УДК 517. 9

А. М. Самойленко, чл.-корр. НАН Украины,
Б. П. Бажура, асп. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ ИНВАРИАНТНОГО ТОРОИДАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

A dynamical system is studied in a neighborhood of an invariant toroidal manifold in the case of a general correlation between the dimension of a phase space and the dimension of a toroidal manifold.

Досліджена динамічна система в околі інваріантного тороїдального многовиду у випадку загального співвідношення між розмірностями фазового простору системи і тороїдального многовиду.

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = X(x), \tag{1}$$

где $x \in E^n$ — n-мерное евклидово пространство, $X \in \mathbb{C}^r(E^n)$ — пространство $r \geq 1$ раз непрерывно дифференцируемых в E^n функций, ее решение $x = x(t, x_0)$, $x_0 \in E^n$, $x_0 = x(0, x_0)$, и множество

$$M : x = f(\varphi), \tag{2}$$

где $\varphi \in T_m$ — m-мерный тор, $f \in \mathbb{C}^s(T_m)$ — пространство 2π-периодических s раз непрерывно дифференцируемых функций переменного φ, $0 \leq s \leq r$, являющееся для системы (1) инвариантным m-мерным тороидальным многообразием гладкости s.

Согласно [1], для выполнения предположений относительно множества M функции X и f должны удовлетворять условиям

$$\operatorname{rank} \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} = m, \quad \varphi \in T_m, \tag{3}$$

$$\left[\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} \Gamma^{-1}(\varphi) \left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^* - E \right] X(f(\varphi)) = 0. \tag{4}$$

Здесь $\Gamma(\varphi) = \left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^* \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}$, $\varphi \in T_m$, при этом система (1) на M сводится к динамической системе на торе T_m общего вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \tag{5}$$

где, согласно [1], $a(\varphi) = \Gamma^{-1}(\varphi) \left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^* X(f(\varphi))$, $\varphi \in T_m$.

Отметим, что равенства (3), (4) справедливы, если система уравнений (1) имеет квазипериодическое решение $x = f(\lambda t + \varphi_0)$, $x_0 = f(\varphi_0)$, для некоторой функции $f \in \mathbb{C}^s(T_m)$, $0 \leq s \leq r$, и частотного базиса $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, где m — истинный размер базиса, $m < n$. В этом случае система (1) сводится на торе T_m к квазипериодической системе вида (5) при $a(\varphi) \equiv \lambda$.

Для исследования поведений решений системы (1) , начинающихся в малой окрестности многообразия (2), необходимо представить эту окрестность в виде произведения $T_m \times K_\delta^l$, где K_δ^l — l-мерный куб со стороной δ, $\delta > 0$, и ввести вместо евклидовых координат $x = (x_1, \dots, x_n)$ локальные координаты $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in T_m$ и $h = (h_1, \dots, h_l) \in K_\delta^l$, в которых многообразие M определялось бы уравнением $h = 0$, $\varphi \in T_m$, а система (1) на M имела вид (5).

Задача введения локальных координат (φ, h) непосредственно связана с задачей дополнения m-репера $\dfrac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}$ до 2π-периодического базиса в E^n, т. е. в определении условий существования матрицы $B(\varphi)$, столбцы которой принадлежат $\mathbb{C}^s(T_m)$, чтобы матрица $\left[\dfrac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}, B(\varphi)\right]$, образованная столбцами матриц $\dfrac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}$ и $B(\varphi)$, была невырожденной для каждого $\varphi \in T_m$. Положительное решение этой задачи, согласно [2], возможно при следующем соотношении размерностей тороидального многообразия и фазового пространства системы (1): $n = m + 1$ или $n \geq 2m + 1$.

В настоящей работе исследуются система вида (1) и ее траектории в окрестности инвариантного тороидального многообразия (2) в случае, когда приведенные выше соотношения не выполняются, т. е. $m + 1 < n < 2m + 1$.

