УДК 517.54

Д. Д. Илмурадов, асп. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

РЕШЕНИЕ КАТЕГОРНОЙ ЗАДАЧИ Н. Н. ЛУЗИНА О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРИМИТИВНОЙ ФУНКЦИИ

N. N. Lusin's problem of existence of a primitive function is considered. A more precise form of E. M. Landice's solution of this problem is obtained.

Розглядається задача Н. Н. Лузіна про існування примітивної функції і уточнюється формулювання розв'язку Є. М. Ландіса цієї задачі.

Задача нахождения примитивных функций формулируется следующим образом: найти функцию $\Phi(x)$, имеющую данную функцию $f(x)$ своей производной.

Впервые Коши решил эту задачу для непрерывной функции. Однако его метод решения оказался недостаточным для случая, когда функция $f(x)$ разрывна или неограничена. Поэтому появился ряд работ, позволяющих определять примитивную функцию для более широкого класса задаваемых функций $f(x)$.

Данную задачу Н. Н. Лузин ставил следующим образом:

1. Найти необходимые и достаточные условия, чтобы $f(x)$ имела примитивную функцию.

2. Зная, что этим условиям удовлетворяет $f(x)$, найти примитивную функцию.

Решение задачи 1 Н. Н. Лузин нашел в следующем виде: для того чтобы функция $f(x)$ имела примитивную, необходимо, чтобы $f(x)$ была измеримой функцией, конечной почти всюду на $[a, b]$. Он доказал, что эти условия были и достаточными для существования примитивной.

Задачи 1 и 2 были решены в [1] для случая множества полной меры. Но это множество в общем случае оказывается множеством первой категории. Н. Н. Лузиным был поставлен вопрос: существует ли $\Phi(x)$, имеющая $f(x)$ своей производной в точках множества второй категории (хотя бы меры нуль)? Решение этого вопроса принадлежит Е. М. Ландису, который сформулировал его в виде двух следующих теорем [1].

Теорема А. *Функция $f(x)$, являющаяся производной непрерывной функции $F(x)$ на множестве E второй категории, необходимо измерима по отношению к свойству Бэра.*

Теорема Б. *Пусть $f(x)$ — функция, заданная на отрезке $[0, 1]$, измеримая по отношению к свойству Бэра. Тогда существуют такие непрерывная функция $F(x)$ и множество $E \subset [0, 1]$ второй категории, что $f(x) = F'(x)$ при $x \in E$.*

Мы приведем решение указанного вопроса в других терминах, одновременно уточнив и саму формулировку.

Пусть $\Phi(x)$ — некоторая непрерывная функция на $[a, b]$. Число A назовем *производным числом* функции $\Phi(x)$ в точке $x \in [a, b]$, если существует последовательность $h_n \to 0$, такая, что

$$\frac{\Phi(x + h_n) - \Phi(x)}{h_n} \to A.$$

Множество всех производных чисел $\Phi(x)$ в точке x обозначим через $\mathfrak{M}_x$.

Теорема. *Для того чтобы $f(x)$ была производной некоторой непрерывной функции $\Phi(x)$ на множестве второй категории, необходимо и достаточно, чтобы на некотором множестве E второй категории ограничение $f|_E$ было* *непрерывным. При этом если такая $f(x)$ задана, то функцию $\Phi(x)$ можно предположить AC-функцией.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\Phi'(x)=f(x)$ на множестве $E_1 \subset \subset [a,b]$ второй категории. Рассмотрим многозначное отображение $x \to \mathfrak{m}_x$; по обобщенной теореме Бэра существует множество $E_2 \subset [a,b]$ второй категории точек полунепрерывности сверху этого отображения [2]. Так как на множестве $E=E_1 \cap E_2 \subset [a,b]$, также второй категории, функция $\Phi(x)$ имеет производную $\Phi'(x)=f(x)$ $(\equiv \mathfrak{m}_x)$, то отсюда и следует, что функция $f|_E$ непрерывна.

Доказательство *достаточности* мы сведем к нескольким леммам.

