УДК 512.554.3

Ли Сун Ген

О представлениях алгебр Ли ступенчатых матриц

Одна из основных задач теории представлений групп и алгебр Ли— описание примитивных идеалов универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{G})$, где $\mathfrak{G}$ — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем C характеристики 0. Эта задача решена для двух крайних случаев : разрешимых алгебр Ли (см., например, [1]) и для полупростых алгебр Ли [2]. Отметим, что если для полупростых алгебр в работе [2] дан полный ответ, то для разрешимых алгебр метод орбит А. А. Кириллова только сводит вопрос к описанию орбит в коприсоединенном представлении, что само по себе является трудной задачей. Для «смешанного» случая пока известен только ряд примеров, относящихся к полупрямым произведениям (см., например, [3]).

В настоящей работе рассмотрен один из простейших случаев — алгебра Ли ступенчатых матриц. Оказывается, для таких алгебр описание примитивных идеалов является «дикой задачей», т. е. содержит в себе классификацию пар матриц относительно одновременных подобных преобразований. Выделен важный частный случай — примитивные идеалы «общего положения» и дается их полное описание.

1. Пусть $\mathfrak{G}$ — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем C характеристики 0. Обозначим через $V(\mathfrak{G})$ ее универсальную обертывающую алгебру, а через $\mathrm{prim}\ \mathfrak{C}$ — пространство примитивных идеалов $V(\mathfrak{G})$, т. е. ядер ее неприводимых представлений.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{N}$ — абелев идеал, а $\mathfrak{S}$—подалгебра в $\mathfrak{G}$. Обозначим через $\mathfrak{R}$ наименьшую алгебраическую алгебру Ли эндоморфизмов $\mathfrak{G}$, содержащую $\mathrm{ad}\,\mathfrak{S}$, через A — связную алгебраическую подгруппу в $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{G}$, алгеброй Ли которой является $\mathfrak{A}$ (см., например., [4]). Через $\mathfrak{N}^*/A$ обозначим множество орбит группы A при ее коприсоединенном действии на пространстве $\mathfrak{N}^*$, а через f^A—орбиту функционала $f \in \mathfrak{N}^*$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между $\mathrm{prim}\,\mathfrak{G}$ и множеством пар (I, f^A), где f пробегает множество представителей орбит из $\mathfrak{N}^*/A$, а I — множество $\mathrm{prim}\,\mathrm{st}\,(f, \mathfrak{S})$, где $\mathrm{st}\,(f, \mathfrak{S}) = \{S \in \mathfrak{S} \mid (\forall n \in \mathfrak{N}) \times \times (f\,[s, n] = 0)\}$.*

Доказательство следует из работ [1,5].

2. Обозначим через $\mathfrak{G}(m, n)$ алгебру Ли ступенчатых матриц, т. е. матриц вида $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где A и C—квадратные матрицы соответственно m- и n-го порядка. Пусть $P(d)$—множество пар квадратных матриц порядка d, $\Sigma(d) = P(d)/\mathrm{GL}(d)$, где группа $\mathrm{GL}(d)$ действует на множестве $P(d)$ одновременными подобными преобразованиями.

Теорема 1. *Существует вложение* $\Sigma(d) \to \mathrm{prim}\,\mathfrak{G}\,(14d,\ 12d)$.

Иными словами, описание примитивных идеалов алгебр $U(\mathfrak{G})$, где $\mathfrak{G}$ пробегает алгебры Ли ступенчатых матриц, содержит в себе классификацию пар матриц, т. е. является «дикой задачей».

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(14d, 12d)$. Тогда $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{S}$—соответственно идеал и подалгебра в $\mathfrak{G}$ вида $\mathfrak{N} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\mathfrak{S} =$
$$= \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = A \oplus C\right\}.$$

Рассмотрим на $\mathfrak{N}$ линейную форму $f = \mathrm{tr}\,XB$, где $X = \begin{pmatrix} 0 & E_{8d} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда
$$\mathfrak{G}_1 = \mathrm{st}\,(f, \mathfrak{S}) = \left\{\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} A_3 & A_4 \\ 0 & A_5 \end{pmatrix}\right\},$$ где $A_1 \in \mathscr{H}(6d)$, $A_3 \in \mathscr{H}(8d)$, $A_5 \in \mathscr{H}(4d)$.

Снова $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{S}_1$, где $\mathfrak{N}_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & A_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\mathfrak{S}_1 = \{A_1 \oplus A_3 \oplus A_3 \oplus A_5\}$.