1. Введение локальных координат в окрестности тороидального многообразия расширенной системы. Рассмотрим соответствующую (1) расширенную систему

$$\frac{dx}{dt} = X(x), \quad \frac{dy}{dt} = Cy, \tag{6}$$

где $y \in E^p$, $p = 2m - n + 1$, $C = \operatorname{diag}\{c_1, \dots, c_p\}$, $c_j < 0$ для всех $j = 1, \dots, p$. Относительно переменной $z = (x, y) \in E^{2m+1}$ система (8) имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = Z(z), \tag{7}$$

где $Z(z) = \operatorname{colon}(X, C)$, $Z \in \mathbb{C}^r(E^{2m+1})$, а многообразие M в E^{2m+1} определяется уравнением

$$M: z = g(\varphi), \quad \varphi \in T_m. \tag{8}$$

Здесь $g(\varphi) = (f(\varphi), 0, \dots, 0)$. Из равенств (3), (4) следует справедливость для функций $Z(z)$, $g(\varphi)$ при $\varphi \in T_m$ равенств

$$\operatorname{rank}\frac{\partial g(\varphi)}{\partial \varphi} = m, \quad \left[\frac{\partial g(\varphi)}{\partial \varphi}\Gamma^{-1}(\varphi)\left(\frac{\partial g(\varphi)}{\partial \varphi}\right)^* - E\right] Z(g(\varphi)) = 0,$$

$$\Gamma^{-1}(\varphi)\left(\frac{\partial g(\varphi)}{\partial \varphi}\right)^* Z(g(\varphi)) = a(\varphi), \quad \varphi \in T_m.$$

Следовательно, множество M, определяемое (8), является инвариантным m-мерным тороидальным многообразием системы (7), и сужение (7) на M определяется уравнением (5).

Поскольку $\operatorname{rank}\dfrac{\partial g}{\partial \varphi} = m$, то по теореме 2 [2] m-репер $\dfrac{\partial g}{\partial \varphi}$ дополняется до периодического базиса в E^{2m+1} матрицей $B(\varphi)$ со столбцами из $\mathbb{C}^s(T_m)$ такой, что

$$\det\left[\frac{\partial g}{\partial\varphi}, B(\varphi)\right] \neq 0 \quad \forall\varphi\in T_m. \tag{9}$$

Следовательно, возможно введение локальных координат (φ, h), $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $h = (h_1, \ldots, h_{m+1})$, по формуле замены переменных

$$z = g(\varphi) + B(\varphi)h, \tag{10}$$

дифференцированием которой получаем вместо (7)

$$\left[\frac{\partial g(\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial B(\varphi)h}{\partial\varphi}\right]\frac{d\varphi}{dt} + B(\varphi)\frac{dh}{dt} = Z(g(\varphi) + B(\varphi)h). \tag{11}$$

Учитывая условие (9), для всех h из области $\|h\| < \delta$, $\varphi\in T_m$, при достаточно малом δ отличен от нуля определитель матрицы

$$\left[\frac{\partial g(\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial B(\varphi)h}{\partial\varphi}, B(\varphi)\right]. \tag{12}$$

Следовательно, систему (11) можно разрешить в этой области относительно $\dfrac{d\varphi}{dt}$ и $\dfrac{dh}{dt}$, что приводит к системе уравнений вида

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= L_1(\varphi, h)Z(g(\varphi) + B(\varphi)h),\\ \frac{dh}{dt} &= L_2(\varphi, h)Z(g(\varphi) + B(\varphi)h),\end{aligned} \tag{13}$$

где $L_1(\varphi, h)$ и $L_2(\varphi, h)$ — блоки матрицы, обратной к (12).

Представим матрицу $B(\varphi)$ из (9) в четырехблочном виде $B(\varphi) = \begin{bmatrix} B_{11}(\varphi) & B_{12}(\varphi)\\ B_{21}(\varphi) & B_{22}(\varphi)\end{bmatrix}$, с блоками следующих размеров:

$$B_{11}(\varphi) — n\times n-m,\quad B_{12}(\varphi) — n\times p,\quad B_{21}(\varphi) — p\times n-m,\quad B_{22}(\varphi) — p\times p,$$

и в обозначениях $A_{11}(\varphi, h) = \dfrac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial[B_{11}(\varphi), B_{12}(\varphi)]h}{\partial\varphi}$, $A_{21}(\varphi, h) = \dfrac{\partial[B_{21}(\varphi), B_{22}(\varphi)]h}{\partial\varphi}$ перепишем матрицу (12) в виде

$$\begin{bmatrix} A_{11}(\varphi, h) & B_{11}(\varphi) & B_{12}(\varphi)\\ A_{21}(\varphi, h) & B_{21}(\varphi) & B_{22}(\varphi)\end{bmatrix}. \tag{14}$$

Обратная к (14) матрица, согласно формуле Фробениуса обращения блочных матриц [3], имеет вид

$$\begin{bmatrix} H^{-1} & -H^{-1}B_{12}B_{22}^{-1}\\ -B_{22}^{-1}[A_{21}, B_{21}]H^{-1} & B_{22}^{-1} + B_{22}^{-1}[A_{21}, B_{21}]H^{-1}B_{12}B_{22}^{-1}\end{bmatrix},$$

где $H = H(\varphi, h) = [A_{11}, B_{11}] - B_{12}B_{22}^{-1}[A_{21}, B_{21}]$.

