Левое неравенство (7) доказывается так:

$$\|Lu\|_- = \sup_{v\in H_+} \frac{(v, Lu)_{L_2(\Omega)}}{\|v\|_+} = \sup_{v\in W} \frac{1}{\|v\|_+} \int_\Omega vLudx =$$

$$= \sup_{v\in W} \frac{1}{\|v\|_+} \int_\Omega \Big[\sum_{i,j=1}^{n} b^{ij} (Au)_{x_i} (Av)_{x_j} - b (Au) (Av) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} c^{ij} u_{x_i} v_{x_j} - \frac{1}{2} (c + c^*) uv \Big] dx \leqslant \alpha_1 \|u\|_+.$$

Неравенства (8) доказываются аналогично.

Определение. *Функцию* $u(x) \in H_+$ *назовем сильным решением задачи* (1), (2), *если существует последовательность функций* $u_k(x) \in W$ *такая, что* $\lim\limits_{k\to\infty} \|u_k - u\|_+ = \lim\limits_{k\to\infty} \|Lu_k - f\|_- = 0.$

Следствием неравенств (4), (5) является следующая теорема.

Теорема. *Если выполняется условие* (3), *то для любой функции* $f(x) \in L_2(\Omega)$ *сильное решение* $u(x) \in H_+$ *задачи* (1), (2) *существует и единственно.*

1. *Маловичко В. А.* Об одной краевой задаче для уравнения шестого порядка с неотрицательной характеристической формой // Мат. физика.— 1982.— Вып. 31.— С. 96—99.
2. *Маловичко В. А.* О первой краевой задаче для одного дифференциального уравнения 4-го порядка // Сиб. мат. журн.— 1983.— **34**, № 1.— С. 125—129.
3. *Маловичко В. А.* Первая краевая задача для уравнения четвертого порядка с неотрицательной характеристической формой // Диф. уравнения.— 1983.— **19**, № 4.— С. 712—714.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.

Киев. технол. ин-т пищ. пром-сти

Получено 20.02.86,
после доработки — 28.04.86

УДК 518.7

Нгуен-Бьонг

Об одной задаче оптимизации

Рассматривается метод регуляризации задачи оптимизации на множестве решений уравнения типа Гаммерштейна с максимальными монотонными операторами в банаховых пространствах.

1. Пусть $\varphi(x)$ — некоторый вещественный функционал, определенный на некотором множестве S банахова пространства X. Общая задача оптимизации формулируется так: найти

$$x_0 \in S : \varphi(x_0) = \min_{x\in S} \varphi(x). \tag{1}$$

Если φ есть собственно выпуклый, слабо полунепрерывный снизу функционал, имеющий производную A по Гато, и S — замкнутое выпуклое множество, то задача (1) эквивалентна задаче нахождения решения x_0 вариационного неравенства [1]: найти

$$x_0 \in S : \langle A(x), x - x_0 \rangle \geqslant 0 \ \forall x \in S. \tag{2}$$

Исследованию этой общей задачи, при явном задании множества S, посвящено огромное количество работ. Если S задано неявно, например в виде множества решений уравнения или другого вариационного неравенства, то она рассматривается в работах [2—4]. В этой заметке изучим задачу (1), где S есть множество всех решений уравнений типа Гаммерштейна

$$x + F_2F_1(x) = f_0, \ \ f_0 \in X. \tag{3}$$

Здесь $F_1 : D(F_1) \subset X \to X^*$, $F_2 : D(F_2) \subset X^* \to X$ — максимальные монотонные операторы, причем F_1 ограничен и однозначен. Ограниченность оператора F_1 гарантирует замкнутость множества S. Больше она нигде не используется. Относительно пространства X потребуем выполнения условия сильной выпуклости [5]. Предположим, что $S \neq \varnothing$.

2. Сначала рассмотрим случай

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(F_1(x)), \tag{4}$$

где φ_i, $i = 1, 2,$— собственно выпуклые, слабо полунепрерывные снизу функционалы, определенные на X и X^* соответственно. Предположим, что φ_i обладают ограниченной производной A_i по Гато и

$$\begin{gathered}\langle A_1(x_1) - A_1(x_2), \ x_1 - x_2\rangle \geqslant (g_1(\|x_1\|) - g_1(\|x_2\|))(\|x_1\| - \|x_2\|),\\ \langle A_2(x_1^*) - A_2(x_2^*), \ x_1^* - x_2^*\rangle \geqslant (g_2(\|x_1^*\|_*) - g_2(\|x_2^*\|_*))(\|x_1^*\|_* - \|x_2^*\|_*),\end{gathered} \tag{5}$$

где $g_i(t)$ — вещественные, строго возрастающие на $[0, +\infty)$ функции, причем $g_1(0) = 0$ и $g_i(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$, $\|\cdot\|_*$ — норма в X^*.