Лемма 1. *Пусть $f(x)=+\infty$ на некотором множестве второй категории (меры нуль) в $[a,b]$. Тогда существует AC-функция $\Phi(x)$, для которой $\Phi'(x)=f(x)$ также на множестве второй категории (меры нуль).*

Доказательство. Возьмем произвольное множество M, плотное на $[a,b]$ типа G_δ и меры нуль; это множество второй категории на $[a,b]$. Имеем $M = \prod_n G_n$, где G_n — открытое множество, $G_{n+1} \subset G_n$, и $\operatorname{mes} G_n < 1/2^n$. Положим $\varphi(x)=n$ на $G_n - G_{n+1}$, $\varphi(x)=0$ вне G_1, $\varphi(x)=+\infty$ на $\prod_n G_n$. Функция $\varphi(x)$ суммируема. Действительно, $\{\varphi(x)$ суммируема$\} \Leftrightarrow \{\sum n \operatorname{mes}\{\varphi \geq \geq n\}$ — сходится$\}$. В самом деле, $\{\varphi(x) \geq n\} = \bigcup_{m>n}\{\varphi \geq m\} < 1/2^n + 1/2^{n+1} + \ldots = 1/2^{n-1}$, ряд $\sum n/2^{n-1} < \infty$ сходится и отсюда следует суммируемость функции $\varphi(x)$. Положим далее

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(x)\,dx.$$

Из суммируемости $\varphi(x)$ вытекает, что $\Phi(x)$ есть AC-функция. Каждая точка $x \in M$ является внутренней точкой для множества $\underset{x}{E}[\varphi(x)>n]$ при любом n и, следовательно, для этих точек существует $\Phi'(x)$ и равна $+\infty$.

Ограничение $\Phi'|_M$ есть константа, равная $+\infty$, а потому в обобщенном смысле — непрерывно. Нетрудно, однако, показать, что в точках множества M имеет место непрерывность многозначного отображения $x \to \mathfrak{m}_x$ относительно всего отрезка $[a,b]$. Очевидно, что в точках множества $M \cap \underset{x}{E}\{f(x)=\infty\}$ второй категории на $[a,b]$ также $\Phi'=+\infty=f(x)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $f(x)$ — измеримая и ограниченная функция на $[a,b]$ и непрерывная в точках множества $E \subset [a,b]$ второй категории. Тогда существует непрерывная функция $\Phi(x)$ такая, что $\Phi'(x)=f(x)$ на множестве E.*

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Из непрерывности $f(x)$ на E легко следует, что в каждой точке $x \in E$ имеем $\Phi'(x)=f(x)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Какова бы ни была AC-функция $\Phi(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, всегда существует на этом отрезке другая AC-функция $\Phi_0(x)$, характеризующаяся следующими свойствами:*

1) $\Phi_0'(x)=0$ *на множестве $M \subset [a,b]$ второй категории;*

2) $\Phi_0(a)=\Phi(a)$ *и* $\Phi_0(b)=\Phi(b)$;

3) $|\Phi(x)-\Phi_0(x)|<\varepsilon$ *на* $[a,b]$, *где* $\varepsilon>0$ — *сколь угодно малая величина.*

Доказательство. Рассмотрим сначала на отрезке $[0,1]$ функцию $\theta(x)$ меры и некоторого нигде не плотного на $[0,1]$ совершенного множества p положительной меры в каждой своей порции:

$$\theta(x) = \int_0^x C_p(t)dt = \text{mes}\,\{p\cap[0,x]\},$$

где $C_p(x)$ — характеристическая функция множества p.

Монотонная функция $\theta(x)$ удовлетворяет условию Липшица и $\theta'(x)=0$ на дополнении к p. Это открытое множество является множеством всюду второй категории на $[0,1]$.

Разделим отрезок $[a,b]$ точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ таким образом, чтобы на каждом отрезке $[x_{k-1},x_k]$ колебание функции $\Phi(x)$ было меньше чем $\varepsilon/2$. Далее на каждом отрезке $[x_{k-1},x_k]$ определим AC-функцию $\Phi_0(x)$. Тогда получим

$$\Phi_0(x) = [\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})]\,\theta((x-x_{k-1})/(x_k-x_{k-1}))+\Phi(x_{k-1}). \qquad (1)$$

Из выполнимости $\theta'(x)=0$ на множестве второй категории и выполняется $\Phi_0'(x)=0$ на том же множестве. Значит, свойство выполняется для $\Phi_0(x)$. Из (1) видно, что в концах каждого отрезка $[x_{k-1},x_k]$ выполняются и условия $\Phi_0(x_{k-1})=\Phi(x_{k-1})$ и $\Phi(x_k)=\Phi(x_k)$. Тогда легко видеть выполнимость свойства 2.