Приведем H к двухблочному виду

$$H = [H_1, H_2] \doteq [A_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}A_{21}, B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}].$$

Тогда $H^{-1} = \operatorname{colon}(L_{11}(\varphi, h), L_{21}(\varphi, h))$, где L_{11} и L_{21} определяются по формуле обращения блочных матриц [3]

$$L_{11}(\varphi, h) = \left[H_1^*(E - H_2[H_2^*H_2]^{-1}H_2^*)H_1\right]^{-1} \times H_1^*(E - H_2[H_2^*H_2]^{-1}H_2^*),$$
$$L_{21}(\varphi, h) = \left[H_2^*(E - H_1[H_1^*H_1]^{-1}H_1^*)H_2\right]^{-1} \times H_2^*(E - H_1[H_1^*H_1]^{-1}H_1^*). \tag{15}$$

Введем обозначения

$$L_{12}(\varphi, h) = -L_{11}(\varphi, h)B_{12}(\varphi)B_{22}^{-1}(\varphi),$$
$$L_{22}(\varphi, h) = -L_{21}(\varphi, h)B_{12}(\varphi)B_{22}^{-1}(\varphi),$$
$$L_{23}(\varphi, h) = -B_{22}^{-1}(\varphi)A_{21}(\varphi, h)L_{11}(\varphi, h) - B_{22}^{-1}(\varphi)B_{21}(\varphi)L_{21}(\varphi, h),$$
$$L_{24}(\varphi, h) = B_{22}^{-1}(\varphi) + B_{22}^{-1}(\varphi)A_{21}(\varphi, h)L_{11}(\varphi, h)B_{12}(\varphi)B_{22}^{-1}(\varphi) +$$
$$+ B_{22}^{-1}(\varphi)B_{21}(\varphi)L_{21}(\varphi, h)B_{12}(\varphi)B_{22}^{-1}(\varphi)$$

и, используя их, перепишем систему (13) в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = [L_{11}(\varphi, h), L_{12}(\varphi, h)]\begin{bmatrix} X(f(\varphi) + [B_{11}(\varphi), B_{12}(\varphi)]h) \\ C[B_{21}(\varphi), B_{22}(\varphi)]h \end{bmatrix},$$
$$\frac{dh}{dt} = \begin{bmatrix} L_{21}(\varphi, h), L_{22}(\varphi, h) \\ L_{23}(\varphi, h), L_{24}(\varphi, h) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(f(\varphi) + [B_{11}(\varphi), B_{12}(\varphi)]h) \\ C[B_{21}(\varphi), B_{22}(\varphi)]h \end{bmatrix},$$

или

$$\frac{d\varphi}{dt} = L_{11}(\varphi, h)X(f(\varphi) + [B_{11}(\varphi), B_{12}(\varphi)]h) + L_{12}(\varphi, h)C[B_{21}(\varphi), B_{22}(\varphi)]h,$$
$$\frac{dh}{dt} = \begin{bmatrix} L_{21}(\varphi, h) \\ L_{23}(\varphi, h) \end{bmatrix} X(f(\varphi) + [B_{11}(\varphi), B_{12}(\varphi)]h) + \tag{16}$$
$$+ \begin{bmatrix} L_{22}(\varphi, h) \\ L_{24}(\varphi, h) \end{bmatrix} C[B_{21}(\varphi), B_{22}(\varphi)]h.$$

