых она интегрируема по Лиувиллю. При этом в случае компактности подмногообразия M^{2n} оно диффеоморфно абелеву многообразию $J(\Gamma^n)$ рода $n \in \mathbb{Z}$, регулярным образом [1] определяемого видом динамической системы (1).

Рассмотрим инвариантное [1, 2] подмногообразие $M^{2n} \subset M$, $n \in \mathbb{Z}_+$, которое задается выражением

$$M^{2n} = \{ u \in M \colon \operatorname{grad} \mathcal{L}_n[u] = 0,\ n \in \mathbb{Z}_+ \} \tag{2}$$

где, по определению, лагранжиан $\mathcal{L}_n \in D(M)$ имеет вид

$$\mathcal{L}_n = -\gamma_n + \sum_{j=0}^{n-1} c_j \gamma_j, \tag{3}$$

$\{\gamma_j \in D(M),\ j \in \mathbb{Z}_+\}$ — упорядоченная иерархия законов сохранения динамической системы (1), c_j, $j = \overline{0, n-1}$, — некоторые действительные числа. Если данные Коши для (1) принадлежат M^{2n}, то, очевидно, для всех $t \in \mathbb{R}$ точка $u(t) \in M^{2n}$.

Предположим теперь, что данные Коши для динамической системы (1) в некоторый момент времени $t = t_0$ таковы, что выполнено соотношение $u|_{t=t_0} = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + O(\varepsilon^2)$, где $u^{(0)} \in M^{2n}$, $\varepsilon \to 0$. Тогда решение $u(t) \in M$, $t \in \mathbb{R}$, можно представить в общем виде следующим образом: $u(t) = u_\varepsilon^{(0)}(x, t; \xi, \eta)$, где $\xi = \varepsilon x$, $\eta = \varepsilon t \in \mathbb{R}$ — так называемые *медленные* переменные.

Если $\mathcal{L}_n \in D(M)$ — некоторый закон сохранения для динамической системы (1), то, очевидно, существует такой локальный функционал $h_n\big[u_\varepsilon^{(0)}\big]$, что для всех $x, t \in \mathbb{R}$ и $u^{(0)} \in M^{2n}$

$$\frac{d\mathcal{L}_n\big[u_\varepsilon^{(0)}\big]}{dt} = \frac{dh_n\big[u_\varepsilon^{(0)}\big]}{dt}. \tag{4}$$

Отсюда для всех $\varepsilon \to 0$ находим

$$\varepsilon\left(\frac{\partial \mathcal{L}_n\left[u_\varepsilon^{(0)}\right]}{\partial \eta} - \frac{\partial h_n\left[u_\varepsilon^{(0)}\right]}{\partial \xi}\right) = \frac{d h_n\left[u_\varepsilon^{(0)}\right]}{dt} - \frac{d \mathcal{L}_n\left[u_\varepsilon^{(0)}\right]}{dt}. \tag{5}$$

Данные Коши $u|_{t=t_0} \in M$ для динамической системы (1), удовлетворяющие условию

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}_n\left[u_\varepsilon^{(0)}\right] dx = O(\varepsilon^2), \tag{6}$$

будем называть эргодическими деформациями. Из (5) следуют соотношения

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\mathcal{L}_n = \frac{\partial}{\partial \xi} h_n + O(\varepsilon^2), \tag{7}$$

которые называются уравнениями эргодических деформаций (в рамках подхода Дж. Уизема [2, 3]) для вполне интегрируемой на M^{2n} динамической системы (1). С помощью метода усреднения уравнения эргодических деформаций изучались в [2, 4].

Исследуем теперь соответствующие условию (6) ε-деформации инвариантного подмногообразия $M^{2n} \to M_\varepsilon^{2n}$ при $\varepsilon \to 0$. Пусть по определению $\operatorname{grad} \mathcal{L}_n[u] = \varphi[u]$, $u \in M$. Тогда из (4) находим

$$\left\langle \varphi\left[u_\varepsilon^{(0)}\right], K\left[u_\varepsilon^{(0)}\right]\right\rangle = dh\left[u_\varepsilon^{(0)}\right]/dx, \tag{8}$$

где $d\varphi/dt + K'^*\varphi = 0$ на M.

Отсюда получаем

$$\langle \varphi[u^{(0)}], K[u^{(0)}]\rangle + \varepsilon\langle \varphi'[u^{(0)}]\cdot u^{(1)}, K[u^{(0)}]\rangle +$$
$$+ \varepsilon\langle \varphi'[u^{(0)}], K'[u^{(0)}]\cdot u^{(1)}\rangle = \frac{d}{dt}h\left[u_\varepsilon^{(0)}\right] + O(\varepsilon^2)[u^{(0)}], \tag{9}$$

т. е. на подмногообразии M^{2n} тождественно выполнено условие

$$\int_{\mathbb{R}} \langle \varphi'^*[u^{(0)}]\; K[u^{(0)}],\; u^{(1)}\rangle dx = O(\varepsilon). \tag{10}$$

