УДК 519.21

Г. У. Мынбаева, асп. (Киев. ун-т)

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ НЕУСТОЙЧИВОГО РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

We study the rate of convergence of the process $\xi(tT)/\sqrt{T}$ to the process $w(t)/\sigma$ as $T \to \infty$, where $\xi(t)$ is a solution of the stochastic differential equation

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + \sigma(\xi(t))\,dw(t).$$

Досліджується швидкість збіжності процесу $\xi(tT)/\sqrt{T}$ при $T \to \infty$ до процесу $w(t)/\sigma$, де $\xi(t)$ — розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + \sigma(\xi(t))\,dw(t).$$

Рассмотрим класс уравнений

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + \sigma(\xi(t))\,dw(t), \tag{1}$$

коэффициенты $a(x)$, $\sigma(x)$ которого удовлетворяют условиям существования и единственности решения, $w(t)$ — винеровский процесс, $0 < \delta \le f'(x)\sigma(x) \le \le c$, где

$$f(x) = \int_0^x \exp\left\{-2\int_0^u \frac{a(v)}{\sigma^2(v)}\,dv\right\}du. \tag{2}$$

При условиях

$$\frac{1}{x}\int_0^x f'(u)\,du \to \sigma_1, \quad \frac{1}{x}\int_0^x \frac{du}{f'(u)\sigma^2(u)} \to \sigma_2$$

при $|x| \to \infty$ из работы [1] вытекает слабая сходимость процесса $\xi(tT)/\sqrt{T}$ к процессу $w(t)/\sqrt{\sigma_1\sigma_2}$ при $T \to \infty$. В настоящей статье исследуется скорость указанной выше сходимости.

Теорема. *Пусть* $\xi(t)$ *— решение уравнения* (1), $\xi(0) = x_0$. *Если:*

1) $\dfrac{\Psi_1(|f(x)|)}{|x|} \to 0$ *при* $|x| \to \infty$;

2) $\left|\dfrac{1}{\Psi_1(|f(x)|)}\displaystyle\int_0^x \frac{[f'(v)\sigma(v)-\sigma_0]^2}{\sigma(v)}\,dv - \overline{b}(x)\right| \to 0$, *при* $|x| \to \infty$;

3) $\dfrac{1}{\Psi_2(|f(x)|)}\left|\displaystyle\int_0^x \frac{f'(v)\sigma(v)-\sigma_0}{\sigma(v)}\,dv\right| \le c_1$;

4) $\dfrac{1}{\Psi_2(|f(x)|)}\left|\displaystyle\int_0^x \left(\frac{1}{\sigma(v)} - \sigma\right)dv\right| \le c_2$,

где $\Psi_1(z)$ *и* $\Psi_2(z)$ *— регулярно меняющиеся функции такие, что*

$$\frac{\Psi_2(\sqrt{T})}{\sqrt{\Psi_1(\sqrt{T})\sqrt{T}}} \to 0 \quad \text{при } T \to \infty,$$

$\overline{b}(x) = b_1$ *при* $x > 0$ *и* $\overline{b}(x) = b_2$ *при* $x < 0$, *то процесс*

$$B(T)\left[\frac{\xi(tT)}{\sqrt{T}}-\frac{1}{\sigma}\frac{w(tT)}{\sqrt{T}}\right] \quad при \quad B(T)=\frac{\sqrt[4]{T}}{\sqrt{\Psi_1(\sqrt{T})}}$$

слабо сходится к процессу $\xi(\beta(t))^{1/2}/(\sigma_0\sigma)$ *при* $T\to\infty$, *где*

$$\beta(t)=2\sigma_0\left[w_1(t)\bar{b}(w_1(t))-\int_0^t \bar{b}(w_1(s))\,dw_1(s)\right],$$

$w_1(t)$ *— некоторый винеровский процесс,* ξ *— нормальная случайная величина с параметрами* $(0,1)$, *не зависящая от* $w_1(t)$.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ задана соотношением (2). Рассмотрим

$$\frac{1}{x}\int_0^x f'(u)\,du=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{f'(u)\sigma(u)-\sigma_0}{\sigma(u)}\,du+\frac{\sigma_0}{x}\int_0^x\left(\frac{1}{\sigma(u)}-\sigma\right)du+\sigma_0\sigma=$$

$$=I_1+\sigma_0\sigma,$$

$$\frac{1}{x}\int_0^x\frac{du}{f'(u)\sigma^2(u)}=\frac{1}{x}\int_0^x\left[\frac{1}{f'(u)\sigma(u)}-\frac{1}{\sigma_0}\right]\frac{1}{\sigma(u)}\,du+$$

$$+\frac{1}{\sigma_0}\frac{1}{x}\int_0^x\left(\frac{1}{\sigma(u)}-\sigma\right)du+\frac{\sigma}{\sigma_0}=I_2+\frac{\sigma}{\sigma_0}.$$