Учитывая инвариантность многообразия (8) для системы (7), с потоком траекторий на нем, определяемым (5), систему уравнений (16) можно переписать в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) + L_{11}(\varphi, h)\Bigg[X(f(\varphi) + [B_{11}(\varphi), B_{12}(\varphi)]h) - X(f(\varphi)) -$$
$$- \frac{\partial[B_{11}(\varphi), B_{12}(\varphi)]}{\partial\varphi} a(\varphi)h \Bigg] + L_{12}(\varphi, h)\Bigg[C[B_{21}(\varphi), B_{22}(\varphi)]h -$$
$$- \frac{\partial[B_{11}(\varphi), B_{12}(\varphi)]}{\partial\varphi} a(\varphi)h \Bigg], \tag{17}$$
$$\frac{dh}{dt} = \begin{bmatrix} L_{21}(\varphi, h) \\ L_{23}(\varphi, h) \end{bmatrix}\Bigg[X(f(\varphi) + [B_{11}(\varphi), B_{12}(\varphi)]h) - X(f(\varphi)) -$$
$$- \frac{\partial[B_{11}(\varphi), B_{12}(\varphi)]}{\partial\varphi} a(\varphi)h \Bigg] + \begin{bmatrix} L_{22}(\varphi, h) \\ L_{24}(\varphi, h) \end{bmatrix}\Bigg[C[B_{21}(\varphi), B_{22}(\varphi)]h -$$
$$- \frac{\partial[B_{21}(\varphi), B_{22}(\varphi)]}{\partial\varphi} a(\varphi)h \Bigg],$$

где $\dfrac{\partial B(\varphi)}{\partial \varphi} a(\varphi) = \sum\limits_{\nu=1}^{m} \dfrac{\partial B(\varphi)}{\partial \varphi_\nu} a_\nu(\varphi)$.

Перепишем систему уравнений (17) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi) + A(\varphi, h)h, \\ \frac{dh}{dt} &= P(\varphi, h)h. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь

$$A(\varphi, h) = L_{11}(\varphi, h)\left[\int_0^1 \frac{\partial X(f(\varphi) + \tau[B_{11}, B_{12}]h)}{\partial x} d\tau [B_{11}, B_{12}] - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial [B_{11}(\varphi), B_{12}(\varphi)]}{\partial \varphi} a(\varphi)\right] +$$
$$+ L_{12}(\varphi, h)\left[C[B_{21}(\varphi), B_{22}(\varphi)] - \frac{\partial [B_{21}(\varphi), B_{22}(\varphi)]}{\partial \varphi} a(\varphi)\right],$$

$$P(\varphi, h) = \begin{bmatrix} L_{21}(\varphi, h) \\ L_{23}(\varphi, h) \end{bmatrix}\left[\int_0^1 \frac{\partial X(f(\varphi) + \tau[B_{11}, B_{12}]h)}{\partial x} d\tau [B_{11}, B_{12}] - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial [B_{11}(\varphi), B_{12}(\varphi)]}{\partial \varphi} a(\varphi)\right] +$$
$$+ \begin{bmatrix} L_{22}(\varphi, h) \\ L_{24}(\varphi, h) \end{bmatrix}\left[C[B_{21}(\varphi), B_{22}(\varphi)] - \frac{\partial [B_{21}(\varphi), B_{22}(\varphi)]}{\partial \varphi} a(\varphi)\right].$$

2. Уравнения в вариациях и условие экспоненциальной устойчивости. Отбрасывая в правой части (17) члены порядка $\|h\|$ для φ и порядка $\|h\|^2$ для h, получаем систему уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dh}{dt} = P(\varphi)h, \tag{19}$$

где

$$P(\varphi) = \begin{bmatrix} L_{21}(\varphi, 0) \\ L_{23}(\varphi, 0) \end{bmatrix}\left[\frac{\partial X(f(\varphi))}{\partial x}[B_{11}(\varphi), B_{12}(\varphi)] - \frac{\partial [B_{11}(\varphi), B_{12}(\varphi)]}{\partial \varphi} a(\varphi)\right] +$$
$$+ \begin{bmatrix} L_{22}(\varphi, 0) \\ L_{24}(\varphi, 0) \end{bmatrix}\left[C[B_{21}(\varphi), B_{22}(\varphi)] - \frac{\partial [B_{11}(\varphi), B_{12}(\varphi)]}{\partial \varphi} a(\varphi)\right], \tag{20}$$

$L_{21}(\varphi, 0)$ определена в (15) при $H_1 = \dfrac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}$, $H_2 = B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}$, $L_{22}(\varphi, 0) = -L_{21}(\varphi, 0)B_{12}(\varphi)B_{22}^{-1}(\varphi)$, $L_{23}(\varphi, 0) = -B_{22}^{-1}(\varphi)B_{21}(\varphi)L_{21}(\varphi, 0)$, $L_{24}(\varphi, 0) = B_{22}^{-1}(\varphi) + B_{22}^{-1}(\varphi)B_{21}(\varphi)L_{21}(\varphi, 0)B_{12}(\varphi)B_{22}^{-1}(\varphi)$.