Условие (10) необходимо для квазиинвариантности (с точностью до $O(\varepsilon^2)$) подмногообразия M_ε^{2n} при $\varepsilon \to 0$, где

$$M_\varepsilon^{2n} = \{u \in M:\ \varphi[u^{(0)}] + \varepsilon\varphi'[u^{(0)}]\cdot u^{(1)} + \varepsilon g[u^{(0)}] = O(\varepsilon^2)[u^{(0)}]\}. \tag{11}$$

С другой стороны, несложно установить эквивалентность условий (6) и (10). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если задана эргодическая деформация инвариантного подмногообразия $M^{2n} \to M_\varepsilon^{2n}$, $\varepsilon \to 0$, то подмногообразие $M_\varepsilon^{2n} \subset M$ квазиинвариантно, и наоборот.*

Используя определение подмногообразия $M_\varepsilon^{2n} \subset M$ (формула (11)), можно определить в явном виде элемент $u^{(1)} \in T(M)$ с помощью соотношения

$$u^{(1)} = -(\varphi'[u^{(0)}])^{-1} g[u^{(0)}], \tag{12}$$

где отображение $\varphi': T(M) \to T^*(M)$ на многообразии $M^{2n} \subset M$ необходимо обратимо. Кроме того, очевидно, что для всех $t \in \mathbb{R}$ элемент $u^{(1)} \in T(M)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{du^{(1)}}{dt} = K'[u^{(0)}] \cdot u^{(1)}. \tag{13}$$

Подставляя (12) в (13), получаем известное уравнение для тороидальных многообразий в конечномерной теории нелинейных динамических систем [5]. С другой стороны, условие квазиинвариантности (11) подмногообразия $M_\varepsilon^{2n} \subset M$ должно выполняться для всех $t \in \mathbb{R}$, т. е. элемент $g[u^{(0)}] \in T^*(M)$ необходимо удовлетворяет уравнению согласования (10) в виде

$$(K, g) = \int_{\mathbb{R}} \langle K[u^{(0)}], \ g[u^{(0)}] \rangle \, dx = O(\varepsilon), \tag{14}$$

где $u^{(0)} \in M^{2n} \subset M$, $\varepsilon \to 0$. Тем самым установлена следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть задана* ε*-деформация инвариантного подмногообразия* $M^{2n} \to M_\varepsilon^{2n}$ при $\varepsilon \to 0$ *в виде* (11). *Тогда условие* (14) *является необходимым для ее эргодичности, а тем самым, и квазиинвариантности подмногообразия* $M_\varepsilon^{2n} \subset M$.

Обобщим теперь предложенный выше подход для изучения квазиинвариантных подмногообразий $M_\varepsilon^{2n} \subset M$ слабо возмущенной нелинейной динамической системы вида (1):

$$u_t = K[u] + \varepsilon F[u], \quad \varepsilon \to 0, \tag{15}$$

где $K, F: M \to T(M)$ — некоторые гладкие по Фреше векторные поля на M, причем при $\varepsilon = 0$ динамическая система (15) на M интегрируема по Лаксу [1, 2]. Рассмотрим теперь следующую задачу: описать все квазиинвариантные (инвариантные с точностью $O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$) подмногообразия $M_\varepsilon^{2n} \subset M$, обеспечивающие эргодичность деформаций исходной нелинейной динамической системы (15). С этой целью рассмотрим инвариантное подмногообразие $M_\varepsilon^{2n} \subset M$ вида (2) для динамической системы (15) при $\varepsilon = 0$, а также его ε-деформацию $M^{2n} \to M_\varepsilon^{2n}$ вида

$$M_\varepsilon^{2n} = \{ u \in M: \ \varphi[u] + \varepsilon g[u] = O(\varepsilon^2)[u] \}, \tag{16}$$

где $g[u] \in T^*(M)$ — некоторый локальный функционал на M. Подмногообразие (16) будет квазиинвариантным относительно динамической системы (15), если элемент $\varphi[u] + \varepsilon g[u] \in T^*(M)$ (см. формулу (16) при $u \in M_\varepsilon^{2n}$) удовлетворяет линейному уравнению типа Лакса, т. е.

$$\partial\varphi / \partial t + \varphi' \cdot K + \varepsilon(\partial g / \partial t + \varphi' \cdot F + g' \cdot F) = O(\varepsilon^2)[u], \tag{17}$$

что эквивалентно уравнению

$$\partial g / \partial t + \varphi' \cdot F + g' \cdot F = O(\varepsilon)[u]. \tag{18}$$

Уравнение (18) является характеристическим при определении элемента $g[u] \in T^*(M)$, обеспечивающего согласно (16) квазиинвариантность подмногообразия $M_\varepsilon^{2n} \subset M$.

Пусть теперь снова $u_\varepsilon^{(0)} = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$, — решение динамической системы (15) при условии, что данные Коши $u_\varepsilon^{(0)}|_{t=t_0} \in M_\varepsilon^{2n}$, где $t_0 \in$

$\in \mathbb{R}$ — фиксировано. Тогда из (16) в силу квазиинвариантности необходимо следует, что для всех $t \in \mathbb{R}$ справедлива формула (12), причем

$$du^{(1)}/dt = K'[u^{(0)}] \cdot u^{(1)} + F[u^{(0)}]. \tag{19}$$

Подставив (12) в (19), получим некоторое операторное соотношение для элемента $\varepsilon g[u] \in T^*(M)$, которому он необходимо должен удовлетворять.

