1. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания.— М. : Наука, 1966.— 431 с.
2. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. — М. : Наука, 1979.— 415 с.
3. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу.— М. : Мир, 1979. 587 с.
4. *Schäfer E.* Fehlerabschätzungen für Eigenwert näherungen nach der Ersatzkernmethode bei Integralgleichungen // Numer. Math.— 1979.— **32**, N 3.— S. 281—290.
5. *Вайникко Г. М.* Оценки погрешности метода Бубнова—Галеркина в проблеме собственных значений // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1965.— **5**, № 4.— С. 587—607.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 06.12.85,
после доработки — 05.03.86

УДК 513.83

В. В. Попов

О числе Линделёфа пространства подалгебр в очановских топологиях

Пусть (X, Ω) — алгебра. Обозначим через $\mathrm{Sub}\ X$ и $\mathrm{Sub}_f\ X$ соответственно множество всех и множество всех конечнопорожденных подалгебр алгебры X. Для случая, когда Ω — сигнатура группы, эти множества изучались в широком спектре топологий [1—3]. В данной статье они наделяются очановскими топологиями ($(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-топологиями).

Определение [4]. *Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и Z — три семейства подмножеств некоторого множества X. $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-топологией на Z называем топологию с предбазой $\sigma = \{[A, B]\colon A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}\}$, где $[A, B] = \{F \in Z\colon A \subset F \subset X \setminus B\}$.*

Впервые подобные топологии на пространстве замкнутых подмножеств топологического пространства рассмотрел Ю. С. Очан [5]. Свойства пространства $\exp X$ всех замкнутых (в некоторой топологии на X) подмножеств X и пространства $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X исследовались в [6, 7]. Считаем в дальнейшем, что носитель каждой подалгебры — непустое множество; через $\langle S \rangle$ обозначим подалгебру, порожденную множеством $S \subset X$.

Ограничиваясь изучением хаусдорфовых топологий на $\mathcal{P}(X)$ и его подмножествах, считаем, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ содержат семейство $C_0(X)$ всех конечных подмножеств X. В этом случае $\mathcal{P}(X)$ вполне регулярно и нульмерно (в смысле ind). Число Линделефа пространства Y — это наименьший кардинал τ такой, что из всякого покрытия пространства Y открытыми множествами можно выделить подпокрытие мощности $\leqslant \tau$. Обозначим через ω первый бесконечный кардинал. $(C_0, \mathcal{B})$-топологией и $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$-топологией называем $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-топологию при $\mathcal{A} = C_0(X)$ и соответственно $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Подобным же образом вводятся $(\mathcal{A}, C_0)$-топологии, $(\mathcal{P}, C_0)$-топологии и т. п. Считаем, что пустое множество является элементом $C_0(X)$, $\exp X$ и $\mathcal{P}(X)$. Точке $F \in \mathcal{P}(X)$ соответствует множество $F \subset X$. Часть результатов (для случая, когда Ω — сигнатура группы) приведена в работе [8].