Следуя [1], будем называть систему (19), где $P(\varphi)$ определяется равенством (20), системой уравнений в вариациях инвариантного тороидального многообразия (8) системы (7).

Пусть $\varphi = \psi_t(\varphi)$, $\psi_0(\varphi) = \varphi \in \mathcal{T}_m$ — решение первого уравнения системы (19). Обозначим через $\Omega_0^t(P)$ фундаментальную матрицу решений второго уравнения системы (19), взятого при $\varphi = \psi_t(\varphi)$, удовлетворяющую условию $\Omega_0^0(P) = E$.

Система (19) непосредственно связана с системой уравнений в вариациях решения $z = z(t, z_0)$ системы (7)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial Z(g(\psi_t(\varphi)))}{\partial z} v \tag{21}$$

или в обозначениях $v = (v_1, v_2)$, $v_1 \in E^n$, $v_2 \in E^p$

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{\partial X(f(\psi_t(\varphi)))}{\partial x} v_1, \\ \frac{dv_2}{dt} &= C v_2. \end{aligned} \tag{22}$$

Поскольку функции $\dfrac{\partial g(\psi_t(\varphi))}{\partial \varphi_\nu}$, $\nu = 1, \ldots, m$ образуют линейно независимую систему решений системы в вариациях (21), то, введя вместо переменных v переменные $(k, h) = (k_1, \ldots, k_m, h_1, \ldots, h_{m+1})$ согласно формуле

$$v = \frac{\partial g(\psi_t(\varphi))}{\partial \varphi} k + B(\psi_t(\varphi)) h, \tag{23}$$

где $B(\varphi)$ из соотношения (10), и проделав необходимые преобразования, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= Q(\psi_t(\varphi)) h, \\ \frac{dh}{dt} &= P(\psi_t(\varphi)) h, \end{aligned} \tag{24}$$

где $P(\varphi)$ определена в (20). Следовательно, второе уравнение системы (19) и второе уравнение системы (24) связаны соотношением $\varphi = \psi_t(\varphi)$. Фундаментальную матрицу решений $\Omega_0^t\left(\dfrac{\partial Z}{\partial z}\right)$ системы (21), учитывая представление (22), представим в виде

$$\Omega_0^t\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right) = \begin{bmatrix} \Omega_0^t\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right) & 0 \\ 0 & e^{Ct} \end{bmatrix},$$

где $\Omega_0^t\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right)$ — фундаментальная матрица решений первого уравнения системы (22). В приведенных обозначениях, принимая во внимание вид замены (23), выполняется равенство

$$\left[\frac{\partial g(\psi_t)}{\partial \varphi}, B(\psi_t) \right] \times \begin{bmatrix} E & Q(\psi_t) \\ 0 & \Omega_0^t(P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_0^t\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right) & 0 \\ 0 & e^{Ct} \end{bmatrix} \times R, \tag{25}$$

где R — постоянная матрица, определяемая из условия выполнения равенства (25) при $t = 0$, т. е. $R = \left[\dfrac{\partial g(\psi_0)}{\partial \varphi}, B(\psi_0) \right]$. Умножая обе части тождества (25) на матрицу $L(\psi_t, 0)$ слева, получаем тождество

$$\begin{bmatrix} E & Q \\ 0 & \Omega_0^t(P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}(\psi_t, 0), \ L_{12}(\psi_t, 0) \\ L_{21}(\psi_t, 0), \ L_{22}(\psi_t, 0) \\ L_{23}(\psi_t, 0), \ L_{24}(\psi_t, 0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Omega_0^t\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right) & 0 \\ 0 & e^{Ct} \end{bmatrix} \times R =$$

$$= \begin{bmatrix} L_{11}(\psi_t, 0)\Omega_0^t\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right), \ L_{12}(\psi_t, 0)e^{Ct} \\ L_{21}(\psi_t, 0)\Omega_0^t\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right), \ L_{22}(\psi_t, 0)e^{Ct} \\ L_{23}(\psi_t, 0)\Omega_0^t\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right), \ L_{24}(\psi_t, 0)e^{Ct} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\psi_0)}{\partial \varphi}, & B_{11}(\psi_0), B_{12}(\psi_0) \\ 0 & B_{21}(\psi_0), B_{22}(\psi_0) \end{bmatrix},$$