Чтобы получить уравнения эргодических деформаций вида (7), рассмотрим более подробно следующее очевидное тождество для (15):

$$\langle \varphi[u], K[u] \rangle = dh[u]/dt. \tag{20}$$

Подставляя в (20) вместо вектора $K[u] \in T(M)$ его значение из (15), для всех $u \in M$ находим

$$\langle \varphi[u], u_t \rangle - \varepsilon \langle \varphi[u], F[u] \rangle = dh[u]/dt. \tag{21}$$

Предполагая теперь, что $u \in M_\varepsilon^{2n}$, из (21) и (16) имеем

$$\frac{d\mathcal{L}[u]}{dt} = \frac{dh[u]}{dt} - \varepsilon^2 \langle g[u], F[u] \rangle. \tag{22}$$

Отсюда непосредственно получаем уравнения (7), замечая, что $u = u_\varepsilon^{(0)}(x, t; \xi, \eta) \in M_\varepsilon^{2n}$ согласно (16).

Изучим теперь более детально структуру решений характеристического уравнения (18), которое представим следующим образом:

$$\partial g/\partial t + \varphi' \cdot F + g' \cdot K = O(\varepsilon)[u], \quad u \in M_\varepsilon^{2n}. \tag{23}$$

Так как на подмногообразии M_ε^{2n} выполняется $\varphi[u] = O(\varepsilon)[u]$, $\varepsilon \to 0$, то можно считать, что $u \in M^{2n}$ и $\varphi[u] = 0$. В этом случае векторное поле $K: M \to T(M)$ на M^{2n} канонически гамильтоново и интегрируемо по Лиувиллю [1, 2, 6].

Пусть элемент

$$g[u] = g(u, p) \in T^*(M^{2n}) \subset T(M),$$

где $(u, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ — канонические переменные на M^{2n}. Тогда уравнение (23) на подмногообразии $M^{2n} \subset M$ эквивалентно некоторой системе линейных уравнений для $g(u, p) \in T^*(M^{2n})$, которые необходимо должны быть разрешимы. Чтобы изучить этот вопрос более подробно, спроектируем исходную динамическую систему (15) на квазиинвариантное подмногообразие $M_\varepsilon^{2n} \subset M$. Тогда в переменных $u, p \in M^{2n}$ получим конечномерную нелинейную динамическую систему вида

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = K_{(\varphi)}(u, p) + \varepsilon F_{(g)}(u, p), \tag{24}$$

где векторные поля $K_{(\varphi)}, F_{(g)}: M^{2n} \to T(M^{2n})$ строятся регулярным образом по явному виду динамической системы (15) и подмногообразия M_ε^{2n} (16). Кроме того, само подмногообразие $M_\varepsilon^{2n} \subset M$ описывается следующими соотношениями:

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = X_{(\varphi)}(u,p) + \varepsilon Q_{(g)}(u,p),$$
$$X_{(\varphi)}(u,p) = \left(\frac{\partial h(u,p)}{\partial p}, \ -\frac{\partial h(u,p)}{\partial u}\right)^{\tau}, \qquad (25)$$

где векторное поле $Q_{(g)}(u,p) \in T(M^{2n})$ однозначно определяется выражением (16), причем $h \in D(M^{2n})$ — функция Гамильтона для системы (25) при $\varepsilon = 0$, задающая инвариантное подмногообразие $M^{2n} \subset M$ в виде объединения гиперповерхностей в $\mathbb{R}^n$: $\{(u,p)^{\tau} \in \mathbb{R}^{2n}: h(u,p) = \text{const}\} \subset M$. Согласно (24) и (25) эти гиперповерхности при $\varepsilon \neq 0$ в общем случае не являются инвариантными как по независимой переменной $x \in \mathbb{R}$, так и по эволюционной переменной $t \in \mathbb{R}$. В связи с этим необходимо найти условия на элемент $g[u] \in T(M)$, обеспечивающие квазиинвариантность деформации подмногообразия $M^{2n} \to M_{\varepsilon}^{2n} \subset M$, в симплектических координатах $(u,p)^{\tau} \in \mathbb{R}^{2n}$. Чтобы эффективно сформулировать эти условия квазиинвариантности, необходимо наложить некоторые ограничения на векторное поле $Q_{(g)} \in T(M^{2n})$, а именно: будем требовать, чтобы ε-деформация $M^{2n} \to M_{\varepsilon}^{2n}$, задаваемая уравнениями (25), была регулярной для исходных данных Коши динамической системы (15) на подмногообразии $M_{\varepsilon}^{2n} \subset M$. Это значит, что решение $u_{\varepsilon}^{(0)}(x,t;\varepsilon,\eta) \in M_{\varepsilon}^{2n}$ при $\varepsilon \to 0$ допускает представление $u_{\varepsilon}^{(0)} = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + O(\varepsilon^2)$, где $u^{(0)} \in M^{2n}$, $u^{(1)} \in T(M^{2n})$ — ограниченная и регулярная функция, однозначно определяемая из уравнений в вариациях (13).