Рассмотрим на $\mathfrak{N}_1$ линейную форму $f_1 = \operatorname{tr} X_1 A_2 + \operatorname{tr} X_2 A_4$, где

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & E_{2d} & 0 \\ 0 & 0 & E_{2d} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & E_{2d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{2d} \end{pmatrix}$$

(все полосы ширины $2d$). Тогда

$$\mathfrak{G}_2 = \operatorname{St}(f_1, \mathfrak{S}_1) = \left\{\begin{pmatrix} B_1 & C_1 & C_2 \\ 0 & B_2 & C_3 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} B_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ 0 & B_3 & 0 & C_6 \\ 0 & 0 & B_4 & C_7 \\ 0 & 0 & 0 & B_5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} B_3 & C_6 \\ 0 & B_5 \end{pmatrix}\right\}$$

(далее третье слагаемое писать не будем, так как оно полностью определяется вторым). Разложим $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{N}_3 \oplus \mathfrak{G}_2$, где $\mathfrak{S}_2$ состоит из матриц, в которых $C_5 = C_6 = C_7 = 0$, а $\mathfrak{N}_2$ — из матриц, в которых все клетки, кроме C_5, C_6, C_7, нулевые. Рассмотрим на $\mathfrak{N}_2$ форму $f_2 = \operatorname{tr} C_6 + \operatorname{tr} C_7$. Тогда

$$\mathfrak{G}_3 = \operatorname{St}(f_2, \mathfrak{S}_2) = \left\{\begin{pmatrix} B_1 & C_1 & C_2 \\ 0 & B_2 & C_3 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} B_2 & C_3 & C_4 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix} \oplus B_3\right\}$$

(как и выше, третье слагаемое опустим). Рассмотрим в $\mathfrak{G}_3$ идеал J, состоящий из матриц, в которых ненулевая только клетка C_2, и положим $\mathfrak{D} = \mathfrak{G}_3/J$. Из леммы следует, что существует вложение $\operatorname{prim}\mathfrak{D} \to \operatorname{prim}\mathfrak{S}$. Снова разложим $\mathfrak{D} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{M}$ — идеал матриц с нулевыми диагональными клетками, а $\mathfrak{A}$ — подалгебра блочно-диагональных матриц. Пусть теперь $(Z_1, Z_2) = Z \in P(d)$. Определим на $\mathfrak{M}$ форму $f_Z = \operatorname{tr} Y_1 C_1 + \operatorname{tr} Y_2 C_3 + \operatorname{tr} Y_3$, где $Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & E_d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & E_d \\ Z_1 & Z_2 \end{pmatrix}$. Несложно проверить, что если $Z' = (Z_1', Z_2')$, то орбиты f_Z^Γ и $f_{Z'}^\Gamma$, где Γ — присоединенная алгебраическая группа алгебры Ли $\mathfrak{A}$, совпадают тогда и только тогда, когда совпадают орбиты $Z^{GL(d)}$ и $Z'^{GL(d)}$. Снова согласно лемме получаем вложение $\Sigma(d) \to \operatorname{prim}\mathfrak{D}$, что и требовалось доказать.

3. Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(m, n) = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{S}$ определяются как в доказательстве теоремы 1. Всякая форма на $\mathfrak{N}$ имеет вид $f = \operatorname{tr} XB$, где X — матрица размера $n \times m$. Будем говорить, что данная форма общего положения, если $\operatorname{rk}(X) = \min\{m, n\}$. Обозначим через G присоединенную алгебраическую группу алгебры Ли $\mathfrak{S}$. Тогда орбита X^G содержит матрицу $(0E_n)$, если $n < m$, $\begin{pmatrix} E_m \\ 0 \end{pmatrix}$, если $n > m$, и E_n, если $n = m$. В последнем случае $\operatorname{St}(f, \mathfrak{S}) \simeq \mathscr{H}(n)$. В первом и во втором случае, как легко проверить, $\mathfrak{G}_1 = \operatorname{St}(f, \mathfrak{S})$ изоморфен соответственно $\mathfrak{G}(m - n, n)$ или $\mathfrak{G}(m, n - m)$. Это дает возможность определить индуктивно подмножество $\operatorname{prim}_0\mathfrak{G} \subset \operatorname{prim}\mathfrak{G}$, считая, что $\operatorname{prim}_0\mathscr{H}(n) = \operatorname{prim}\mathscr{H}(n)$, а идеал $I \in \operatorname{prim}\mathfrak{G}$ содержится в $\operatorname{prim}_0\mathfrak{G}$, если в соответствующей (по лемме) паре (I_1, f^G) форма f общего положения, а $I_1 \in \operatorname{prim}_0\mathfrak{G}_1$. Легко видеть, что $\operatorname{prim}_0\mathfrak{G}$ — открытое инвариантное подмножество в $\operatorname{prim}\mathfrak{G}$. Идеалы из $\operatorname{prim}_0\mathfrak{G}$ назовем примитивными идеалами общего положения алгебры $V(\mathfrak{G})$.