В силу условий 3 и 4 теоремы имеем

$$|I_1|\le\frac{1}{|x|}\left|\int_0^x\frac{f'(u)\sigma(u)-\sigma_0}{\sigma(u)}\,du\right|+\frac{\sigma_0}{|x|}\left|\int_0^x\left(\frac{1}{\sigma(u)}-\sigma\right)du\right|\le$$

$$\le(1+\sigma_0)\frac{\Psi_2(|f(x)|)}{|x|},$$

$$|I_2|\le\frac{1}{|x|}\left|\int_0^x\frac{\sigma_0-f'(u)\sigma(u)}{\sigma_0 f'(u)\sigma(u)}\frac{1}{\sigma(u)}\,du\right|+\frac{1}{\sigma_0}\frac{1}{|x|}\left|\int_0^x\left(\frac{1}{\sigma(u)}-\sigma\right)du\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\sigma_0}\left(\frac{1}{\delta}+1\right)\frac{\Psi_2(|f(x)|)}{|x|}.$$

Легко показать, что

$$\frac{\Psi_2(|f(x)|)}{|x|}=\sqrt{\frac{\Psi_1(|f(x)|)}{|x|}}\,\frac{\Psi_2(|f(x)|)}{\sqrt{\Psi_1(|f(x)|)|x|}}\to 0$$

при $|x|\to\infty$, поэтому $|I_1|\to 0$ и $|I_2|\to 0$ при $|x|\to\infty$. Следовательно [1], процесс $\xi(tT)/\sqrt{T}$ слабо сходится при $T\to\infty$ к процессу $w(t)/\sigma$.

Рассмотрим процесс

$$B(T)\left[\frac{\xi(tT)}{\sqrt{T}}-\frac{1}{\sigma}\frac{w(tT)}{\sqrt{T}}\right]=\frac{B(T)}{\sigma_0\sigma}\left[\frac{f(\xi(tT))}{\sqrt{T}}-\sigma_0\frac{w(tT)}{\sqrt{T}}\right]+$$

$$+\frac{B(T)}{\sigma_0\sigma\sqrt{T}}\left[\sigma_0\sigma\xi(tT)-f(\xi(tT))\right]=I_3+I_4.$$

По формуле Ито

$$f(\xi(t)) = f(\xi(0)) + \int_0^t f'(\xi(s))\sigma(\xi(s))\,dw(s).$$

Обозначая

$$f(\xi(t)) = \eta(t), \quad \eta_T(t) = \frac{\eta(tT)}{\sqrt{T}}, \quad w_T(t) = \frac{w(tT)}{\sqrt{T}},$$

$$f'(\xi(t))\sigma(\xi(t)) = f'\Big(\varphi(\eta(t))\Big)\sigma\Big(\varphi(\eta(t))\Big) = \hat{\sigma}(\eta(t)),$$

где $\varphi(x)$ — функция, обратная к $f(x)$, имеем

$$\eta(t) = \eta(0) + \int_0^t \hat{\sigma}(\eta(s))\,dw(s).$$

Отсюда

$$\frac{\eta(tT)}{\sqrt{T}} - \sigma_0\frac{w(tT)}{\sqrt{T}} = \frac{\eta(0)}{\sqrt{T}} + \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^{tT}[\hat{\sigma}(\eta(s)) - \sigma_0]\,dw(s).$$

Поэтому

$$I_3 = \frac{B(T)}{\sqrt{T}}\,\frac{\eta(0)}{\sigma_0\sigma} + \frac{B(T)}{\sigma_0\sigma}\int_0^t[\hat{\sigma}(\eta(sT)) - \sigma_0]\,dw_T(s) =$$

$$= \frac{B(T)}{\sqrt{T}}\,\frac{\eta(0)}{\sigma_0\sigma} + \frac{1}{\sigma_0\sigma}\gamma_T(t).$$

Обозначим

$$\tau_T(t) = \inf\left\{ s: B^2(T)\int_0^s[\hat{\sigma}(\eta(vT)) - \sigma_0]^2 dv \ge t\right\}.$$

Так как $\tau_T(t)$ — марковский момент относительно семейства σ-алгебр $F_T(t) = (w_T(s), s \le t)$, то [2] $\gamma_T(\tau_T(t))$ — винеровский процесс, который далее обозначаем $\tilde{w}_T(t)$. Поэтому

$$\gamma_T(t) = \tilde{w}_T\left(B^2(T)\int_0^t[\hat{\sigma}(\eta(sT)) - \sigma_0]^2\,ds\right).$$