С геометрической точки зрения это означает неразрушаемость гладкой деформации фазового портрета динамической системы (25) при $\varepsilon = 0$ слабо возмущающим векторным полем $Q_{(\varphi)} \in T(M^{2n})$ для всех значений независимого параметра $x \in \mathbb{R}$ и, в частности, свидетельствует об отсутствии явления стохастизации для сепаратрисных решений системы (25) гетероклинического типа, имеющего место согласно теореме Биркгофа – Смейла [7]. В противном случае подмногообразие M_{ε}^{2n}, как регулярная ε-деформация подмногообразия M^{2n}, не определено в функциональном пространстве M.

Предположим теперь, что ε-деформация $M^{2n} \to M_{\varepsilon}^{2n} \subset M$ регулярна. Тогда для уравнений (15) корректно поставлена задача Коши на подмногообразии $M_{\varepsilon}^{2n} \subset M$. Динамическая система (24) при $\varepsilon = 0$ на M^{2n}, как отмечалось выше, гамильтонова, т. е. справедлива запись

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f(u,p)}{\partial p}, \ -\frac{\partial f(u,p)}{\partial u}\right)^{\tau} + F_{(g)}(u,p), \qquad (26)$$

где $f(u,p) \in D(M^{2n})$ — соответствующая функция Гамильтона. При $\varepsilon \to 0$ динамическая система (26) с данными Коши, принадлежащими $M_{\varepsilon}^{2n} \subset M$, должна оставлять подмногообразие M_{ε}^{2n} инвариантным, т. е. векторные поля d/dt и d/dx на M_{ε}^{2n} необходимо коммутируют. Как следствие получаем, что на подмногообразии $M_{\varepsilon}^{2n} \subset M$ выполняется равенство

$$[K_{(\varphi)}, Q_{(g)}] + [F_{(g)}, X_{(\varphi)}] = O(\varepsilon). \tag{27}$$

Соотношение (27) приводит к новой форме уравнений для определения элемента $g[u] = g(u, p) \in T^*(M)$, которые обеспечивают необходимое условие квазиинвариантности (сохранение с точностью до $O(\varepsilon^2)$) подмногообразия M_ε^{2n} при $\varepsilon \to 0$ относительно исходной динамический системы (15). Достаточным условием квазиинвариантности (и регулярности ε-деформации $M^{2n} \to \to M_\varepsilon^{2n}$ при $\varepsilon \to 0$) является соответственно условие отсутствия разрушения фазовых портретов динамических систем (25) и (26) на M_ε^{2n}, что более подробно будет рассмотрено ниже.

Таким образом, задача описания эргодических деформаций для решений нелинейной динамической системы (15) при $\varepsilon \to 0$ свелась к соответствующим задачам описания множества регулярных ε-деформаций вида $M^{2n} \to M_\varepsilon^{2n}$ $(\varepsilon \to 0)$, совместимых с инвариантностью подмногообразия M_ε^{2n} относительно векторного поля (15), не допускающего разрушения фазового портрета исходной динамической системы при $\varepsilon = 0$. Отметим здесь также, что условие (27) имеет свой аналог в терминах векторного поля (15) на подмногообразии $M_\varepsilon^{2n} \subset M$. А именно, векторное поле на подмногообразии $M_\varepsilon^{2n} \subset M$ с учетом (16) представимо в виде

$$du/dt = K_{(\varphi)}[u] + \varepsilon F_{(g)}[u], \tag{28}$$

где $\varphi[u] + \varepsilon g[u] = O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$.

Условие инвариантности подмногообразия $M_\varepsilon^{2n} \subset M$ относительно векторного поля (28) согласно (17) задается соотношением

$$\partial g/\partial t + \varphi' \cdot F_{(g)} + K'^{*}_{(\varphi)} \cdot g + g' \cdot K_{(\varphi)} + F'^{*}_{(\varphi)} \cdot \varphi = O(\varepsilon)[u],\ u \in M_\varepsilon^{2n}. \tag{29}$$

Рассматривая соотношение (29) как уравнение для элемента $g[u] \in T^*(M)$, можно определить $g[u]$ в явном виде. Тем самым задача описания уравнений эргодических деформаций для нелинейной динамической системы (25) может считаться полностью решенной.

Перейдем теперь к описанию условий регулярности ε-деформации многообразий $M^{2n} \to M_\varepsilon^{2n}$, $\varepsilon \to 0$, задаваемой векторным полем (25). Будем требовать, чтобы для найденного явного значения элемента $g[u] \in T^*(M)$ фазовый портрет динамической системы (25) не разрушался, а допускал только непрерывную ε-деформацию при $\varepsilon \to 0$. Чтобы получить условия, обеспечивающие указанные свойства поведения траекторий динамической системы на подмногообразии $M_\varepsilon^{2n} \subset M$, воспользуемся результатами [8], основанными на подходе Пуанкаре – Мельникова [9].