Теорема 2. *Существует биекция* $\operatorname{prim}_0\mathfrak{G}(m, n) \simeq \operatorname{prim}\mathscr{H}(d)$, *где* $d = (m, n)$.

Доказательство непосредственно вытекает из рассуждений, предшествующих теореме, так как замена пары (m, n) каждый раз на $(m - n, n)$ либо $(m, n - m)$ — это, по сути, алгоритм Евклида для нахождения НОД.

Приведем пример, показывающий, как явно построить вложение $\operatorname{prim} \mathscr{H}(d) \to \to \operatorname{prim} \mathfrak{G}(m, n)$. Пусть $m = 10$, $n = 4$. Тогда последовательность приведений имеет **вид** $(10, 4) \to (6, 4) \to (2, 4) \to (2, 2)$. Рассмотрим в $\mathfrak{G}(10, 4)$ подалгебру $\mathfrak{D}$ матриц вида

$$Z = \left(\begin{array}{c|c|c|cc|cc} A & D_1 & D_2 & C_{11} & C_{12} & B_{11} & B_{12} \\ \hline & A & Y & C_{21} & C_{22} & B_{21} & B_{22} \\ \cline{2-3} 0 & 0 & A & C_{31} & C_{32} & B_{31} & B_{32} \\ \hline & & & A & Y & B_{41} & B_{42} \\ & 0 & & 0 & A & B_{51} & B_{52} \\ \hline & & & & & A & Y \\ & & 0 & & & 0 & A \end{array} \right)$$

(все клетки — размера 2×2; штриховые линии указывают последовательность проведений).

Пусть $I \in \operatorname{prim} \mathscr{H}(2)$, σ — какое-нибудь неприводимое представление с ядром I. Рассмотрим представление ρ подалгебры $\mathfrak{D}$, определенное формулой $\rho(z) = \sigma(A) + \operatorname{tr}(Y + D_1 + C_{21} + C_{32} + B_{41} + B_{52}) E$ (здесь E — единичный оператор). Тогда $\pi = \operatorname{ind}(\rho, \mathfrak{T})$ — неприводимое представление $\mathfrak{G}$ и идеалу I нужно сопоставить идеал $\ker \pi \in \operatorname{prim} \mathfrak{G}(10,4)$.

1. *Диксмье Ж.* Универсальные обертывающие алгебры.— М. : Мир, 1978.— 407 с.
2. *Duflo M.* Sur la classification des idéaux primitifs dans l'algébre enveloppante d'une algebre de Lie semi-simple // Ann. Math.— 1977.— **105**, N 1.— P. 107—120.
3. *Желобенко Д. П., Штерн А. И.* Представления групп Ли.— М. : Наука, 1983.— 360 с.
4. *Хамфри Дж.* Линейные алгебраические группы.— М. : Наука, 1980.— 399 с.
5. *Conze N.* Action d'un groupe algébrique dans léspace des idéaux primitifs d'une algébre enveloppante // J. Algebra.— 1973.— **25**, N 1.— P. 100—105.

Киев. ун-т Получено 16.04.86

УДК 517.956

В. А. Маловичко

К теории уравнений смешанного типа шестого порядка

В ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с кусочно-гладкой границей Γ рассмотрим уравнение шестого порядка

$$Lu(x) \equiv A^*BAu(x) + Cu(x) = f(x), \tag{1}$$

где

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{n} [a^{ij}(x) u_{x_i}]_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a^i(x) u_{x_i} + a(x) u;$$

$$Bu(x) = \sum_{i,j=1}^{n} [b^{ij}(x) u_{x_i}]_{x_j} + b(x) u; \quad Cu(x) = \sum_{i,j=1}^{n} c^{ij}(x) u_{x_i x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} c^i(x) u_{x_i} + c(x) u;$$

A^* — оператор, формально сопряженный с оператором A; $a^{ij}(x) \in C^5(\bar{\Omega})$; $a^i(x)$, $a(x) \in C^4(\bar{\Omega})$; $b^{ij}(x) \in C^3(\bar{\Omega})$; $b(x)$, $c^{ij}(x) \in C^2(\bar{\Omega})$; $c^i(x) \in C^1(\bar{\Omega})$; $c(x) \in C(\bar{\Omega})$; $b(x) \leqslant 0$ в Ω; матрицы $\{a^{ij}(x)\}$, $\{b^{ij}(x)\}$, $\{c^{ij}(x)\}$ симметричны, причем $\sum_{i,j=1}^{n} b^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqslant 0$, $\sum_{i,j=1}^{n} c^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqslant 0$ для всех $x \in \Omega$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$ (на знакоопределенность матрицы $\{a^{ij}(x)\}$ никаких условий не налагают).