Теорема 1. *Для каждого $\alpha > 0$ и $f_0 \in X$ уравнение*

$$x + F_{2\alpha}F_{1\alpha}(x) = f_0, \ \ F_{i\alpha} = F_i + \alpha A_i \tag{6}$$

имеет единственное решение x_α и при $\alpha \to 0$ последовательность $\{x_\alpha\}$ сходится к решению поставленной задачи.

Доказательство. Уравнение (6) имеет единственное решение x_α тогда и только тогда, когда система уравнений $F_{1\alpha}(x) - x^* = \theta$, $x + F_{2\alpha}(x^*) = f_0$ обладает таким же свойством, причем решение этой системы имеет вид $z_\alpha = [x_\alpha, x_\alpha^*]$, $x_\alpha^* = F_{1\alpha}(x_\alpha)$. Пусть $Z = X \times X^*$ — банахово пространство со следующей нормой $\|z\| = (\|x\|^2 + \|x^*\|_*^2)^{1/2}$, $z = [x, x^*]$, $x \in X$, $x^* \in X^*$. Тогда в пространстве Z эта система уравнений записывается в виде

$$F_\alpha(z) \equiv F(z) + \alpha\bar{A}(z) = \bar{f}_0, \ \ \bar{f}_0 = [\theta, f_0], \tag{7}$$

где $F(z) = [F_1(x) - x^*, \ x + F_2(x^*)]$, $\bar{A}(x) = [A_1(x), \ A_2(x^*)]$. Каждый оператор A_i монотонен и потенциален. Поэтому A_i есть деминепрерывный оператор [6, с. 120]. Поскольку областью определения A_i есть все пространство, то A_i хеминепрерывен. Кроме того, легко проверить, что из (5) вытекакает коэрцитивность оператора $\bar{A}$. Так как $F(z) = [F_1(x), \ F_2(x^*)] + [-x^*, x]$, где оператор $z \to [-x^*, x]$ монотонен, ограничен и хеминепрерывен, а оператор $z \to [F_1(x), F_2(x^*)]$ есть максимальный монотонный оператор с областью определения $D(F_1) \times D(F_2)$. Поэтому из [7, 8] вытекает, что F_α является максимальным монотонным и коэрцитивным оператором и уравнение (7) имеем некоторое решение z_α. Пусть z_α^1 и z_α^2 — любые два его решения. В силу выпуклости множества решений уравнения с максимальным монотонным оператором следует, что отрезок, соединяющий z_α^1 и z_α^2, принадлежит этому множеству. С другой стороны, из (5), (7) и свойств функций $g_i(t)$ получаем $\|z_\alpha^1\| = \|z_\alpha^2\|$, Значит, z_α^i, $i = 1, 2$, лежат на одной сфере строго выпуклого банахова пространства Z (так как X и X^* строго выпуклы). Аналогичными рассуждениями придем к выводу, что целый отрезок от z_α^1 до z_α^2 лежит на этой сфере. Это возможно лишь при $z_\alpha^1 = z_\alpha^2$, т. е. уравнение (7) имеет единственное решение.

Теперь, так как $S \neq \varnothing$, то $\bar{S} = S \times F_1(S)$ — множество решений уравнения

$$F(z) = \bar{f}_0 \tag{8}$$

непусто. Из (7) и (8) получим

$$\forall z_0 \in \overline{S}\ \langle y(z_\alpha) - y(z_0),\ z_\alpha - z_0\rangle + \langle \overline{A}(z_\alpha),\ z_\alpha - z_0\rangle = 0\ \ \forall y(z_\alpha) \in F(z_\alpha),$$
$$y(z_0) \in F(z_0).$$