Пусть $(u_{(s)}, p_{(s)})^\tau \in M^{2n}$ — сепаратрисная гомоклиническая траектория динамической системы (25) при $\varepsilon = 0$, имеющей особую гиперболическую точку $(\bar{u}, \bar{p}) \in M^{2n}$, которая инвариантна относительно возмущения (25). Определим, согласно [9], характеристическую μ-функцию Мельникова – Митропольского в случае $n = 1$, т. е. на двумерном подмногообразии M^2:

$$\mu(x_0) = \int_{\mathbb{R}} \det \| X_{(\varphi)}(u_{(s)}, p_{(s)}), Q_{(g)}(u_{(s)}, p_{(s)}) \| (x - x_0)\, dx. \tag{30}$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если μ-функция* (30) *тождественно равна нулю на заданном сепаратрисном многообразии* $(u_{(s)}, p_{(s)})^{\tau} \in M$, *то* ε*-деформация* $M^2 \to \to M_{\varepsilon}^2$ *регулярна по переменной* $x \in \mathbb{R}$. *В противном случае при любом* $\varepsilon \to 0$ *будет происходить расщепление сепаратрисного подмногообразия в* $M_{\varepsilon}^{2n} \subset M$ *или его самопересечение, что характеризуется недетерминированным, т. е. хаотическим поведением траектории при всех* $x \in \mathbb{R}$ *в соответствии с теоремой Биркгофа – Смейла* [7]. *Причем в последнем случае существует квазиинвариантное фрактальное подмногоообразие* $\xi \subset M_{\varepsilon}^2$, *гомеоморфное множеству Кантора.*

***Замечание* 1.** Так как в общем случае динамической системы (25) на подмногообразии $M_{\varepsilon}^2 \subset M$ справедлива более сложная, но аналогичная характеристическая теорема (см. [8]), то можно утверждать, что в случае гиперболического сепаратрисного гомоклинического подмногообразия в M_{ε}^{2n} условия типа равенства нулю μ-функции налагают ряд ограничений на числовые параметры этого подмногообразия. Именно определенным таким образом числовым параметрам и соответствуют квазиинвариантные подмногообразия $M_{\varepsilon}^{2n} \subset M$, $\varepsilon \to 0$, для которых возможны соответствующие эргодические деформации по переменной $t \in \mathbb{R}$ в силу исходной динамической системы (15).

Примеры. 1. Рассмотрим задачу об эргодических деформациях для слабовозмущенной нелинейной интегрируемой по Лаксу динамической системы Кортевега – де Фриза

$$\frac{du}{dt} = u_{xxx} - uu_x + \varepsilon u_x u^2 = K[u] + \varepsilon F[u], \tag{31}$$

где $u \in M \subset C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\varepsilon \to 0$.

Определим двумерное инвариантное солитонное подмногообразие M^2 динамической системы (31) при $\varepsilon = 0$ соотношением

$$M^2 = \left\{u \in M\colon \operatorname{grad} \mathcal{L}_1[u] = \frac{1}{2}u^2 u_{xx} + c_1 u + c_2 = 0\right\}, \tag{32}$$

где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ — некоторые константы; функционал

$$\mathcal{L}_1 = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{6}u^3\right)dx + \frac{1}{2}c_1 \int_{\mathbb{R}} u^2\,dx + c_2 \int_{\mathbb{R}} u\,dx \in D(M)$$

— линейная комбинация законов сохранения динамической системы (31) при $\varepsilon = 0$.

Зададим в соответствии с (16) ε-деформацию многообразия (32) $M^2 \to \to M_{\varepsilon}^2 \subset M$ в виде $\varphi[u] = \operatorname{grad} \mathcal{L}_1[u]$,

$$M_{\varepsilon}^2 = \{u \in M\colon \varphi[u] + \varepsilon g[u] = O(\varepsilon^2)[u]\}, \tag{33}$$

где элемент $g[u] \in T(M^2) \subset T(M)$ подлежит определению из характеристического уравнения (29).

Для определения явного вида элемента $g[u] \in T(M^2)$ заметим, что на $M_{\varepsilon}^2 \subset M$

$$K_{(\varphi)}[u] = c_1 u_x, \quad F_{(g)}[u] = u^2 u_x + dg[u]/dx, \tag{34}$$

причем, согласно (33), элемент $g[u] \equiv g(u, u_x) + O(\varepsilon)[u]$ на $M_\varepsilon^2 \subset M$.

Для выражения $\varphi'[u]: T(M) \to T^*(M)$ имеем

$$\varphi'[u] = -\partial^{-2} + u + c_1, \quad \partial = d/dx. \tag{35}$$

Таким образом, из (34), (35) и (29) находим, что на подмногообразии $M_\varepsilon^2 \subset M$ должно выполняться сравнение

$$(-\partial^{-2} + u + c_1)(u^2 u_x + dg[u]/dx) = O(\varepsilon)[u]. \tag{36}$$

Частным решением сравнения (36) является элемент $g[u] = -u^3/3 \in T^*(M)$, т. е. на подмногообразии $M_\varepsilon^2 \subset M$ векторное поле $F_{(g)}[u] \equiv 0$.