Теорема 1. *Пусть пространство $\mathrm{Sub}\ X$ наделено (C_0, C_0)-топологией. Тогда*: 1) *подпространство $\mathcal{P}_1 = \mathrm{Sub}\ X \cup \{\varnothing\}$ пространства $\mathcal{P}(X)$ — компакт*; 2) *если $Y \subset X$ и Y пересекает каждую непустую подалгебру алгебры X, то $\mathrm{Sub}\ X$ представимо в виде объединения $\tau = |Y|$ своих компактных подмножеств. Следовательно, если найдется конечное (или счетное) подмножество $Y \subset X$, пересекающее каждую непустую подалгебру, то $\mathrm{Sub}\ X$ — компакт (соответственно $\mathrm{Sub}\ X$ финально компактно).*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — пространство всех функций на X со значениями в двухэлементном множестве $\{0, 1\}$, наделенное топологией поточечной сходимости. Отображение $j\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{F}$, сопоставляющее точке $F \in \mathcal{P}(X)$ характеристическую функцию χ_F, является гомеоморфизмом $\mathcal{P}(X)$ на $\mathcal{F}$. По теореме Тихонова $\mathcal{F}$ — компакт (гомеоморфный $\{0, 1\}^{|X|}$). Для доказательства утверждения 1 достаточно теперь проверить, что $\mathcal{P}_1$ замкнуто в $\mathcal{P}(X)$. Убедимся в этом. Пусть $T \in \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{P}_1$. Тогда $T \neq \varnothing$ и T — не подалгебра. Поэтому найдется операция $f \in \Omega$ (некоторой арности $n \geqslant 0$) и конечное множество $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ (при $n = 0$ S пусто) такие, что точка $y = f(x_1, \dots, x_n)$ лежит в $X \setminus T$. Тогда окрестность $\mathcal{U} = [S, \{y\}]$ отделяет точку T от $\mathcal{P}_1$. В самом деле, если $T' \in \mathcal{U}$, то $S \subset T' \subset X \setminus \{y\}$. Поэтому T' не замкнуто относительно операции f и потому не подалгебра. Утверждение 1 доказано.

Пусть Y — множество в X, удовлетворяющее посылке утверждения 2. Если $y \in Y$, то множество $K_y = \mathcal{P}_1 \cap [\{y\}, \varnothing]$ лежит в Sub X и ввиду замкнутости $[\{y\}, \varnothing]$ и (доказанной выше) компактности $\mathcal{P}_1$ само является компактом. При этом из $y \in H \in \mathrm{Sub}\, X$ следует $H \in K_y$. Ввиду выбора Y справедливо поэтому равенство $\mathrm{Sub}\, X = \cup \{K_y : y \in Y\}$, где каждое K_y — компакт. Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть K — семейство всех подалгебр алгебры X, удовлетворяющих некоторому тождеству $f(x_1, \dots, x_k) = g(x_1, \dots, x_k)$. Тогда для пространства K, наделенного (C_0, C_0)-топологией, справедливы утверждение 1 в форме «$K \cup \{\varnothing\}$ — компакт» и утверждение 2 теоремы 1. Это следует из замкнутости K в Sub X. Проверка замкнутости: если $T \in \mathrm{Sub}\, X \setminus K$, то $f(t_1, \dots, t_k) \neq g(t_1, \dots, t_k)$ для некоторого конечного набора $t_1, \dots, t_k \in T$; тогда окрестность $[\{t_1, \dots, t_k\}, \varnothing]$ точки T дизъюнкта с K. Поэтому, например, пространство абелевых подгрупп произвольной группы является компактом в (C_0, C_0)-топологии. Для топологии Виеториса на пространстве замкнутых подгрупп топологической группы подобный факт отмечен И. В. Протасовым [2], лемма 2.

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть* Sub X *наделено* (C_0, C_0)*-топологией. Тогда* Sub X *локально компактно. Если же сигнатура* X *содержит нульарную операцию, то* Sub X — *компакт.*

Всякая (хаусдорфова) топология очановского типа на $\mathcal{P}(X)$ мажорирует (C_0, C_0)-топологию. Поэтому из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Для произвольной алгебры* (X, Ω) *пространство* Sub X *в очановской топологии уплотняется на локально компактное пространство. Если* Ω *содержит нульарную операцию, то* Sub X *уплотняется на компакт.*

Ниже будет показано (примеры 1 и 2), что Sub X не обязательно локально компактно. Нам потребуется такая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $\mathcal{F} = \{F_n : n < \omega\}$ — *возрастающая последовательность подмножеств множества* X *и* $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, *причем* $\mathcal{F}$ *имеет в* $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$*-топологии некоторую предельную точку* $L \in \mathcal{P}(X)$. *Тогда* $\mathcal{F}$ *стабилизируется на конечном шаге.*

