Доказательство теорем 4, 5 проводится так же, как и в п. 2. Отметим только, что в отличие от задачи (4) [1], (6) наличие волн течения приводит здесь к возникновению полного резонанса, в результате которого образуются как «цуги» альфвеновских волн, так и цуги волн магнитного звука.

1. *Маслов В. П., Омельянов Г. А.* Взаимодействие коротких волн малой амплитуды в слабо дисперсионной плазме. I // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 4.— С. 464—472.
2. *Кадомцев Б. В.* Коллективные явления в плазме.— М. : Наука, 1976.— 238 с.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. Н.* Электродинамика сплошных сред.— М. : Наука, 1982.— 620 с.

Моск. ин-т электрон. машиностроения Получено 19.03.87

УДК 517.944:519.46

Ю. А. Митропольский, М. В. Шульга

Асимптотические и точные решения многомерного нелинейного уравнения типа Шредингера

1. Рассмотрим нелинейное многомерное уравнение типа Шредингера

$$i\partial U/\partial x_0 + \lambda\Delta U + \varepsilon |U|^k U = 0, \quad k = 2, 4, \tag{1}$$

где $U = U(x)$, $x = (x_0 \equiv t, x_1, x_2, x_3)$, $U(x) = U_1(x) + iU_2(x)$, $\varepsilon > 0$, $\lambda = -1/2m$, ε — малый параметр, x — действительный вектор.

Это уравнение широко встречается в квантовой механике, теории плазмы и теоретической биофизике. К настоящему времени детально исследовано только одномерное уравнение (1). Построению солитонных решений одномерного уравнения (1) с квадратичной нелинейностью посвящено много работ (см., например, [1]).

В настоящей работе построены некоторые классы приближенных и точных решений уравнения (1). Непосредственно применить асимптотический метод [2, 3] к многомерному нелинейному уравнению (1) не представляется возможным.

Для построения решений (1) воспользуемся подстановкой

$$U = \varphi(\omega) f(x), \tag{2}$$

где φ — неизвестная функция, зависящая от трех новых переменных $\omega = \omega(x) = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$, и $f(x)$ — некоторая известная функция. Новые переменные ω и функция $f(x)$ являются первыми интегралами некоторой системы дифференциальных уравнений Лагранжа. Явный вид системы Лагранжа будет дан ниже, и он зависит от симметрийных свойств уравнения (1).

С помощью подстановки (2) из (1) получаем редуцированное уравнение для φ относительно новых переменных $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Полученное таким путем уравнение имеет размерность на единицу меньше, чем исходное уравнение (1). Это редуцированное уравнение аналогичным образом можно свести к уравнению, размерность которого снова будет на единицу меньше. В конце концов приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ), и уже к ним применяем либо асимптотические методы [1, 2], либо решаем их точно.

Итак, описав в общих чертах алгоритм получения приближенных и точных решений, остановимся более подробно на его применении к уравнению (1).

2. Для нахождения новых переменных ω и функции $f(x)$ используем групповые свойства (1). Уравнение (1) при произвольном k инвариантно относительно расширенной алгебры Галилея $AG_1(1, 3)$, базисные элементы которой имеют вид

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = (-i)\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad G_a = x_0 P_a + \\ + m x_a u \frac{\partial}{\partial U}, \quad D = x_0 P_0 - \vec{x}\vec{P} + \frac{2i}{k} U \frac{\partial}{\partial U} \quad a, b = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Новые переменные ω — это инварианты подгруппы расширенной группы Галилея $G_1(1, 3)$, т. е. являются первыми интегралами системы дифференциальных уравнений Лагранжа

$$\frac{dx_0}{\xi^0(x, u)} = \frac{dx_1}{\xi^1(x, U)} = \frac{dx_2}{\xi^2(x, U)} = \frac{dx_3}{\xi^3(x, U)} = \frac{dU}{\eta(x, U)}, \tag{4}$$