Итак, пусть данные Коши для динамической системы (31) при $t = t_0 \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условию $u(t_0) \in M_\varepsilon^2$, т. е.

$$u^2/2 + c_1 u + c_2 - \varepsilon u^3/3 = u_{xx}. \tag{37}$$

Для того чтобы соответствующая деформация $M^2 \to M_\varepsilon^2 \subset M$ была регулярной при $\varepsilon \to 0$, необходимо выполнение условий, обеспечивающих неразрушаемость фазового портрета динамической системы (25) при $\varepsilon = 0$. Как отмечено выше, таким достаточным условием в рассматриваемом случае будет равенство нулю тождественно следующей функции Мельникова – Митропольского:

$$\mu(x_0) = \int_{\mathbb{R}} \det \| X_{(\varphi)}(u,p), Q_{(g)}(u,p) \| (x - x_0)\, dx, \tag{38}$$

где, согласно (31) и (33),

$$X_{(\varphi)}(u,p) = \left(p, \frac{1}{2}u^2 + c_1 u + c_2\right)^\tau, \quad Q_{(g)}(u,p) = \left(0, -\frac{1}{3}u^3\right)^\tau. \tag{39}$$

Подставляя (39) в (38), легко получаем, что на подмногообразии $M_\varepsilon^2 \subset M$ выполняется $\mu \equiv 0$, т. е. фазовый портрет динамической системы (25) при $\varepsilon \to 0$ не разрушаем возмущением. Таким образом, установлено следующее утверждение.

Теорема 4. *Динамическая система* (31) *на подмногообразии* $M_\varepsilon^2 \subset M$ (33) *задает эргодическую деформацию подмногообразия* $M^2 \subset M$ *солитонных решений системы* (31) *при* $\varepsilon = 0$.

Действительно, подмногообразие $M_\varepsilon^2 \subset M$, согласно (8), регулярно деформировано из подмногообразия $M^2 \subset M$ при $\varepsilon \to 0$. Кроме того, как легко убедиться из соотношения (24), на M_ε^2 векторное поле $d/dt = c_1 d/dx$, т. е. фазовый портрет динамической системы (24) при $\varepsilon \to 0$ не разрушаем возмущением, как и в случае динамической системы (25), что устанавливает теорему 4.

Сформулированный выше результат для нелинейной динамической системы (31), рассматриваемой на подмногообразии $M_\varepsilon^2 \subset M$, можно получить более просто, если заметить, что для всех $\varepsilon \in \mathbb{R}$ динамическая система (31) гамильтонова на M, т. е.

$$du/dt = -\mathfrak{L}\, \mathrm{grad}\, H_\varepsilon[u], \tag{40}$$

где $\mathfrak{L} = d/dt$ — имплектический и нетеровый оператор на M [2],

$$H_\varepsilon[u] = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} u_x^2 + \frac{1}{6} u^3 - \frac{\varepsilon}{12} u^4 \right) dx \in D(M)$$

— соответствующий гамильтониан на M.

Тогда на инвариантном подмногообразии $M_\varepsilon^2 \subset M$ динамическая система (31) вполне интегрируема по Лиувилю и необходимо сохраняет топологическую структуру фазового портрета динамической системы (31) при $\varepsilon \to 0$ (в сравнении с такой же при $\varepsilon = 0$).

2. Рассмотрим теперь другой пример слабо возмущенной нелинейной динамической системы Кортевега – де Фриза вида

$$\frac{du}{dt} = u_{xxx} - uu_x + \varepsilon u_{xx} = K[u] + \varepsilon F[u], \tag{41}$$

где $u \in M \subset C^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $\varepsilon \to 0$.

Очевидно, что возмущение в (41) диссипативно, т. е. в существенном с точностью до слагаемых порядка $O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$, динамическая система (41) не допускает гамильтонового представления.

Рассмотрим, как и выше, ε-деформацию многообразий $M^2 \to M_\varepsilon^2 \subset M$, где M_ε^2 задается выражением (33) при неопределенном еще элементе $g[u] \in T^*(M)$. Из уравнения (29) для случая динамической системы (41) находим, что элемент $g[u] = -u_x \in T^*(M)$ обеспечивает выполнение необходимого условия эргодичности ε-деформации $M^2 \to M_\varepsilon^2$ при $\varepsilon \to 0$. Для регулярности ε-деформации $M^2 \to M_\varepsilon^2$ по переменным $x, t \in \mathbb{R}$ необходимо выполнение условия о неразрушаемости фазовых портретов динамических систем (24) и (25). Однако по формуле (8) находим, что для сепаратрисных решений $\mu = -\int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t)dx \not\equiv 0$, т. е. для всех значений параметров $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ε-деформация $M^2 \to M_\varepsilon^2$ при $\varepsilon \to 0$ нерегулярна, как по пространственной переменной x, так и по эволюционной переменной $t \in \mathbb{R}$. С другой стороны, это не означает, что не существует такого подмногообразия $M^{2n} \subset M$, $n > 1$ — некоторое натуральное число, что соответствующая ε-деформация $M^2 \to M_\varepsilon^2 \subset M$ будет регулярной. В этой связи необходимо также отметить, что решение $g[u] = -u_x \in T^*(M)$ уравнения (29) не является единственным на подмногообразии $M_\varepsilon^2 \subset M$, а потому вполне возможны другие ε-деформации $M^2 \to M_\varepsilon^2$, являющиеся регулярными по переменным $x, t \in \mathbb{R}$.