Пусть $x\in[a,b]$ — произвольная точка. Тогда найдется отрезок $[x_{k-1},x_k]$, содержащий эту точку. Учитывая монотонность функции $\Phi_0(x)$, получаем

$$\left|\Phi(x)-\Phi_0(x)\right| = \left|\Phi(x)-\Phi(x)+\Phi(x_k)-\Phi(x_k)+\Phi_0(x_k)-\Phi_0(x_k)\right| \le$$

$$\le \left|\Phi(x)-\Phi(x_k)\right| + \left|\Phi_0(x)-\Phi_0(x_k)\right| + \left|\Phi(x_k)-\Phi_0(x_k)\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+0 = \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\Psi(x)$ — AC-*функция на* $[a,b]$ *и* $\Psi'(x)=f(x)$ *на множестве второй категории. Тогда существует* AC-*функция* $\Phi(x)$ *на* $[a,b]$, *имеющая следующие свойства:*

1) $\Phi(a)=\Phi(b)=0$; 2) $|\Phi(x)|\le b-a$; 3) $\Phi'(x)=f(x)$ *на множестве второй категории.*

Доказательство. Возьмем функцию $\Phi(x)=\Psi(x)-\Phi_0(x)$, где $\Phi_0(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям леммы 3.

1. Согласно лемме 3 $\Phi_0(a)=\Psi(a)$ и $\Phi_0(b)=\Psi(b)$, тогда $\Phi_0(a)=\Psi(a)-$ $-\Phi_0(a)=0$; $\Phi_0(b)=\Psi(b)-\Phi_0(b)$.

2. $|\Phi(x)|=|\Psi(x)-\Phi_0(b)|<\varepsilon$, поэтому $|\Phi(x)|\le b-a$.

Так как в лемме 3 число $\varepsilon>0$ произвольно, то здесь мы можем взять его равным $(b-a)$; тем самым выполним условие 2 леммы.

3. Согласно условию леммы равенство $\Psi'(x)=f(x)$ выполняется на некотором множестве $M_1\subset[a,b]$ второй категории. С другой стороны, функция $\Phi_0(x)$ имеет нулевую производную на открытом плотном множестве M_2 на том же отрезке $[a,b]$. Тогда на множестве $M=M_1\cap M_2$ (также второй категории) будем иметь $\Psi'(x)=f(x)$, $\Phi_0'(x)=0$ и потому $\Phi'(x)=\Psi'(x)-\Phi_0'(x)=$ $=f(x)$ на M. Лемма доказана.

Напомним теперь, что по условию теоремы $f|_E$ непрерывно на множестве E второй категории. Тогда каждое из множеств $E_{+\infty} = \underset{x}{E}\,[f = +\infty]$, $E_{-\infty} = \underset{x}{E}\,[f = -\infty]$ замкнуто в E. Поэтому существует система G_1 непересекающихся интервалов, образующих всюду плотное на $[a, b]$ открытое множество, на каждом из которых множество $E_{+\infty}$ либо совпадает с некоторой порцией множества E, либо нигде не плотно. Аналогично вводим систему G_2 для $E_{-\infty}$.

Рассмотрим открытое множество $G = G_1 \cap G_2$. Соберем все составляющие интервалы из G, в которых либо $E_{+\infty}$, либо $E_{-\infty}$. Тогда по лемме 1 в каждом из этих интервалов мы можем построить AC-функцию $\Phi(x)$, которая в точках множества второй категории имеет производную $\Phi'(x) = \pm\infty$ $(= f(x))$.

Возьмем теперь произвольный интервал из оставшихся интервалов, принадлежащий G; обозначим его через (α, β). Ясно, что оба множества $E_{\pm\infty} \cap (\alpha, \beta)$ нигде не плотны на (α, β). По нашему условию, ограничение $f|_{E\cap(\alpha,\beta)}$ непрерывно и $E \cap (\alpha, \beta)$ — множество второй категории на (α, β). Поэтому и множество $E_{\alpha\beta} = E \cap (\alpha, \beta) \setminus E_{\pm\infty}$ также второй категории на (α, β). Тогда и подавно функция $f|_{E_{\alpha\beta}}$ непрерывна (и конечна). Обозначим $\varphi = f|_{E_{\alpha\beta}}$; рассмотрим график $B = B(\varphi; E_{\alpha\beta})$ и его замыкание B относительно произведения $[\alpha, \beta] \times \overline{\mathbb{R}}$, где $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Очевидно, что $\mathrm{np}_x B = [\alpha, \beta]$. Определим функцию $\psi(x')$, $x \in [\alpha, \beta]$ как самую верхнюю точку пересечения вертикали $\overline{\mathbb{R}} = [(x, y): x = x'; -\infty \le y \le +\infty]$ с B. Легко видеть, что $\psi(x) = \varlimsup\limits_{\substack{x' \to x \\ x' \in E_{\alpha\beta}}} \varphi(x')$. Из определения следует, что $\psi(x)$ полунепрерывна сверху: в точках, где $\psi(x) = \pm\infty$, это означает просто непрерывность (в обобщенном смысле).