где ξ^0, ξ^1, ξ^2, ξ^3, η задаются формулами

$$\xi^0 = 2bx_0 + d_0, \quad \vec{\xi} = b\vec{x} + \vec{g}x_0 + \vec{\alpha} \times \vec{x} + \vec{d}, \quad \eta = -\left[im\vec{g}\vec{x} + \frac{2}{k} b\right] U, \tag{5}$$

b, $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$, d_0 — параметры группы $G_1(1, 3)$. В зависимости от соотношений между ними имеем несколько решений системы (4):

$$\omega_1 = \frac{\vec{\alpha}\vec{x}}{\sqrt{x_0}}, \quad \omega_2 = \frac{\vec{x}^2}{x_0}, \quad \omega_3 = -\ln x_0 + \operatorname{arctg}\frac{\vec{\beta}\vec{x}}{\vec{\gamma}\vec{x}}, \quad f(x) = x_0^{-1/k}, \tag{6}$$

$$\omega_1 = \frac{\vec{\alpha}\vec{x}}{\sqrt{x_0}}, \quad \omega_2 = \frac{\vec{\beta}\vec{x}}{\sqrt{x_0}}, \quad \omega_3 = \frac{\vec{\gamma}\vec{x}}{\sqrt{x_0}}, \quad f(x) = x_0^{-1/k}, \tag{7}$$

$$\omega_1 = \vec{\alpha}\vec{x}, \quad \omega_2 = \vec{x}^2, \quad \omega_3 = -x_0 + \operatorname{arctg}\frac{\vec{\beta}\vec{x}}{\vec{\gamma}\vec{x}}, \quad f(x) = 1, \tag{8}$$

$$\omega_1 = \vec{\alpha}\vec{x}, \quad \omega_2 = \vec{x},^2 \quad \omega_3 = x_0, \quad f(x) = 1, \tag{9}$$

$$\omega_1 = \vec{\alpha}\vec{x}, \quad \omega_2 = \vec{\beta}\vec{x}, \quad \omega_3 = x_0, \quad f(x) = 1, \tag{10}$$

где

$$\vec{\alpha}\vec{x} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \quad \vec{\beta}\vec{x} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3, \quad \vec{\gamma}\vec{x} = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3,$$
$$\vec{\alpha}^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad \vec{\beta}^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \quad \vec{\gamma}^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \tag{11}$$
$$\vec{\alpha}\vec{\beta} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0, \quad \vec{\beta}\vec{\gamma} = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0,$$
$$\vec{\gamma}\vec{\alpha} = \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0.$$

3. Подставляя (2) в (1) и используя инварианты (6)—(10), получаем соответственно следующие редуцированные уравнения:

$$\varphi_{11} + 4\omega_2\varphi_{22} + (\omega_2 - \omega_1^2)^{-1}\varphi_{33} + 4\omega_1\varphi_{12} + im\omega_1\varphi_1 + 2(im\omega_2 + 3)\varphi_2 + \\ + 2im\varphi_3 + \frac{2im}{k}\varphi - 2m\varepsilon|\varphi|^k\varphi = 0, \tag{12}$$

$$\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} + im(\omega_1\varphi_1 + \omega_2\varphi_2 + \omega_3\varphi_3) + \frac{2im}{k}\varphi - 2m\varepsilon|\varphi|^k\varphi = 0, \tag{13}$$

$$\varphi_{11} + 4\omega_2\varphi_{22} + (\omega_2 - \omega_1^2)^{-1}\varphi_{33} + 4\omega_1\varphi_{12} + 6\varphi_2 + 2im\varphi_3 - 2m\varepsilon|\varphi|^k\varphi = 0, \tag{14}$$

$$\varphi_{11} + 4\omega_2\varphi_{22} + 4\omega_1\varphi_{12} + 6\varphi_2 - 2im\varphi_3 - 2m\varepsilon|\varphi|^k\varphi = 0, \tag{15}$$

$$\varphi_{11}+\varphi_{22}-2im\varphi_3-2m\varepsilon\,|\varphi|^k\,\varphi=0, \tag{16}$$

где $\varphi_a=\partial\varphi/\partial\omega_a$, $\varphi_{aa}=\partial^2\varphi/\partial\omega_a^2$, $\varphi_{ab}=\partial^2\varphi/\partial\omega_a\partial\omega_b$, a, $b=1, 2, 3$.

Группа симметрии уравнений (12)—(15), вообще говоря, у́же, чем группа симметрии уравнения (1), поэтому мы не проводим дальнейшую их редукцию. Предположив, что в (12)—(15) φ зависит только от одной переменной ω (ω_1, либо ω_2, либо ω_3), сведем эти уравнения к ОДУ. Уравнение (16) в отличие от (12)—(15) при $k=2$ имеет более широкую группу симметрии, чем исходное уравнение (1), а при $k=4$ группа симметрии (16) не изменяется.