3. Рассмотренные выше примеры об эргодических деформациях конечномерных инвариантных подмногообразий для нелинейных динамических систем отличаются тем, что изученные динамические системы относятся к классу нелинейных слабо возмущенных динамических систем вида (15), интегрируемых по Лаксу при $\varepsilon = 0$. В частности, при $\varepsilon = 0$ эти динамические системы имеют бесконечную иерархию инвариантных функционалов, уравнения для критических точек которых задают соответствующие конечномерные инвариантные подмногообразия в исходном функциональном пространстве. Но, как известно, существуют априори диссипативные при $\varepsilon = 0$ нелинейные динамические системы вида (15), имеющие конечную или бесконечную иерархию инвариантных конечномерных подмногообразий, для которых также является корректной задача о построении их квазиинвариантных эргодических деформаций. Одним из таких примеров является слабо возмущенная нелинейная динамическая сис-

тема Бюргерса – Кортевега – де Фриза, имеющая вид

$$\frac{du}{dt} = u_{xx} + uu_x + \varepsilon u_{xxx} = K[u] + \varepsilon F[u], \tag{42}$$

где $u \in M \subset C^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $\varepsilon \to 0$, $t \in \mathbb{R}$ — эволюционный параметр.

Динамическая система (42) имеет бесконечную иерархию конечномерных инвариантных подпространств $M^{n+1} \subset M$, $n \in \mathbb{Z}$, вида

$$M^{n+1} = \left\{u \in M: (\Lambda^*)^n u_x + \sum_{j=0}^{n-1} c_j (\Lambda^*)^j u_x = 0\right\}, \tag{43}$$

где $\Lambda^* = \partial + \frac{1}{2}(u + u_x \partial^{-1})$ — рекурсионный оператор, $c_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{0, n-1}$, — некоторые произвольные числа. В общем виде ε-деформацию подмногообразия (43) можно записать следующим образом:

$$M_\varepsilon^{n+1} = \{u \in M: \alpha[u] + \varepsilon q[u] = O(\varepsilon^2)[u]\}, \tag{44}$$

где $\alpha[u] \in T(M)$ — произвольная симметрия динамической системы (42) при $\varepsilon = 0$ и $q[u] \in T(M)$ — ее возмущение, обеспечивающее квазиинвариантность подмногообразия (44).

Элемент $\alpha[u] \in T(M)$, в частности, удовлетворяет в общем случае уравнению Ли

$$\partial\alpha/\partial t + [K, \alpha] = 0, \tag{45}$$

где $[\cdot, \cdot]$ — стандартный коммутатор векторных полей на M.

Пусть $u \in M_\varepsilon^{n+1}$. Тогда динамическая система (42) записывается в виде

$$\frac{du}{dt} = K_{(\alpha)}[u] + \varepsilon F_{(q)}[u], \tag{46}$$

где векторные поля $K_{(\alpha)}[u], F_{(q)} \in T(M)$ однозначно определяются выражением (44).

Учитывая (46), условие квазиинвариантности ε-деформации $M^{n+1} \to$ $\to M_\varepsilon^{n+1} \subset M$ при $\varepsilon \to 0$ запишем в виде сравнения

$$\partial q/\partial t + q' \cdot K_{(\alpha)} - K'_{(\alpha)} \cdot q - \alpha' \cdot F_{(q)} = O(\varepsilon)[u], \tag{47}$$

которое можно использовать для нахождения элемента $g[u] \in T(M)$ в явном виде. После нахождения $g[u] \in T(M)$ из условия сохранения топологической структуры фазовых портретов динамических систем (46) и (42) при $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon = 0$ по переменным $x, t \in \mathbb{R}$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ получаем условия, обеспечивающие эргодичность деформаций соответствующих решений $u \in$ $\in M_\varepsilon^{n+1}$ исходной динамической системы при $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим более подробно случай $n = 1$, т. е. пусть

$$M_\varepsilon^2 = \{u \in M: u_{xx} + uu_x - \omega u_x + \varepsilon q[u] = O(\varepsilon^2)[u]\}, \tag{48}$$

где элемент $q[u] \in T(M)$, согласно (47), удовлетворяет уравнению

$$(\partial^2 + \partial \cdot u - \omega\partial) F_{(q)}[u] = O(\varepsilon). \tag{49}$$

Здесь учтено, что согласно (42) и (48)

$$K_{(\alpha)}[u] = \omega u_x, \quad F_{(q)}[u] = -q[u] + u_x[(\omega - u)^2 - u_x]. \tag{50}$$

Из условия $F_{(q)}[u] = 0$ получаем $q[u] = u_x[(\omega - u)^2 - u_x] \in T(M^2)$ — частное решение уравнения (49).

Представим теперь ε-деформацию $M^2 \to M_\varepsilon^2 \subset M$, заданную соотношением (48), в виде конечномерной динамической системы вида (25) на топологическом джет-многообразии $J^{(1)}_{\text{top}}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ по эволюционной переменной $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{du}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = (\omega - u)p + \varepsilon p[(\omega - u)^2 - p]. \tag{51}$$

Соответствующая уравнениям (24) динамическая система на $M_\varepsilon^2 \subset M$ по эволюционной переменной $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $d/dt = \omega d/dx$, т. е. фазовые портреты векторных полей d/dt и d/dx на $J^{(1)}_{\text{top}}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ совпадают (топологически эквивалентны).