следовательно,

$$\Omega_0^t(P) = \begin{bmatrix} L_{21}(\psi_t, 0) \\ L_{23}(\psi_t, 0) \end{bmatrix} \Omega_0^t\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) [B_{11}(\psi_0), B_{12}(\psi_0)] +$$
$$+ \begin{bmatrix} L_{22}(\psi_t, 0) \\ L_{24}(\psi_t, 0) \end{bmatrix} e^{Ct} \ [B_{21}(\psi_0), B_{22}(\psi_0)]. \tag{26}$$

Матрица $\Omega_0^t\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right)$, как фундаментальная матрица системы уравнений в вариациях, допускает представление

$$\Omega_0^t\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) = \left[\frac{\partial \bar{f}(\psi_t)}{\partial \varphi}, \tilde{\Omega}_0^t\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\right],$$

где матрица $\dfrac{\partial \bar{f}(\psi_t)}{\partial \varphi}$ получена ортогонализацией матрицы $\dfrac{\partial f(\psi_t)}{\partial \varphi}$, представима в виде $\dfrac{\partial \bar{f}(\psi_t)}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial f(\psi_t)}{\partial \varphi} \times T^{-1}(\psi_t)$. Здесь $T(\psi_t)$ — невырожденная нижнетреугольная матрица, $\tilde{\Omega}_0^t\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right)$ — матрица, состоящая из $n - m$ решений первого уравнения системы (22) линейно независимых относительно системы функций $\dfrac{\partial f(\psi_t)}{\partial \varphi_\nu}$, $\nu = 1, \ldots, m$, и принимающих при $t = 0$ единичные значения. Из (26) имеем

$$\Omega_0^t(P) = \begin{bmatrix} L_{21}(\psi_t, 0) \\ L_{23}(\psi_t, 0) \end{bmatrix} \left[\frac{\partial f(\psi_t)}{\partial \varphi} T^{-1}(\psi_t), \tilde{\Omega}_0^t\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\right] [B_{11}(\psi_0), B_{12}(\psi_0)] +$$
$$+ \begin{bmatrix} L_{22}(\psi_t, 0) \\ L_{24}(\psi_t, 0) \end{bmatrix} e^{Ct} \ [B_{21}(\psi_0), B_{22}(\psi_0)] =$$
$$= \begin{bmatrix} \left[0, L_{21}(\psi_t, 0)\tilde{\Omega}_0^t\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right)\right] B_{11}(\psi_0), & \left[0, L_{21}(\psi_t, 0)\tilde{\Omega}_0^t\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right)\right] B_{12}(\psi_0) \\ \left[0, L_{23}(\psi_t, 0)\tilde{\Omega}_0^t\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right)\right] B_{11}(\psi_0), & \left[0, L_{23}(\psi_t, 0)\tilde{\Omega}_0^t\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right)\right] B_{12}(\psi_0) \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} L_{22}(\psi_t, 0)e^{Ct}B_{21}(\psi_0), & L_{22}(\psi_t, 0)e^{Ct}B_{22}(\psi_0) \\ L_{24}(\psi_t, 0)e^{Ct}B_{21}(\psi_0), & L_{24}(\psi_t, 0)e^{Ct}B_{22}(\psi_0) \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Следуя [1], будем говорить о выполнении условия экспоненциальной устойчивости инвариантного тороидального многообразия M (8) согласно системе уравнений в вариациях (19), если

$$\left\|\Omega_0^t(P)\right\| \le Ke^{-\gamma t}, \quad t \in [0, +\infty), \tag{28}$$

где $K = \text{const} \ge 1$, $\gamma > 0$ — показатель экспоненциального притяжения.

Теорема 1. *Для выполнения условий экспоненциальной устойчивости инвариантного тороидального многообразия* M (8) *согласно системе уравнений в вариациях* (19) *с показателем* γ *достаточно выполнения неравенства*

$$\left\|\tilde{\Omega}_0^t\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\right\| \le K'e^{-\gamma t}, \quad t \in [0, +\infty], \tag{29}$$

где $K' = \text{const} \ge 1$.