Отсюда и из свойства монотонности оператора F имеем $\langle \overline{A}(z_\alpha), z_\alpha - z_0\rangle \leqslant 0$. С другой стороны, из (5) следует

$$0 \leqslant (g_1(\| x_\alpha \|) - g_1(\| x_0 \|))(\| x_\alpha \| - \| x_0 \|) + (g_2(\| x_\alpha^* \|_*) -$$
$$- g_2(\| x_0^* \|_*))(\| x_\alpha^* \|_* - \| x_0^* \|_*) \leqslant \langle \overline{A}(z_\alpha) - \overline{A}(z_0),\ z_\alpha - z_0\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \langle \overline{A}(z_0),\ z_\alpha - z_0\rangle. \tag{9}$$

Из этого вытекает ограниченность последовательности $\{z_\alpha\}$. Пространство Z рефлексивно, поэтому существует некоторая подпоследовательность, которую обозначим опять через $\{z_\alpha\}$, слабо сходящаяся к некоторой точке $z_\infty := [x_\infty, x_\infty^*]$. Докажем, что $z_\infty \in \overline{S}$. Поскольку z_∞ является решением уравнения (7) с максимальным монотонным оператором F_α, то $\forall z \in D(F)\ \langle y(z) + \alpha\overline{A}(z) - \overline{f}_0,\ z - z_\alpha\rangle \geqslant 0\ \ \forall y(z) \in F(z)$. Устремив $\alpha \to 0$, получим $\langle y(z) - \overline{f}_0, z - z_\infty\rangle \geqslant 0\ \ \forall y(z) \in F(z)$. Тогда $\overline{f}_0 \in F(z_\infty)$. Теперь положим z_∞ вместо z_0 в выражении (9), при устремлении α к нулю получим $\| z_\alpha \| \to \| z_\infty \|$. Из (9) видно, что z_∞ удовлетворяет вариационному неравенству $\langle \overline{A}(z_0), z_0 - z_\infty\rangle \geqslant 0\ \ \forall z_0 \in \overline{S}$, которое эквивалентно следующему: $\langle A_1(x), x - x_\infty\rangle + \langle A_2(F_1(x)), F_1(x) - x_\infty^*\rangle \geqslant 0\ \ \forall x \in S$, т. е. x_∞ является решением поставленной задачи. Видно, что всякая слабо предельная точка последовательности $\{z_\alpha\}$ является решением вариационного неравенства с монотонным оператором $\overline{A}$. Из (5) вытекает единственность этого решения. Поэтому вся последовательность $\{z_\alpha\}$ слабо сходится к z_∞. Тогда x_α сходится к x_∞. Теорема доказана.

3. Теперь рассмотрим случай в п. 1. Пусть $U : X \to X^*$ и $V : X^* \to X$ — дуальные отображения. Для двупараметрического регуляризованного уравнения

$$x + F_{2\alpha}^{\mu} F_{1\alpha}^{\mu}(x) = f_0, \tag{10}$$

где $F_{1\alpha}^{\mu}(x) = F_1(x) + \alpha(A(x) + \mu U(x))$, $F_{2\alpha}^{\mu}(x^*) = F_2(x^*) + \alpha\mu V(x^*)$ $\alpha, \mu > 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для каждого $\alpha > 0$ и $\mu > 0$ уравнение* (10) *имеет единственное решение $x_{\alpha\mu}$ и при $\alpha \to 0$ и $\mu \to 0$ эта последовательность сходится к x_0.*

Доказательство. Уравнение (10) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда таким же свойством обладает следующее уравнение

$$F(z) + \alpha(\overline{A}(z) + \mu\overline{J}(z)) = \overline{f}_0, \tag{11}$$

где $\overline{A}(z) = [A(x), \theta]$ и $\overline{J}(z) = [U(x), V(x^*)]$. Очевидно, что U и V обладают всеми свойствами, которых мы требуем от A_1 и A_2. Поэтому уравнение (11) имеет единственное решение $z_{\alpha\mu}$. При $\alpha \to 0$, $z_{\alpha\mu}$ сходится к $z_\mu \in \overline{S}$ и определяется соотношением $\psi_\mu(z_\mu) = \min\limits_{z \in \overline{S}} \psi_\mu(z)$, $\psi_\mu(z) = \varphi(z) + \mu(\| x \|^2 + \| x^* \|_*^2)^{1/2}$. Доказательство этого факта дано в [4] и поэтому здесь не приводится. И при $\mu \to 0$, x_μ сходится к $x_0 \in S_0$, где $S_0 = \{x_0 \in S : \varphi(x_0) = \min\limits_{x \in S} \varphi(x)\}$. Теорема доказана.