Доказательство. Если $x \in F_n \setminus L$ при некотором n, то $\mathcal{U} = [\varnothing, \{x\}]$ — окрестность точки L, для которой из $F_i \in \mathcal{U}$ следует $i < n$. Так как L — предельная точка $\mathcal{F}$, объединение P элементов последовательности $\mathcal{F}$ лежит в L. Окрестность $\mathcal{V} = [L, \varnothing]$ точки L содержит некоторую точку $F_k \in \mathcal{F}$. Пусть $j > k$. Из $F_k \in \mathcal{V}$ получаем $L \subset F_k$, что дает $F_j \subset P \subset L \subset F_k$. Так как из $j > k$ вытекает $F_j \supset F_k$, получаем $F_j = F_k$. Лемма доказана.

Пример 1. Пусть Q — группа рациональных чисел по сложению. Тогда Sub Q в $(\mathcal{P}, C_0)$-топологии не локально компактно. В самом деле, пусть $\mathcal{U} = [A, B]$ — произвольная (базисная) окрестность нулевой подгруппы $\{0\}$. Тогда $A \subset \{0\} \subset Q \setminus B$ и B конечно. Существует строго возрастающая последовательность $\mathcal{F}$ подгрупп, не пересекающихся с B. Тогда $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ и, по лемме 1, $\mathcal{F}$ не имеет предельной точки (даже в $\mathcal{P}(Q)$).

Пример 2. Пусть X — координатная плоскость, R^+ — множество действительных неотрицательных чисел и $\Omega = \{f_{u,v} : u, v \in R^+\}$, где унарная операция $f_{u,v}$ переводит точку $x = (x_1, x_2) \in X$ в точку $(x_1 - u, x_2 - v)$. Тогда для уноида (X, Ω) пространство Sub X в $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$-топологии не локально компактно и не нормально.

Действительно, элемент $a = (a_1, a_2) \in X$ порождает подуноид $\langle a \rangle = \{(x_1, x_2) : x_1 \leqslant a_1, x_2 \leqslant a_2\}$. Проверим, что Sub X не локально компактно. Пусть $\mathcal{W} = [A, B]$ — произвольное непустое базисное открытое множество в Sub X. Очевидно, найдутся два однопорожденных подуноида $\langle c\rangle$ и $\langle d\rangle$, для которых $A \subset \langle c\rangle \neq \langle d\rangle \subset X \setminus B$. При этом между $\langle c\rangle$ и $\langle d\rangle$ можно вставить бесконечную строго возрастающую последовательность однопорожденных подуноидов. По лемме 1 такая последовательность не имеет предельной точки. Итак, $\operatorname{Sub} X$ не локально компактно.

Положим $\mathscr{L} = \{\langle a\rangle : a \in I\}$, где I — отрезок $\{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 1,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0\}$ в плоскости X, а $\mathscr{M} = \{\langle b\rangle : b \in Q \times Q\}$, где Q — множество рациональных чисел. Несложно проверить, что $\mathscr{L}$ замкнуто и дискретно в $\operatorname{Sub} X$, имеет мощность континуума и содержится в замыкании счетного множества $\mathscr{M}$. Отсюда вытекает, что $\operatorname{Sub} X$ не является нормальным пространством [9, в. 62].