В случае $k=2$ уравнение (16) инвариантно относительно расширенной алгебры Галилея $AG_2(1,2)$ ($AG_2(1,2)\supset AG_1(1,2)$), базисные элементы которой имеют вид

$$P_3=i\frac{\partial}{\partial\omega_3},\quad P_a=(-i)\frac{\partial}{\partial\omega_a},\quad J_{ab}=\omega_aP_b-\omega_bP_a,$$
$$G_a=\omega_3P_a+m\omega_a\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},\quad D=\omega_3P_3-\vec{\omega}\vec{P}+\frac{2i}{k}\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{17}$$

$$A=\omega_3\left(\omega_3P_3-\vec{\omega}\vec{P}+\frac{2i}{k}\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)+\frac{m}{2}\vec{\omega}^2\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{18}$$

$a, b=1, 2$; $k=2$.

В случае $k=4$ уравнение (16) инвариантно относительно расширенной алгебры Галилея $AG_1(1,2)$, базисные элементы задаются формулой (17) ($k=4$).

Итак, поскольку уравнение (16) в случае $k=2$ имеет более широкую группу симметрии, чем уравнение (1) ($k=2$), а в случае $k=4$ его группа симметрии не сужается, то целесообразно провести дальнейшую редукцию.

Для расширенной группы Галилея $G_2(1,2)$ инварианты $\tilde{\omega}=\{\tilde{\omega}_1(\omega(x)), \tilde{\omega}_2(\omega(x))\}$ имеют следующий вид:

$$\tilde{\omega}_1=\frac{\vec{\omega}^2}{1-\omega_3^2},\quad \tilde{\omega}_2=\operatorname{arcth}\omega_3+\operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{\omega_2},\quad f(\omega)=(1-\omega_3^2)^{-1/k}e^{\frac{im}{2}\frac{\omega_3\vec{\omega}^2}{1-\omega_3^2}}, \tag{19}$$

$$\tilde{\omega}_1=\frac{\vec{\omega}^2}{\omega_3^2},\quad \tilde{\omega}_2=\omega_3^{-1}+\operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{\omega_2},\quad f(\omega)=\omega_3^{-2/k}e^{-\frac{im}{2}\frac{\vec{\omega}^2}{\omega_3}}, \tag{20}$$

$$\tilde{\omega}_1=\frac{\vec{\omega}^2}{1+\omega_3^2},\quad \tilde{\omega}_2=-\operatorname{arctg}\omega_3+\operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{\omega_2},\quad f(\omega)=(1+\omega_3^2)^{-1/k}\times$$
$$\times e^{-\frac{im}{2}\frac{\omega_3\vec{\omega}^2}{1+\omega_3^2}}, \tag{21}$$

$$\tilde{\omega}_1=\frac{\vec{\omega}^2}{\omega_3},\quad \tilde{\omega}_2=-\ln\omega_3+\operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{\omega_2},\quad f(\omega)=\omega_3^{-1/k}, \tag{22}$$

$$\tilde{\omega}_1=\frac{\vec{\beta}'\vec{\omega}}{\sqrt{\omega_3}},\quad \tilde{\omega}_2=\frac{\vec{\gamma}'\vec{\omega}}{\sqrt{\omega_3}},\quad f(\omega)=\omega_3^{-1/k}, \tag{23}$$

$$\tilde{\omega}_1=\vec{\omega}^2,\quad \tilde{\omega}_2=-\omega_3+\operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{\omega_2},\quad f(\omega)=1, \tag{24}$$

$$\tilde{\omega}_1=\vec{\omega}^2,\quad \tilde{\omega}_2=\omega_3,\quad f(\omega)=1, \tag{25}$$

$$\tilde{\omega}_1=\vec{\alpha}'\vec{\omega}+\omega_3\vec{\gamma}'\vec{\omega},\quad \tilde{\omega}_2=\omega_3,\quad f(\omega)=e^{-\frac{im}{2}\frac{(\vec{\alpha}'\vec{\omega})^2}{\omega_3}}, \tag{26}$$

$$\tilde{\omega}_1=\vec{\alpha}'\vec{\omega},\quad \tilde{\omega}_2=\omega_3,\quad f(\omega)=1, \tag{27}$$