Используя теперь μ-функцию Мельникова – Митропольского, несложно установить условие регулярности ε-деформации $M^2 \to M_\varepsilon^2 \subset M$ вида (48) для сепаратрисных решений. Имеем

$$\mu(x_0) = \int\limits_{\mathbb{R}} u_x^2[(\omega - u)^2 - u_x]\, dx \equiv 0. \tag{52}$$

Здесь $u = \omega + \beta\, th[\beta(x + \omega t)/2]$ — частное сепаратрисное решение уравнения (42) при $\varepsilon = 0$, принадлежащее подпространству $M^2 \subset M$, $\beta, \omega \in \mathbb{R}$ — некоторые действительные параметры.

Учитывая, что соотношение (52) влечет некоторое условие на числа $\beta, \omega \in$ $\in \mathbb{R}$ вида $r_q(\beta, \omega) = 0$, получаем однопараметрическое семейство сепаратрисных решений динамической системы (42) при $\varepsilon = 0$, допускающих эргодическую ε-деформацию M^2 на квазиинвариантное подмногообразие M_ε^2. Очевидно также, что любое другое решение характеристического уравнения (49) приводит к другому набору сепаратрисных решений, допускающих эргодическую ε-деформацию при $\varepsilon \to 0$, и соответствующему соотношению $r_q(\beta, \omega) = = 0$, получаемому из соотношений вида (38) и (52). Отметим также, что указанная задача описания других соотношений вида $r_q(\beta, \omega) = 0$, ведущих к эргодичности ε-деформаций соответствующих сепаратрисных траекторий, заслуживает отдельного исследования. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть для динамической системы* (42) *задана квазиинвариантная ε-деформация $M^2 \to M_\varepsilon^2$, описываемая соотношением* (48), *где* $\varepsilon \to 0$. *Тогда существует однопараметрическое семейство невозмущенных сепаратрисных решений уравнения* (42) *при* $\varepsilon \to 0$, *обеспечивающих ее эргодичность.*

В силу сформулированной теоремы при $\varepsilon \to 0$ существует такая сепаратрисная траектория (функция) $u^{(0)}(x, t; \xi, \eta) \in M_\varepsilon^2$ от *медленных* переменных $\xi = \varepsilon x, \eta = \varepsilon t \in \mathbb{R}$, что для решения $u_\varepsilon(x, t)$ уравнения (48) справедливо представление $u_\varepsilon(x, t) = u^{(0)}(x, t; \xi\, \eta) + O(\varepsilon^2)$ для всех $x, t \in \mathbb{R}$. В рассматриваемом случае $\beta = \beta(\xi, \eta)$, $\omega = \omega(\xi, \eta)$, т. е. величины β, ω зависят от *медленных* переменных $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, причем таким образом, что выполнено тождественно условие $r_q(\beta, \omega) \equiv 0$ для всех $\beta, \omega \in \mathbb{R}$.

Замечая далее, что $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}u^2 + u_x^2\right) + \varepsilon u_{xxx}$, легко находим уравнение эргодичности ε-деформации $M^2 \to M_\varepsilon^2$ типа Уизема

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\int_{\mathbb{R}} u^{(0)}\,dx = \frac{\partial}{\partial\eta}\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{2}\left(u^{(0)}\right)^2 + u_x^{(0)}\right]dx,$$

которе эквивалентно одному уравнению вида

$$\frac{\partial\omega}{\partial\eta} = S(\xi,\eta)\,\frac{\partial\omega}{\partial\xi},$$

где $S(\xi,\eta)$ — так называемая характеристическая скорость [10, 2] распространения возмущения по сепаратрисному решению $u^{(0)} \in M_\varepsilon^2$.

1. *Теория* солитонов: Метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
2. *Интегрируемые* динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты / Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко. – Киев: Наук. думка, 1987. – 296 с.
3. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
4. *Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Метод усреднения и уравнения эргодических деформаций для нелинейных эволюционных уравнений. – Киев, 1981. – 32 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.44).
5. *Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.* Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях. – Киев: Наук. думка, 1991. – 286 с.
6. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 302 с.
7. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. – М.: Мир, 1976. – 304 с.
8. *Симплектичний* аналіз слабко збурених динамічних систем. Новий критерій стабілізації гомоклінічних сепаратрис та його застосування / Ю. О. Митропольський, І. О. Антонишин, А. К.Прикарпатський, В. Г. Самойленко. – Київ, 1991. – 56 с. – (Препринт / АН України. Ін-т математики; 91.53).
9. *Мельников В. К.* Об устойчивости центра при периодических во времени возмущениях // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1963. – **12**, № 1. – С. 3–52.
10. *Flaschka H., Forest M. G., Mc Laughlin D. W.* Multi-phase averaging and the inverse spectral solutions of the Korteweg – de Vries equation // Comm. Pure Appl. Math. – 1980. – **33**, № 6. – P. 739–784.

Получено 21.07.92