Лемма 5. *Функция $\psi(x)$ непрерывна в точках множества $E_{\alpha\beta}$, причем*

$$\psi(x)|_{E_{\alpha\beta}} = \varphi(= f|_{E_{\alpha\beta}}).$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in E$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in E$ найдется окрестность $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ такая, что для всех $x \in U_\delta(x_0) \cap E_{\alpha\beta}$

$$|\varphi(x') - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Это означает, что часть графика функции $\varphi = f|_{E_{\alpha\beta}}$ над окрестностью $U_\delta(x_0)$ лежит в прямоугольнике $U_\delta(x_0) \times [\varphi(x_0) - \varepsilon;\ \varphi(x_0) + \varepsilon]$; ясно, что замыкание этой части графика также принадлежит этому прямоугольнику. А это означает непрерывность функции $\psi(x)$ в точке $x_0 \in E_{\alpha\beta}$. Из непрерывности $\psi(x)$ на $E_{\alpha\beta}$ следует $\psi|_{E_{\alpha\beta}} = \varphi(= f|_{E_{\alpha\beta}})$. Лемма доказана.

Введем множества $E_n = \{n \le \psi \le n + 1\}$, $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$; поскольку $\psi(x)$ полунепрерывна сверху, то E_n — пересечение замкнутого множества $\{n \le \psi\}$ с открытым $\{\psi < n + 1\}$, т. е. оно типа $F \cap G$ (F обозначает замкнутое множество, G — открытое). Так как $\psi|_{E_{\alpha\beta}}$ — конечная функция, то

$$E_{\alpha\beta} = \bigcup_n \left(E_n \cap E_{\alpha\beta}\right).$$

Из этого равенства следует существование плотной на (α, β) системы непересекающихся интервалов $\{(\alpha_m, \beta_m)\}$, в каждом из которых одно из E_n плотно; так как оно типа $F \cap G$, то пересечение $e_m = E_n \cap E_{\alpha\beta}$ — второй категории на (α_m, β_m). Согласно лемме 2 строим AC-функцию $\Phi_{\alpha\beta}(x)$, для которой $\Phi_m(x) = f(x)$ на e_m. Согласно лемме 4 существует AC-функция $\Phi_{\alpha\beta}(x)$ на всем отрезке $[\alpha, \beta]$ такая, что на множестве второй категории $\Phi_{\alpha\beta}(x) = f(x)$. Причем на каждом из интервалов (α_m, β_m) функция $\Phi_{\alpha\beta}(x)$ является AC-функцией, а на нигде не плотном множестве — дополнении к $\{(\alpha_m, \beta_m)\}$ — она равна нулю; но тогда функция $\Phi(x)$ — ACG_*-функция на $[\alpha, \beta]$. Интервал (α, β) был частью плотной на (a, b) системы интервалов, где $E_{\pm\infty}$ нигде не плотны. Снова применяя лемму 4, находим AC-функцию $\Phi(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, для которой $\Phi'(x) = f(x)$ на множестве второй категории в $[a, b]$ и которая также является ACG_*-функцией (обозначения см. в [3, с. 333]). Для завершения доказательства теоремы докажем следующую лемму.

Лемма 6. *Пусть $\varphi(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, — непрерывная, ограниченной вариации функция (VB-функция). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется открытое всюду плотное на $[a, b]$ множество $G = \{(a_k, b_k)\}$ такое, что сумма вариаций на всех интервалах (a_k, b_k) меньше ε: $\sum_k \overset{b_k}{\underset{a_k}{V}} \varphi < \varepsilon$.*

Доказательство. Сначала предположим, что $\varphi(x)$ монотонна; в этом случае лемма доказывается легко. Пусть m и M — соответственно минимальное и максимальное значения функции $\varphi(x)$ на $[a, b]$. Выберем на отрезке $[m, M]$ произвольное открытое всюду плотное мнножество, мера которого меньше ε. Прообраз этого множества на $[a, b]$ есть также всюду плотное открытое множество $G = \{(a_k, b_k)\}$. Очевидно, что

$$\sum_k \overset{b_k}{\underset{a_k}{V}} \varphi < \varepsilon.$$

Пусть теперь, $\varphi(x)$ — произвольная VB-функцня. Тогда ее можно представить в виде разности двух непрерывных возрастающих функций. Из доказанного нами выше и из соотношений

$$1)\ \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}(f \pm g) \le \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} f \pm \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} g;$$

$$2)\ (\alpha, \beta) \supset \bigcup_k^{\infty} (\alpha_k, \beta_k) \Leftrightarrow \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} f \ge \sum_k \overset{\beta_k}{\underset{\alpha_k}{V}} f$$

легко следует утверждение леммы 6.