где параметры $\vec{\alpha}' = (\alpha_1', \alpha_2')$, $\vec{\beta}' = (\beta_1', \beta_2')$, $\vec{\gamma}' = (\gamma_1', \gamma_2')$ удовлетворяют условиям

$$\vec{\alpha}'^2 = \vec{\beta}'^2 = \vec{\gamma}'^2 = 1, \quad \vec{\alpha}'\vec{\beta}' = \vec{\beta}'\vec{\gamma}' = \vec{\gamma}'\vec{\alpha}' = 0. \tag{28}$$

В случае $k = 2$ имеем девять наборов инвариантных переменных (19)—(27). В случае $k = 4$ имеем только пять наборов инвариантов (22)—(25), (27).

Для нахождения решения уравнения (16) применяем подстановку

$$\varphi = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}) f(\omega), \tag{29}$$

где $\tilde{\varphi}$ — неизвестная функция от двух переменных $\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\}$, подлежащая определению.

После подстановки (29) в (16) получаем следующие редуцированные уравнения:

при $k = 2$:

$$4\tilde{\omega}_1\tilde{\varphi}_{11} + \tilde{\omega}_1^{-1}\tilde{\varphi}_{22} + 4\tilde{\varphi}_1 - 2im\tilde{\varphi}_2 + m^2\tilde{\omega}_1\tilde{\varphi} - 2m\varepsilon|\tilde{\varphi}|^2\tilde{\varphi} = 0, \tag{30}$$

$$4\tilde{\omega}_1\tilde{\varphi}_{11} + \tilde{\omega}_1^{-1}\tilde{\varphi}_{22} + 4\tilde{\varphi}_1 + 2im\tilde{\varphi}_2 - 2m\varepsilon|\tilde{\varphi}|^2\tilde{\varphi} = 0, \tag{31}$$

$$4\tilde{\omega}_1\tilde{\varphi}_{11} + \tilde{\omega}_1^{-1}\tilde{\varphi}_{22} + 4\tilde{\varphi}_1 + 2im\tilde{\varphi}_2 - m^2\tilde{\omega}_1\tilde{\varphi} - 2m\varepsilon|\tilde{\varphi}|^2\tilde{\varphi} = 0, \tag{32}$$

$$4\tilde{\omega}_1\tilde{\varphi}_{11} + \tilde{\omega}_1^{-1}\tilde{\varphi}_{22} + 2(im\tilde{\omega}_1 + 2)\tilde{\varphi}_1 + 2im\tilde{\varphi}_2 + im\tilde{\varphi} - 2m\varepsilon|\tilde{\varphi}|^2\tilde{\varphi} = 0, \tag{33}$$

$$\tilde{\varphi}_{11} + \tilde{\varphi}_{22} + im(\tilde{\omega}_1\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\omega}_2\tilde{\varphi}_2) + im\tilde{\varphi} - 2m\varepsilon|\tilde{\varphi}|^2\tilde{\varphi} = 0, \tag{34}$$

$$4\tilde{\omega}_1\tilde{\varphi}_{11} + \tilde{\omega}_1^{-1}\tilde{\varphi}_{22} + 4\tilde{\varphi}_1 + 2im\tilde{\varphi}_2 - 2m\varepsilon|\tilde{\varphi}|^2\tilde{\varphi} = 0, \tag{35}$$

$$4\tilde{\omega}_1\tilde{\varphi}_{11} + 4\tilde{\varphi}_1 - 2im\tilde{\varphi}_2 - 2m\varepsilon|\tilde{\varphi}|^2\tilde{\varphi} = 0, \tag{36}$$

$$-\frac{1}{2m}(1 + \tilde{\omega}_2^2)\tilde{\varphi}_{11} + i\tilde{\omega}_2^{-1}\left(\tilde{\omega}_1\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\omega}_2\tilde{\varphi}_2 + \frac{1}{2}\tilde{\varphi}\right) + \varepsilon|\tilde{\varphi}|^2\tilde{\varphi} = 0, \tag{37}$$

$$i\tilde{\varphi}_2 - \frac{1}{2m}\tilde{\varphi}_{11} + \varepsilon|\tilde{\varphi}|^2\tilde{\varphi} = 0; \tag{38}$$