Доказательство. Выбрав диагональные елементы $c_1, \ldots, c_p$ матрицы C так, чтобы $|c_j| > \gamma$, $c_j < 0$ для всех $j = 1, \ldots, p$, получим на основании ограниченности по норме матриц $L(\varphi, 0)$ и $B(\varphi)$ и представления (33)

$$\left\|\Omega_0^t(P)\right\| \le K_1 e^{-\gamma t} + K_2 e^{-\gamma t} = Ke^{-\gamma t}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Следовательно, неравенства (29) достаточно для выполнения неравенства (28).

3. О поведении траекторий динамической системы в окрестности тороидального многообразия. Как и в [4], через $\mathbb{C}^p_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{T}_m \times K_\mu)$ будем обозначать пространство функций переменных (φ, h), определенных в области $\mathrm{T}_m \times \times K_\mu$, $K_\mu = \{h : |h| \le \mu\}$, имеющих в этой области непрерывные частные производные до порядка p включительно и таких, что их p-е производные удовлетворяют по (φ, h) условию Липшица. Аналогичен смысл обозначения $\mathbb{C}^p(\mathrm{T}_m \times K_\mu)$. Следующие теоремы указывают условия, при которых существует замена переменных $\varphi \to \psi$, преобразующая систему (23) в окрестности инвариантного тороидального многообразия M в систему вида

$$\frac{d\psi}{dt} = a(\psi), \quad \frac{dh}{dt} = P(\psi, h)h.$$

Для квазипериодического случая справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть матрицы* $A(\varphi, h)$ *и* $P(\varphi, h)$ *принадлежат пространству* $\mathbb{C}^p(\mathrm{T}_m \times K_\delta)$ *при* $p \ge 1$, $a(\varphi) \equiv \lambda$ *и выполняется (29).*

Тогда можно указать такое $\mu > 0$ *и матрицу* $U(\psi, h)$, *принадлежащую пространству* $\mathbb{C}^{p-1}_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{T}_m \times K_\mu)$, *что замена переменных*

$$\varphi = \psi + U(\psi, h)h \tag{30}$$

приводит систему уравнений (23) *к виду*

$$\frac{d\psi}{dt} = \lambda,$$

$$\frac{dh}{dt} = P(\psi + U(\psi, h)h, h)h$$

для $(\psi, h) \in \mathrm{T}_m \times K_\mu$, *где* P *определена в* (24) *при* $a(\varphi) \equiv \lambda$.

Доказательство теоремы непосредственно следует из теоремы о приводимости [4] и теоремы 1.

Для общего случая обозначим через $\Omega_0^t\left(\frac{\partial a}{\partial \varphi}\right)$ фундаментальную матрицу решений второго уравнения системы

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial a(\varphi)}{\partial \varphi}\theta,$$

взятого при $\varphi = \psi_t(\varphi)$, удовлетворяющую условию $\Omega_0^0\left(\frac{\partial a}{\partial \varphi}\right) = E$, и потребуем выполнения неравенства

$$\left\|\Omega_0^t\left(\frac{\partial a}{\partial \varphi}\right)\right\| \le K e^{\alpha t}, \quad t \in [0, +\infty], \tag{31}$$

где $K = \text{const} \ge 1$, $\alpha = \text{const} > 0$.

Теорема 3. *Пусть матрицы $A(\varphi, h)$ и $P(\varphi, h)$ принадлежат пространству $\mathbb{C}^p(\mathrm{T}_m \times K_\delta)$ при $p \ge 1$, $a(\varphi)$ принадлежит $\mathbb{C}^p(\mathrm{T}_m)$, выполняется неравенство* (29) *с постоянной γ, выполняется неравенство* (31) *с постоянной α, и для некоторого l, $p \ge l \ge 1$, выполняется условие $\gamma/\alpha > l$.*

Тогда можно указать такое $\mu > 0$ и матрицу $U(\varphi, h)$, принадлежащую пространству $\mathbb{C}_{\mathrm{Lip}}^{p-1}(\mathrm{T}_m \times K_\mu)$, что замена переменных (30) *приводит систему уравнений* (23) *к виду*

$$\frac{d\psi}{dt} = a(\psi),$$

$$\frac{dh}{dt} = P(\psi + U(\psi, h)h, h)h$$

для $(\psi, h) \in \mathrm{T}_m \times K_\mu$, $P(\varphi, h)$ определена в (24).