Перейдем к изучению пространства $\operatorname{Sub}_f X$ конечнопорожденных подалгебр алгебры X. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $\mathscr{D}$ — топологическое пространство, на котором задан некоторый порядок, $\mathscr{D}_0 \subset \mathscr{D}$, τ — бесконечный кардинал и выполнены следующие условия:* а) *$|\mathscr{D}_0| \leqslant \tau$ и для каждого $d \in \mathscr{D}$ при некотором $d_0 \in \mathscr{D}_0$ выполнено $d_0 \leqslant d$;* б) *всякая строго возрастающая ограниченная сверху последовательность элементов $\mathscr{D}$ конечна;* в) *если V — окрестность некоторой точки $d \in \mathscr{D}$, то совокупность T минимальных элементов множества $P_{d,V} = \{x \in \mathscr{D} \setminus V : d < x\}$ имеет мощность $\leqslant \tau$ и для каждого $x \in P_{d,V}$ найдется $t \in T$, для которого $t \leqslant x$. Тогда $l(\mathscr{D} \times Y) \leqslant \tau$ для произвольного пространства Y с числом Линделефа $\leqslant \tau$. В частности, $l(\mathscr{D}) \leqslant \tau$.*

Доказательство. Пусть γ — произвольное покрытие декартова произведения $X = \mathscr{D} \times Y$ базисными открытыми множествами и $l(Y) \leqslant \tau$. Выделим из γ подпокрытие мощности $\leqslant \tau$. Пусть $d \in \mathscr{D}$. Так как $\{d\} \times Y$ гомеоморфно Y, найдется семейство $\gamma_d \subset \gamma$ мощности $\leqslant \tau$, покрывающее $\{d\} \times Y$. Для элемента $U = V \times W$ семейства γ_d обозначим через T_U совокупность минимальных элементов множества $P_{d,V}$ и положим $M_d = \bigcup \{T_U : U \in \gamma_d\}$. Из условий а) и б) вытекает $|M_d| \leqslant \tau$.

Пусть $L = \bigcup \{L_n : n < \omega\}$, где $L_1 = \mathscr{D}_0$ и $L_{n+1} = \bigcup \{M_d : d \in L_n\}$ при всех n. Тогда $L \subset \mathscr{D}$ и из $|\mathscr{D}_0| \leqslant \tau$ и $|M_d| \leqslant \tau$ (при всяком d) вытекает $|L| \leqslant \tau$. Покажем, что семейство $\delta = \bigcup \{\gamma_d : d \in L\}$ покрывает X. Предположим, что найдется точка $(d^*, y^*) \in X$, не покрытая никаким элементом семейства δ. Проверим, что в этом случае справедливо утверждение г) если $d \in L$ и $d < d^*$, то $d < d' < d^*$ для некоторого элемента $d' \in L$.

В самом деле, точка (d, y^*) лежит в некотором элементе $\tilde{U} = \tilde{V} \times \tilde{W}$ семейства γ_d. Ясно, что $y^* \in \tilde{W}$; кроме того, $d^* \notin \tilde{V}$, иначе $(d^*, y^*) \in \tilde{U} \subset \bigcup \delta$ (здесь $\bigcup \delta$ — объединение элементов δ). Так как $d \in \tilde{V}$, $d < d^*$ и $d^* \in \mathscr{D} \setminus \tilde{V}$, найдется элемент $d' \in T_{\tilde{U}}$, для которого $d < d' \leqslant d^*$. Если предположить, что $d' = d^*$, то получим $d^* \in T_{\tilde{U}} \subset L$, а тогда $(d^*, y^*) \in \bigcup \gamma_{d^*} \subset \bigcup \delta$. Противоречие с выбором (d^*, y^*) показывает, что $d' < d^*$. Итак, d' — элемент из L, удовлетворяющий заключению г). Свойство г) доказано.

В соответствии с условием а) d^* больше некоторого элемента $d_0 \in \mathscr{D}_0$. При этом $d_0 \in \mathscr{D}_0 \subset L$; поэтому, пользуясь свойством г), можно фиксировать элемент $d_1 \in L$, для которого $d_0 < d_1 < d^*$. Продолжая построение, получим бесконечную последовательность $\{d_i : i = 0, 1, 2 \ldots\}$ элементов $\mathscr{D}$, ограниченную сверху элементом d^*. Это, однако, противоречит условию б). Противоречие показывает, что δ обязано покрывать X. Из $|L| \leqslant \tau$ и $|\gamma_d| \leqslant \tau$ (при всяком d) вытекает $|\delta| \leqslant \tau$. Для завершения доказательства леммы остается заметить, что $\delta \subset \gamma$.