при $k = 4$:

$$4\tilde{\omega}_1\tilde{\varphi}_{11} + \tilde{\omega}_1^{-1}\tilde{\varphi}_{22} + 2(im\tilde{\omega}_1 + 2)\tilde{\varphi}_1 + 2im\tilde{\varphi}_2 + \frac{im}{2}\tilde{\varphi} - 2m\varepsilon|\tilde{\varphi}|^4\tilde{\varphi} = 0, \tag{39}$$

$$\tilde{\varphi}_{11} + \tilde{\varphi}_{22} + im(\tilde{\omega}_1\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\omega}_2\tilde{\varphi}_2) + \frac{im}{2}\tilde{\varphi} - 2m\varepsilon|\tilde{\varphi}|^4\tilde{\varphi} = 0, \tag{40}$$

$$4\tilde{\omega}_1\tilde{\varphi}_{11} + \tilde{\omega}_1^{-1}\tilde{\varphi}_{22} + 4\tilde{\varphi}_1 + 2im\tilde{\varphi}_2 - 2m\varepsilon|\tilde{\varphi}|^4\tilde{\varphi} = 0, \tag{41}$$

$$4\tilde{\omega}_1\tilde{\varphi}_{11} + 4\tilde{\varphi}_1 - 2im\tilde{\varphi}_2 - 2m\varepsilon|\tilde{\varphi}|^4\tilde{\varphi} = 0, \tag{42}$$

$$i\tilde{\varphi}_2 - \frac{1}{2m}\tilde{\varphi}_{11} + \varepsilon|\tilde{\varphi}|^4\tilde{\varphi} = 0. \tag{43}$$

В уравнениях (30) — (43) $\tilde{\varphi}_a = \partial\tilde{\varphi}/\partial\tilde{\omega}_a$, $\tilde{\varphi}_{aa} = \partial^2\tilde{\varphi}/\partial\tilde{\omega}_a^2$, $a = 1, 2$. Предположив, что в (30) — (43) $\tilde{\varphi}$ зависит только от одной переменной, приходим к ОДУ. Уравнения (38) и (43) в переменных $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ являются одномерными нелинейными уравнениями Шредингера. Уравнение (38) $\left(\frac{1}{2m} = 1\right)$ имеет хорошо известное солитонное решение в переменных $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ [1]:

$$\tilde\varphi(\tilde\omega_2, \tilde\omega_1) = A\,\frac{\exp\left\{i\left(\varphi_0 + \frac{v}{2}\,\tilde\omega_1 + \frac{u^2 - v^2}{4}\,\tilde\omega_2 - \frac{v}{2}\right)\right\}}{\operatorname{ch}\left\{\frac{u}{2}\,(\tilde\omega_1 - v\tilde\omega_2 - x_b\right\}}, \quad A = \frac{m_1}{\sqrt{\varepsilon/2}},$$
$$u = 2m_1. \tag{44}$$

Для уравнения (43) солитонных решений не найдено. Заметим, что группой симметрии уравнения (43) является $G_2(1, 1)$ ($G_2(1, 1) \supset G_1(1,1)$) и она шире, чем группа симметрии (16) ($k = 4$). Воспользуемся этим фактором для редукции и нахождения решений уравнения (43).

Инварианты $\tilde\omega$ и функция $f(\tilde\omega)$ для группы $G_2(1,1)$ имеют вид

$$\tilde{\tilde\omega} = \frac{\tilde\omega_1^2}{1 - \tilde\omega_2^2}, \quad f(\tilde\omega) = (1 - \tilde\omega_2^2)^{-1/4}\, e^{\frac{im}{2}\tilde{\tilde\omega}\,\tilde\omega_2}, \tag{45}$$

$$\tilde{\tilde\omega} = -\frac{\tilde\omega_1}{\tilde\omega_2}, \quad f(\tilde\omega) = (-\tilde\omega_2^{-1})^{1/2}\, e^{-\frac{im}{2}\tilde{\tilde\omega}^2\tilde\omega_2}, \tag{46}$$