Доказательство теоремы непосредственно следует из теоремы о приводимости [5] и теоремы 1, гарантирующей экспоненциальную устойчивость фундаментальной матрицы системы уравнений в вариациях.

Приведенные теоремы позволяют определить характер поведения решений системы (1), начинающихся в окрестности многообразия M (2), следующим образом.

Теорема 4. *Пусть для системы* (1) *выполняются условия гладкости правой части $X(x) \in \mathbb{C}^r(E^n)$ и квазипериодического решения* (2) $x = f(\lambda t + \varphi_0) \in \mathbb{C}^s(\lambda)$, $2 \le s \le r$. *Предположим, что решения системы уравнений в вариациях, соответствующей решению $x = f(\lambda t + \varphi_0)$, удовлетворяют неравенству* (29).

Тогда можно указать достаточно малое $\delta > 0$ такое, что для каждого x_0, удовлетворяющего неравенству

$$\rho(x_0, M) = \inf\|x_0 - x\| \le \delta, \tag{32}$$

найдутся значения $\varphi_0 \in \mathrm{T}_m$ и $\psi_0 \in \mathrm{T}_m$ такие, что решение $x = x(t, x_0)$ системы (1) *удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t, x_0) - f(\psi_t(\varphi_0))\| \le K_1 e^{-\gamma_1 t}\|x_0 - f(\varphi_0)\| \tag{33}$$

для всех $t \in R^+$ и некоторых $K_1 > 0$, $\gamma_1 > 0$, где $\gamma_1 = \gamma_1(\delta) \to \gamma$ при $\delta \to 0$, $\|\psi_0 - \varphi_0\| \to 0$ при $\delta \to 0$.

Доказательство. Расширим систему уравнений (1) до системы (8) и введением локальных координат приведем последнюю к виду (23). При условиях теоремы справедлива теорема 2 с $p = r - 1$, и дальнейшее доказательство следует из теоремы 4 [4] о притяжении решений, начинающихся в малой окрестности многообразия M, к соответствующим решениям, начинающимся на M, по экспоненциальному закону, и справедливости неравенств

$$\| x(t, x_0) - f(\psi_t(\psi_0)) \| \leq \| z(t, z_0) - g(\psi_t(\psi_0)) \| \leq$$

$$\leq K_1 e^{-\gamma_1 t} \| z_0 - g(\varphi_0) \| = K_1 e^{-\gamma_1 t} \| x_0 - f(\varphi_0) \|,$$

где $z_0 = (x_0, 0)$.

Отметим, что при выполнении условий теоремы 4 справедливо утверждение об устойчивости по Ляпунову квазипериодических решений $x = f(\lambda t + \psi)$, $\psi \in$ $\in T_m$, что доказывается аналогично доказательству следствия 1 теоремы 4 из [4].

Теорема 5. *Пусть выполняются приведенные выше условия гладкости функции $X(x)$ и система уравнений* (1) *имеет инвариантное тороидальное многообразие M* (2), *s раз непрерывно дифференцируемое при $r \geq s \geq 2$. Предположим, что решения системы уравнений в вариациях многообразия M удовлетворяют неравенству* (29), *выполняется неравенство* (31) *с постоянной α, для некоторого l, $p \geq l \geq 1$, выполняется условие $\gamma / \alpha > l$.*

Тогда можно указать достаточно малое $\delta > 0$ такое, что для каждого x_0, удовлетворяющего неравенству (32), *найдутся значения $\varphi_0 \in T_m$ и $\psi_0 \in T_m$ такие, что решение $x = x(t, x_0)$ системы* (1) *удовлетворяет неравенству* (33) *для всех $t \in R^+$ и некоторых $K_1 > 0$, $\gamma_1 > 0$, где $\gamma_1 = \gamma_1(\delta) \to \gamma$ при $\delta \to 0$, $\| \psi_0 - \varphi_0 \| \to 0$ при $\delta \to 0$.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы с использованием теоремы 3 и теоремы 2 из [5].

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 303 с.
2. *Самойленко А. М.* Квазипериодические решения систем линейных алгебраических уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 5 – 26.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
4. *Самойленко А. М.* Исследование динамической системы в окрестности квазипериодической траектории. – Киев, 1990. – 43 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90. 35).
5. *Самойленко А. М.* Исследование динамической системы в окрестности инвариантного тороидального многообразия // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 4. – С. 530 – 537.

Получено 25.11.93