Теорема 2. *Пусть X — алгебра, τ — бесконечный кардинал, $\mathcal{A}, \mathscr{B} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathscr{D} = \operatorname{Sub}_f X$ — пространство конечнопорожденных подалгебр алгебры X, наделенное $(\mathcal{A}, \mathscr{B})$-топологией. Пусть выполнены условия:* а) *существует множество $Y \subset X$ мощности $\leqslant \tau$, пересекающее каждую непустую подалгебру;* б) *если $H \in \mathscr{D}$, то всякая возрастающая цепочка конечнопорожденных подалгебр алгебры H стабилизируется на конечном шаге;* в) *$|B| \leqslant \tau$ для всякого элемента $B \in \mathscr{B}$. Тогда $l(\mathscr{D} \times Y) \leqslant \tau$ для произвольного топологического пространства Y с числом Линделефа, не большим τ. В частности, $l(\mathscr{D}^n) \leqslant \tau$ для всякого конечного n. При $\tau = \omega$*

пространство $\mathcal{D}$ (и всякая его конечная степень) финально компактно (и потому нормально).

Доказательство. Рассмотрим на $\mathcal{D}$ естественный порядок: $H_1 \leqslant H_2$, если $H_1 \subseteq H_2$. Тогда выполнены все условия леммы 2. Проверим справедливость условия в) этой леммы. Пусть $\mathcal{U} = [A, B]$ — базисная окрестность некоторого элемента $D \in \mathcal{D}$. Тогда $T = \{\langle D \cup \{b\}\rangle : b \in B\}$ — семейство (мощности $\leqslant\tau$) минимальных элементов множества $P = \{H \in D \setminus U : D \subset H\}$ и каждое $H \in P$ содержит некоторый элемент $D' \in T$; условие в) проверено. Остальные условия леммы 2 тривиально вытекают из условий теоремы. Ссылка на лемму 2 завершает доказательство.

Применительно к группам из теоремы 2 следует такое утверждение.

Теорема 3. *Пусть X — группа, каждая конечнопорожденная подгруппа которой удовлетворяет условию максимальности для подгрупп* [10, с. 341]. *Тогда число Линделефа пространства* $\mathrm{Sub}_f X$ *в* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$*-топологии не превышает кардинала* $\sup\{|B| : B \in \mathcal{B}\}$.

Учитывая, что абелева группа удовлетворяет посылке теоремы 3 [11, с. 96], получаем такое следствие.

Следствие 3. Если X — абелева группа, то $l(\mathrm{Sub}_f X) \leqslant \mathrm{Sup}\{|B| : B \in \mathcal{B}\}$.

На произвольные группы следствие не переносится.

Пример 3. Рассмотрим группу X, для которой $\mathrm{Sub}_f X$ не финально компактно в (C_0, C_0)-топологии. Пусть $\mathcal{J} = \bigcup\{W_i : i \in Z\}$, где Z — группа целых чисел, множества W_i попарно дизъюнктны и $W_i = \{a_i^0, a_i^1, b_i^0, b_i^1\}$ (все точки различны). Пусть X — группа всех биекций множества $\mathcal{J}$ с естественной операцией, являющейся композицией биекций. Пусть ξ_i^j — элемент X, переставляющий (только) a_i^j с b_i^j, θ — множество всех функций из Z в двоеточие $\{0,1\}$. Для $\varphi \in \theta$ положим $D_\varphi = \bigcup\{\{a_i^{\varphi(i)}, b_i^{\varphi(i)}\} : i \in Z\}$ и пусть π_φ — элемент X, переводящий при всяком i точку $a_i^{\varphi(i)}$ в $a_{i+1}^{\varphi(i+1)}$, точку $b_i^{\varphi(i)}$ в $b_{i+1}^{\varphi(i+1)}$ и тождественный на $\mathcal{J} \setminus D_\varphi$ (т. е. π_φ — «сдвиг вправо вдоль D_φ»). Положим $\mathcal{L} = \{G_\varphi : \varphi \in \theta\}$, где G_φ — подгруппа, порожденная двумя биекциями — π_φ и $\xi_0^{\varphi(0)}$. Отметим, что $\xi_i^{\varphi(i)} \in G_\varphi$ при всяком i. Более того, справедливо утверждение а) $G_\varphi \cap \{\xi_i^0, \xi_i^1\} = \{\xi_i^{\varphi(i)}\}$ при всех $\varphi \in \theta$ и $i \in Z$. Так как $\mathcal{L} \subset \mathrm{Sub}_f X$ и $|\mathcal{L}| = c = 2^\omega$, достаточно убедиться в том, что $\mathcal{L}$ замкнуто и дискретно.