Таблица 1

ω_0	ω_a	$A_3^{(1)}$	$B_3^{(1)}$	$A_3^{(3)}$	$B_3^{(3)}$	γ	$f(x)$
$(im\lambda + m^2\lambda^2)^{1/2}$	$-\ln x_0 + \operatorname{arctg}\frac{\vec\beta\vec x}{\vec\gamma\vec x}$	$-\frac{3}{4}\,m\lambda$	$-\frac{3}{4}\,\frac{(im\lambda + m^2\lambda^2)^{1/2}}{i}$	$\frac{3im\lambda - 2}{8\,(3m\lambda + 4i)}$	$-\frac{3}{8}\,\frac{(im\lambda + m^2\lambda^2)^{1/2}}{(4i + 3m\lambda)}$	$im\lambda$	$x_0^{-1/2}$
$\sqrt{2}m\lambda$	$\operatorname{arcth} x_0 + \operatorname{arctg}\frac{\vec\alpha\vec x}{\vec\beta\vec x}$	$\frac{3}{4}\,i$	$-\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{5}{56}\,m\lambda$	$\frac{3\sqrt{2}i}{56m\lambda}$	$-im\lambda$	$(1 - x_0^2)^{-1/2} e^{\frac{im}{2}\,\frac{x_0\{(\vec\alpha\vec x)^2 + (\vec\beta\vec x)^2\}}{1 - x_0^2}}$
0	$-\operatorname{arctg} x_0 + \operatorname{arctg}\frac{\vec\alpha\vec x}{\vec\beta\vec x}$	$\frac{3}{4}\,i$	0	$-\frac{1}{8m\lambda}$	0	$im\lambda$	$(1 + x_0^2)^{-1/2} e^{-\frac{im}{2}\,\frac{x_0\{(\vec\alpha\vec x)^2 + (\vec\beta\vec x)^2\}}{1 + x_0^2}}$
$(im\lambda + m^2\lambda^2)^{1/2}$	$-\ln x_0 + \operatorname{arctg}\frac{\vec\alpha\vec x}{\vec\beta\vec x}$	$-\frac{3}{4}m\lambda$	$-\frac{3}{4}\,\frac{(im\lambda + m^2\lambda^2)^{1/2}}{i}$	$\frac{3im\lambda - 2}{8\,(3m\lambda + 4i)}$	$-\frac{3}{8}\,\frac{(im\lambda + m^2\lambda^2)^{1/2}}{(4i + 3m\lambda)}$	$im\lambda$	$x_0^{-1/2}$
0	$\ln c\left\{\frac{(\vec\alpha\vec x)^2 + (\vec\beta\vec x)^2}{x_0^2}\right\}$	$\frac{3}{8}\,m$	0	m/[illegible]	0	$-1/2$	$\pm\{(\vec\alpha\vec x)^2 + (\vec\beta\vec x)^2\}^{-1/2} e^{-\frac{im}{2}\,\frac{(\vec\alpha\vec x)^2 + (\vec\beta\vec x)^2}{x_0}}$
0	$\ln c\,\{(\vec\alpha\vec x)^2 + (\vec\beta\vec x)^2\}$	$\frac{3}{8}\,m$	0	$\frac{m}{8}$	0	$-1/2$	$(\{(\vec\alpha\vec x)^2 + (\vec\beta\vec x)^2\}^{-1/2}$

$$\tilde{\tilde{\omega}} = \frac{\tilde{\omega}_1^2}{1 + \tilde{\omega}_2^2}, \quad f(\tilde{\omega}) = (1 + \tilde{\omega}_2^2)^{-1/4} e^{-\frac{im}{2}\tilde{\tilde{\omega}}\tilde{\omega}_2}. \tag{47}$$

Проведем редукцию уравнения (43) с помощью подстановки

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\tilde{\varphi}}(\tilde{\tilde{\omega}}) f(\tilde{\omega}). \tag{48}$$

Подстановка (48) в (43) приводит к следующим ОДУ:

$$4\tilde{\tilde{\omega}}\tilde{\tilde{\varphi}}'' + 2\tilde{\tilde{\varphi}}' + m^2\tilde{\tilde{\omega}}\tilde{\tilde{\varphi}} - 2m\varepsilon\,|\tilde{\tilde{\varphi}}|^4\,\tilde{\tilde{\varphi}} = 0, \tag{49}$$

$$\tilde{\tilde{\varphi}}'' - 2m\varepsilon\,|\tilde{\tilde{\varphi}}|^4\,\tilde{\tilde{\psi}} = 0, \tag{50}$$

$$4\tilde{\tilde{\omega}}\tilde{\tilde{\varphi}}'' + 2\tilde{\tilde{\varphi}}' - m^2\tilde{\tilde{\omega}}\tilde{\tilde{\varphi}} - 2m\varepsilon\,|\tilde{\tilde{\varphi}}|^4\,\tilde{\tilde{\varphi}} = 0, \tag{51}$$