Далее предположим, что исходные данные рассматриваемой задачи оптимизации известны не точно, т. е. вместо операторов F_i, правой части f_0 и функционала φ заданы их приближения F_{hi}, f_δ и φ^γ соответственно, $hi > 0$, $\delta > 0$ и $\gamma > 0$, причем

$$r(F_{h1}(x), F_1(x)) \leqslant h1 \| x \|,\ r(F_{h2}(x^*), F_2(x^*)) \leqslant h2 \| x^* \|_*,$$
$$D(F_{h1}) = D(F_1),\ D(F_{h2}) = D(F_2),\ \| A(x) - A^\gamma(x) \|_* \leqslant \gamma \| x \|,\ \| f_0 - f_\delta \| \leqslant \delta,$$

где A^{γ} — производная по Гато функционала φ^{γ}, F_{h1} и F_{h2} — максимальные монотонные операторы, $r(P, Q)$ — хаусдорфово расстояние между множествами P и Q пространства Y, содержащего P и Q. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для каждого $\alpha > 0$, $hi > 0$, $\gamma > 0$ и $\delta \geqslant 0$ регуляризованное уравнение*

$$x + F^{\mu}_{h2\alpha} F^{\mu\gamma}_{h1\alpha}(x) = f_{\delta},$$

где $F^{\mu\gamma}_{h1\alpha}(x) = F_{h1}(x) + \alpha(A^{\gamma}(x) + \mu U(x))$ *и* $F^{\mu}_{h2\alpha}(x^*) = F_{h1}(x^*) + \alpha\mu V(x^*)$, *имеет единственное решение $x^{h\gamma}_{\alpha\mu}$. При условии $hi/\alpha \to 0$, $\delta/\alpha \to 0$ при $\alpha \to 0$ и $\gamma/\mu \to 0$ при $\mu \to 0$ $x^{h\gamma}_{\alpha\mu}$ сходится к x_0.*

Доказательство этой теоремы следует из доказательства теоремы 2 и основных результатов из [4].

1. *Sibony M.* Sur l'approximation d'équation et inéquation aux dérivees partielles nonlineares de type monotones // J. Math. Anal. Appl.— 1971.— **34**.— P. 502—564.
2. *Kluge R.* Approximation method for nonlinear problem with constrains in form of variations inequalities // Proc. of the Conference on Mathematical quetions of optimal control held at Zakopene, Poland 7—13.1. 1974. Banach center Publication.— 1976.— **1**.— P. 131—138.
3. *Bruckner G.* On the speed of c—sequence in conection with a lemma of Toeplith. Nonlinear analysis. Theory and application. Proc. of the seveth intern. summer school. Academ. Verlage, Berlin 1981, n 2, 53—64.
4. *Рязанцева И. П.* Операторный метод регуляризации для некорректных задач оптимального планирования с монотонными отображениями // Сиб. мат. журн.— 1983.— **4**, № 6.— С. 214.
5. *Конягин С. В.* Об аппроксимативных свойствах замкнутых множеств в банаховых пространствах и характеризации сильно выпуклых пространств // Докл. АН СССР.— 1980.— **251**, № 2.— С. 276—280.
6. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1978.— 336 с.
7. *Browder E. F.* nNonlinear maximal monotone operators in Banach spaces // Math. Annal.— 1968.— **2**.— P. 89—113.
8. *Rockafellar R. T.* On the maximality of sums of nonlinear monotones operators // Trans. AMS.— 1970.— **149**.— P. 75—88.

Вьетнам

Получено 01.04.86,
после доработки — 15.12.86

УДК 517.922

Л. Г. Просенюк

Существование и асимптотика O-решений дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$b\,(dx/dt)^n - x + at^{\alpha} + x^n F(t, x, dx/dt) = 0, \tag{1}$$

где x — неизвестная функция переменной t, a, b, α, n — постоянные, $ab \neq 0$, $\alpha > 2$, $n > 2$ — целое, функция F непрерывна в окрестности точки $O\,(0, 0, 0)$ и имеет там непрерывную частную производную по dx/dt.

В статье изучается вопрос о существовании и асимптотических свойствах решений уравнения (1) таких, что $x \to 0$, $dx/dt \to 0$, когда $t \to +0$.

Подобные вопросы для различных уравнений, не разрешенных относительно производной, исследовались и в [1—3]. Отличие данной работы состоит в том, что в ней рассмотрено не изучавшееся уравнеиие, для которого выясняется не только асимптотика решений, но и асимптотика их производной.