В самом деле, пусть $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$; для каждой из этих функций и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется открытое всюду плотное на $[a, b]$ множество $G_1 = \{(\alpha_k, \beta_k)\}$ или $G_2 = \{(\alpha_l, \beta_l)\}$ соответственно такое, что сумма вариаций φ_1 и φ_2 на всех интервалах множеств G_1 и G_2 меньше чем $\varepsilon \backslash 2$, т. е.

$$\sum_k \overset{\beta_k}{\underset{\alpha_k}{V}} \varphi_1 < \varepsilon \backslash 2 \quad \text{и} \quad \sum_k \overset{\beta_k}{\underset{\alpha_k}{V}} \varphi_2 < \varepsilon \backslash 2.$$

Рассмотрим пересечение $G = G_1 \cap G_2$. Множество интервалов из $G_1 \cap G_2$, принадлежащих (α, β), образует в нем открытое плотное множество $\{(\alpha_q, \beta_q)\}$. Тогда

$$\overset{\beta_q}{\underset{\alpha_q}{V}} \varphi \le \overset{\beta_q}{\underset{\alpha_q}{V}} \varphi_1 + \overset{\beta_q}{\underset{\alpha_q}{V}} \varphi_2$$

и

$$\sum_{(\alpha,\beta)\subset G_1 q} \sum_q \overset{\beta_q}{\underset{\alpha_q}{V}} \varphi \le \left(\sum_q \overset{\beta_q}{\underset{\alpha_q}{V}} \varphi_1 + \sum_q \overset{\beta_q}{\underset{\alpha_q}{V}} \varphi_2 \right) < \varepsilon,$$

где $\sum_{(\alpha,\beta)\subset G_1}$ понимается как подобное суммирование по всем интервалам (α, β), принадлежащим G_1. Отсюда следует $\sum_k \overset{\beta_\kappa}{\underset{\alpha_\kappa}{V}} \varphi < \varepsilon$. Лемма доказана.

Мы уже доказали, что существует ACG_*-функция $\Phi(x)$, для которой $\Phi'(x) = f(x)$ на множестве второй категории. При этом имеется открытое всюду плотное на $[a, b]$ множество $G = \{(\alpha_k, \beta_k)\}$, в каждом интервале которого $\Phi(x)$ есть AC-функция (и $\Phi(a_k) = \Phi(b_k) = 0$). Построим теперь новую функцию $\Phi_0(x)$, которая на всем отрезке $[a, b]$ является абсолютно непрерывной и для которой $\Phi_0'(x) = f(x)$ также на множестве второй категории. Для этого выберем произвольный интервал $(a_k, b_k) \subset G$. Согласно лемме 6 найдем всюду плотную на (a_k, b_k) систему интервалов $\left\{\left(\alpha_m^{(k)}, \beta_m^{(k)}\right)\right\}$ таких, что

$$\sum_m \overset{\beta_m^{(k)}}{\underset{\alpha_m^{(k)}}{V}} \Phi \le b_k - a_k.$$

Тогда согласно лемме 4 найдется монотонная AC-функция $\tilde{\Phi}(x)$ такая, что

$$\sum_k \overset{\beta_m^{(k)}}{\underset{\alpha_m^{(k)}}{V}} \left(\Phi(x) - \tilde{\Phi}(x)\right) \le 2(b_k - a_k).$$

Значит,

$$\sum_k \sum_m \overset{\beta_m^{(k)}}{\underset{\alpha_m^{(k)}}{V}} \left(\Phi(x) - \tilde{\Phi}(x)\right) \le \sum_k 2(b_k - a_k) = 2(b-a).$$

Далее, обозначая $\Phi_0(x) = \Phi(x) - \tilde{\Phi}(x)$, получаем

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} \Phi_0(x) \le 2(b-a).$$

Отсюда следует, что $\Phi_0(x)$ — AC-функция, и $\Phi_0'(x) = f(x)$ на множестве второй категории. Теорема доказана.

1. *Лузин Н. Н.* Интеграл и тригонометрический ряд. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – 545 с.
2. *Горленко С. В.* Обобщение теоремы о точках непрерывности производной и его приложение в теории аналитических функций // Десятая мат. школа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. – С. 260 – 269.
3. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 494 с.

Получено 15.07.92