где $\tilde{\tilde{\varphi}}'' = d^2\tilde{\tilde{\varphi}}/d\tilde{\tilde{\omega}}^2$, $\tilde{\tilde{\varphi}}' = d\tilde{\tilde{\varphi}}/d\tilde{\tilde{\omega}}$.

4. Не вдаваясь в подробности применения асимптотических методов [1, 2] к редуцированным ОДУ, приведем окончательный вид асимптотических решений уравнения (1) в первом приближении. В случае $k = 2$ получены решения

$$U = \{a\cos\Psi + \varepsilon A_3^{(3)} a^3 \cos 3\Psi + \varepsilon B_3^{(3)} a^3 \sin 3\Psi\} f(x), \tag{52}$$

где

$$a = a_0 e^{-\gamma\omega_a}\left(1 + a_0^2\frac{\varepsilon}{\gamma}A_3^{(1)}e^{-2\gamma\omega_a}\right)^{-1/2},$$

$$\Psi = \Psi_0 + \omega_0\omega_a - \frac{1}{2}\frac{B_3^{(1)}}{A_3^{(1)}}\ln\left(1 + a_0^2\frac{\varepsilon}{\gamma}A_3^{(1)}e^{-2\gamma\omega_a}\right),$$

a_0, Ψ_0 — произвольные постоянные. ω_0, ω_a, $A_3^{(1)}$, $B_3^{(1)}$, $A_3^{(3)}$, $B_3^{(3)}$, γ, $f(x)$ приведены в табл. 1 ($\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ удовлетворяют условию (11)).

Таблица 2

ω_0	ω_a	$A_5^{(1)}$	$B_5^{(1)}$	$B_5^{(3)}$	$A_5^{(5)}$	$B_5^{(5)}$	γ	$f(x)$
$\left(\frac{im\lambda}{2} + m^2\lambda^2\right)^{1/2}$	$-\ln x_0 + \operatorname{arctg}\frac{\vec{\beta}\vec{x}}{\vec{\gamma}\vec{x}}$	$-\frac{5}{2}\frac{m\lambda}{1 + 6im\lambda}$	$-\frac{5}{4}\frac{\left(\frac{im\lambda}{2} + m^2\lambda^2\right)^{1/2}}{i - 6m\lambda}$	$-\frac{15}{16}\frac{\left(\frac{im\lambda}{2} + m^2\lambda^2\right)^{1/2}}{i - 6m\lambda}$	$\frac{1}{32}\frac{10im\lambda - 3}{9i + 10m\lambda}$	$-\frac{5}{16}\frac{\left(\frac{im\lambda}{2} + m^2\lambda^2\right)^{1/2}}{9i + 10m\lambda}$	$im\lambda$	$x_0^{-1/4}$
$\left(\frac{im\lambda}{2} + m^2\lambda^2\right)^{1/2}$	$-\ln x_0 + \operatorname{arctg}\frac{\vec{\alpha}\vec{x}}{\vec{\gamma}\vec{x}}$	$-\frac{5}{2}\frac{m\lambda}{1 + 6im\lambda}$	$-\frac{5}{4}\frac{\left(\frac{im\lambda}{2} + m^2\lambda^2\right)^{1/2}}{i - 6m\lambda}$	$-\frac{15}{16}\frac{\left(\frac{im\lambda}{2} + m^2\lambda^2\right)^{1/2}}{i - 6m\lambda}$	$\frac{1}{32}\frac{10im\lambda - 3}{9i + 10m\lambda}$	$-\frac{5}{16}\frac{\left(\frac{im\lambda}{2} + m^2\lambda^2\right)^{1/2}}{9i + 10m\lambda}$	$im\lambda$	$x_0^{-1/4}$
0	$\ln c\,\{(\vec{\alpha}\vec{x})^2 + (\vec{\beta}\vec{x})^2\}$	$\frac{5}{16}m$	0	0	$\frac{m}{32}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\{(\vec{\alpha}\vec{x})^2 + (\vec{\beta}\vec{x})^2\}^{-1/4}$

