УДК 517.948:513.77

Н. В. Беличкова

Условие карлемановости одного вырождающегося дифференциального оператора второго порядка

Под вырождающимся эллиптическим дифференциальным оператором понимается оператор с неотрицательной характеристической формой. В работах [1, 2] в случае слабого вырождения эллиптического оператора установлено, что достаточно большие степени его резольвенты являются интегральными операторами и, в частности, операторами Гильберта — Шмидта. Результаты работ [1, 2] получены для пространства функций $L_2(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область, причем в методике работы [1] существенно используется ограниченность области G, тогда как методика работы [2] может быть перенесена на случай неограниченных областей с сохранением результатов.

В данной работе устанавливается карлемановость сильно вырождающегося эллиптического оператора.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, дифференциальное выражение

$$(\mathcal{L}u)(x) = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\alpha^2(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)(x) + \beta(x)\,u(x), \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \tag{1}$$

где $\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\beta(x) = \alpha^2(x) - \alpha(x)\Delta\alpha(x) + q(x)$ — вещественные функции ($|\alpha(x)| \geqslant 0$). Пусть A — минимальный оператор, порожденный выражением (1) в пространстве $L_2(\mathbb{R}^N)$.

Основной результат работы следующий.

Теорема. *Если вещественные функции $\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $q(x) \in L_2(\mathbb{R}^N)$ такие, что минимальный оператор, порожденный выражением $(\mathcal{M}u)(x) = \mathcal{L}u - q(x)\,u$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, самосопряжен, $\alpha^{-1}(x) \in L_2(\mathbb{R}^N)$, $q(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, то оператор A карлемановский.*

Наметим путь доказательства теоремы.

Пусть R_z — резольвента оператора Лапласа $-\Delta$; $R_1 = R$. На множестве $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ рассмотрим тождество

$$(-\Delta + I)R = I. \tag{2}$$

Так как $I = \alpha I \alpha^{-1}$, то в силу (2) имеем

$$(-\alpha\Delta\alpha + \alpha^2)\,\alpha^{-1}R\alpha^{-1} = I. \tag{3}$$

Соотношение (3) также рассмотрим на $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Обозначим $B = \alpha^{-1}R\alpha^{-1}$. Тогда если A_1^{-1} — обратный оператор к оператору A_1, минимальному оператору, порожденному в $L_2(\mathbb{R}^N)$ выражением $(\mathcal{M}u)(x)$, то $A_1 \restriction C_0^\infty(\mathbb{R}^N) = B$ в силу (3). Как известно, оператор R интегральный и его ядро

$$R(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\,\frac{1}{|x-y|^{N/2-1}}\,K_{N/2-1}(|x-y|), \tag{4}$$

где $K_{N/2-1}(|x-y|)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента (см. [3], гл. VI, § 2). Поскольку оператор R интегральный, то оператор B также интегральный и его ядро $K(x, y) = \alpha^{-1}(x)\,R(x, y)\,\alpha^{-1}(y)$.

В силу равенства (4), очевидно, можно получить следующие оценки:

$$|K(x, y)| \leqslant \frac{C_1}{|\alpha(x)|\,|\alpha(y)|}\,\frac{e^{-\frac{1}{2}|x-y|}}{|x-y|^{N-2}}, \quad N \geqslant 3, \tag{5}$$

$$|K(x, y)| \leqslant \frac{C_2}{|\alpha(x)|\,|\alpha(y)|}\,\frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|^{1/2}}, \quad N = 2. \tag{6}$$

Обозначим $K_1(x, y) = K(x, y)$ — ядро оператора B, $K_2(x, y) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} K_1(x, \eta) \times$
$\times K_1(\eta, y)\, d\eta$ — ядро оператора B^2 и т. д.

Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Пусть $N \geqslant 3$, и выполнены все условия теоремы на функцию $\alpha(x)$. Тогда для ядер $K_m(x, y)$ операторов B^m справедлива оценка*

$$|K_m(x, y)| \leqslant \frac{C_m}{|\alpha(x)|\,|\alpha(y)|} \frac{e^{-B_m|x-y|}}{|x-y|^{s_m}},$$

где $m = 2^n$, $s_m = N - 2^n - 1$, $B_m = B/6^n$, $B = 1/2$, $n = 1, 2, \ldots$.

Для доказательства леммы использован подход, предложенный в [4, с. 244]. С учетом (5) проводится непосредственная оценка ядер $K_m(x, y)$.

Доказательство теоремы основано на том, что для $m = 2^n$, $n \geqslant$
$\geqslant \left[\dfrac{\ln \frac{1}{2}(N-1)}{\ln 2}\right] + 1$, $N \geqslant 3$, и $m = 2$, $N = 2$, операторы B^m являются операторами Гильберта — Шмидта. Так, оператор A_1 неотрицательный и самосопряженный, таким же является минимальный оператор C, порожденный в пространстве $L_2(\mathbb{R}^N)$ выражением $(\mathcal{M}_1 u)(x) = -\alpha(x)\Delta\alpha(x)\, u + \alpha^2(x) u + u$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Для любого $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $(A_1^n f, f)_{L_2(\mathbb{R}^N)} \leqslant (C^n f, f)_{L_2(\mathbb{R}^N)}$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Пусть $B^{\sim}$ — замыкание B. Поскольку $B^{\sim} = A_1^{-1}$, то имеем $(B^m)^{\sim} = A_1^{-m}$. Следовательно, оператор A_1^{-m} ограниченный. Тогда из последнего неравенства и леммы 5.4 [5] следует неравенство $C^{-m} \leqslant A_1^{-m}$, которое означает, что оператор C^{-m} есть оператор Гильберта — Шмидта, поскольку таковым является оператор A_1^{-m}. На основании изложенного так как $C = A_1 + I$ и A_1 самосопряженный, можно утверждать, что A_1 карлемановский. Далее, поскольку оператор A_1 неотрицательный самосопряженный, полугруппа $e^{-A_1 t}$ сжимающая в $L_\infty(\mathbb{R}^N)$, потенциал $q(x) \in L_2(\mathbb{R}^N)$, $q(x) \geqslant 0$, то по теореме 1.3 [6] оператор A самосопряженный. Очевидно, A_1 и q удовлетворяют требованиям теоремы 5.7 [5], следовательно, оператор A карлемановский.

Заметим, что требования к гладкости $\alpha(x)$ можно ослабить.

1. *Tribel H.* Eigenwertverteilungen und greensche funktionen entarteter elliptisher differentialoperatoren // Czech. Math. J.— 1968.— N 18.— P. 117—136.
2. *Murthy M. K. V., Stampacchia G.* Boundary value problems for some degenerate — elliptic operators // Ann. mat. pura ed appl.— 1968.— **80**.— P. 1—122.
3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.
4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М. : Физматгиз, 1958.— 263 с.
5. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.
6. *Березанский Ю. М., Самойленко В. Г.* Самосопряженность дифференциальных операторов с конечным и бесконечным числом переменных и эволюционные уравнения // Успехи мат. наук.— 1981.— **36**, № 5.— С. 3—56.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 10.07.85,
после доработки — 16.12.85