Можно показать, что $M[\eta_T(t)]^2 \le c$, $M[\eta_T(t+\Delta) - \eta_T(t)]^2 \le c\Delta$. Следовательно, можем считать, что для любой последовательности $T_n' \to \infty$ существует подпоследовательность $T_n \to \infty$ такая, что $\eta_{T_n}(t) \to \sigma_0 w_1(t)$, $w_{T_n}(t) \to \to w_0(t)$, $\tilde{w}_{T_n}(t) \to \tilde{w}(t)$ по вероятности при $T_n \to \infty$, где $w_1(t)$ — винеровский процесс. Из доказательства теоремы 1 работы [3] вытекает, что по вероятности при $T_n \to \infty$

$$\frac{\sqrt{T_n}}{\Psi_1\left(\sqrt{T_n}\right)}\int_0^t[\hat{\sigma}(\eta(sT_n)) - \sigma_0]^2\,ds \to \beta(t),$$

где

$$\beta(t) = 2\sigma_0\left[w_1(t)\,\overline{b}\,(w_1(t)) - \int_0^t \overline{b}\,(w_1(s))\,dw_1(s)\right],$$

$\bar{b}(x) = b_1$ при $x > 0$ и $\bar{b}(x) = b_2$ при $x < 0$, а также $\beta(t)$-измерима относительно σ-алгебры $(w_0(s), s \le t)$. Поэтому

$$\tilde{w}_{T_n}\left(B^2(T_n)\int_0^t [\,\hat{\sigma}(\eta(sT_n)) - \sigma_0]^2\, ds \right) \to \tilde{w}(\beta(t))$$

по вероятности при $T_n \to \infty$, где $B(T) = \sqrt[4]{T}/\sqrt{\Psi_1(\sqrt{T})}$. В силу условия 3 теоремы винеровские процессы $\tilde{w}(t)$ и $w_0(t)$ [4] независимы, поэтому

$$\tilde{w}(\beta(t)) = \frac{w(\beta(t))}{\sqrt{\beta(t)}}\sqrt{\beta(t)} = \xi\sqrt{\beta(t)},$$

где ξ — нормальная случайная величина с параметрами $(0, 1)$, не зависящая от $\beta(t)$. Следовательно, $\gamma_{T_n}(t) \to \xi\sqrt{\beta(t)}$ по вероятности при $T_n \to \infty$ и $B(T_n) = \sqrt[4]{T_n}/\sqrt{\Psi_1(\sqrt{T_n})}$.

Далее,

$$\frac{B(T_n)}{\sqrt{T_n}}\,\frac{\eta(0)}{\sigma_0\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\Psi_1(\sqrt{T_n})\sqrt{T_n}}}\,\frac{\eta(0)}{\sigma_0\sigma} \to 0$$

по вероятности при $T_n \to \infty$.

Из условий 3 и 4 теоремы имеем

$$\frac{1}{\sigma_0\sigma}|f(x) - \sigma_0\sigma x| \le \frac{1}{\sigma_0\sigma}\left|\int_0^x f'(v)\,dv - \sigma_0\sigma x\right| =$$

$$= \frac{1}{\sigma_0\sigma}\left|\int_0^x \frac{f'(v)\sigma(v) - \sigma_0}{\sigma(v)}\,dv + \sigma_0\int_0^x\left(\frac{1}{\sigma(v)} - \sigma\right)dv\right| \le$$

$$\le \frac{1+\sigma_0}{\sigma_0\sigma}\,\Psi_2(|f(x)|).$$

Поэтому

$$|I_4| \le \frac{1}{\sigma_0\sigma}\,\frac{1}{\sqrt{\Psi_1(\sqrt{T_n})\sqrt{T_n}}}\left|f(\xi(tT_n)) - \sigma_0\sigma\xi(tT_n)\right| =$$

$$= \frac{1}{\sigma_0\sigma}\,\frac{\Psi_2(\sqrt{T_n})}{\sqrt{\Psi_1(\sqrt{T_n})\sqrt{T_n}}}\,\frac{1}{\Psi_2(\sqrt{T_n})}\left|f(\xi(tT_n)) - \sigma_0\sigma\xi(tT_n)\right| \to 0$$

по вероятности при $T_n \to \infty$.

Из произвольности последовательности $T_n \to \infty$ и единственности решения следует доказательство теоремы.

1. *Кулинич Г. Л.* Асимптотическая нормальность распределения решения стохастического диффузионного уравнения // Укр. мат. журн. – 1968. – **20**, № 3. – С. 396 – 400.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
4. *Кулинич Г. Л.* Об асимптотическом поведении распределения функционалов типа $\int_0^t g(\xi(s))\,ds$ от диффузионного процесса // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1973. – № 8. – С. 99 – 105.
5. *Кулинич Г. Л.* Предельные распределения для функционалов интегрального типа от неустойчивых диффузионных процессов // Там же. – 1974. – № 11. – С. 81 – 85.

Получено 14.11.92