Пусть $H \in \mathrm{Sub}_f X$ и $H \in [\mathcal{L}]$. Для $i \in Z$ положим $E_i = \{\xi_i^0, \xi_i^1\}$. Если предположить, что $E_i \subset H$ или $E_i \cap H = \varnothing$, то окрестность $[E_i, \varnothing]$ (соответственно окрестность $[\varnothing, E_i]$) отделит точку H от $\mathcal{L}$. Противоречие с выбором H доказывает существование (и единственность) функции $g \in \theta$, для которой $H \cap E_i = \{\xi_i^{g(i)}\}$ при всех i.

Пусть S — конечное множество, алгебраически порождающее H. Тогда окрестность $\mathcal{U} = [S, \varnothing]$ подгруппы H содержит некоторую точку G_ψ множества $\mathcal{L}$ (здесь $\psi \in \theta$). Для завершения доказательства примера достаточно проверить, что ψ непременно совпадает с g. Пусть $k \in Z$. Из $G_\psi \in \mathcal{U}$ следует $S \subset G_\psi$, откуда $\xi_k^{g(k)} \in H = \langle S\rangle \subset G_\psi$. Из определения G_ψ получаем $\xi_k^{\psi(k)} \in G_\psi$. Поэтому утверждение а) влечет $\psi(k) = g(k)$. Пример доказан.

1. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представление.— М. : Наука, 1970.— 320 с.
2. *Протасов И. В.* Топологические группы с компактной решеткой замкнутых подгрупп // Сиб. мат. журн.— 1979.— **20**, № 2.— С. 378—385.
3. *Протасов И. В.* О топологиях в решетке подгрупп // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1981.— № 2.— С. 29—32.
4. *Kašuba R.* The generalized Očan topology and topological Boolean rings // Proc. IIth Conf. Topology and Measure. Pt 1.— Greifswald, 1980.— Rostock—Warnemunde, 1977.— P. 109—114.
5. *Очан Ю. С.* Пространство подмножеств топологического пространства // Докл. АН СССР.— 1941.— **32**, № 2.— С. 107—109.
6. *Kasuba R.* The generalised Ocan topology on sets of subsets and topological Bolean rings // Math. Nachr.— 1980.— **97**.— P. 47—56.
7. *Попов В. В.* О нормальности экспоненты в топологиях очановского типа // Мат. заметки.— 1982.— **32**, № 3.— С. 375—384.
8. *Попов В. В.* О пространстве подгрупп в топологиях очановского типа // Тез. IX Всесоюз. симп. по теории групп.— М., 1984.— С. 231.
9. *Engelking R.* General topology.— Warszawa : PWN, 1977.— 626 p.
10. *Курош А. Г.* Теория групп.— М. : Наука, 1967.— 648 с.
11. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы : В 2-х т.— М. : Мир, 1974.— Т. *1*.— *335 с.*

Волгогр. пед. ин-т

Получено 05.07.85