В случае $k=4$ получены следующие решения:

$$U=\{a\cos\Psi+\varepsilon A_5^{(3)}a^5\cos 3\Psi+\varepsilon B_5^{(3)}a^5\sin 3\Psi+\varepsilon A_5^{(5)}a^5\cos 5\Psi+$$
$$+\varepsilon B_5^{(5)}a^5\sin 5\Psi\}f(x) \tag{53}$$

где $a=a_0e^{-\gamma\omega_a}\left(1+a_0^4\frac{\varepsilon}{\gamma}A_5^{(1)}e^{-4\gamma\omega_a}\right)^{-1/4}$, $\Psi=\Psi_0+\omega_0\omega_a-\frac{1}{4}\frac{B_5^{(1)}}{A_5^{(1)}}\times$ $\times\ln\left(1+a_0^4\frac{\varepsilon}{\gamma}A_5^{(1)}e^{-4\gamma w_a}\right)$, a_0, Ψ_0 — произвольные постоянные, ω_0, ω_a, $A_5^{(1)}$, $B_5^{(1)}$, $A_5^{(3)}$, $B_5^{(3)}$, $A_5^{(5)}$, $B_5^{(5)}$, γ, $f(x)$ приведены в табл. 2 ($\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ удовлетворяют условию (11)).

5. Некоторые из редуцированных уравнений удалось проинтегрировать. В результате получены следующие классы точных решений уравнения (1):

при $k=2$

$$U(x)=\pm x_0^{-1/2}(C_1-2i\varepsilon\ln x_0)^{-1/2}e^{-\frac{im}{2}\frac{\alpha_1'^2(\vec{\alpha}\vec{x})^2+\alpha_2'^2(\vec{\beta}\vec{x})^2}{x_0}}, \tag{54}$$

$$U(x)=\sqrt{\frac{1}{m\varepsilon}}(\vec{\alpha}\vec{x}-c_1)^{-1}, \tag{55}$$

$$U(x)=\pm\{(\vec{\alpha}\vec{x})^2+(\vec{\beta}\vec{x})^2\}^{-1/2}e^{-\frac{im}{2}\frac{(\vec{\alpha}\vec{x})^2+(\vec{\beta}\vec{x})^2}{x_0}},\quad 2m\varepsilon=1, \tag{56}$$

$$U(x)=\{(\vec{\alpha}\vec{x})^2+(\vec{\beta}\vec{x})^2\}^{-1/2},\quad 2m\varepsilon=1, \tag{57}$$

$$U(x)=\left\{\frac{2\varepsilon}{i}x_0+c_1\right\}^{-1/2}, \tag{58}$$

$$U(x)=A\frac{\exp\left\{i\left(\varphi_0+\frac{v}{2}(\alpha_1'\vec{\alpha}\vec{x}+\alpha_2'\vec{\beta}\vec{x})+\frac{u^2-v^2}{4}x_0-\frac{v}{2}\right)\right\}}{\operatorname{ch}\left\{\frac{u}{2}(\alpha_1'\vec{\alpha}\vec{x}+\alpha_2'\vec{\beta}\vec{x}-vx_0-x_b)\right\}},\quad \frac{1}{2m}=1, \tag{59}$$

$A=\frac{m_1}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}}$, $u=2m_1$, m_1, φ_0, v, x_b, u — параметры;

при $k=4$

$$U(x)=\left(\frac{4\varepsilon}{i}x_0+c_1\right)^{-1/4}, \tag{60}$$

$$U(x)=\pm B(\vec{\alpha}\vec{x}+c_1)^{-1/2},\quad B=\left(-2\sqrt{\frac{2}{3}m\varepsilon}\right)^{-1/2}, \tag{61}$$

$$U(x)=\pm B\left(-\frac{\alpha_1'\vec{\alpha}\vec{x}+\alpha_2'\vec{\beta}\vec{x}}{x_0}+c_1\right)^{-1/2}(-x_0^{-1})^{1/2}e^{-\frac{im}{2}\frac{(\alpha_1'\vec{\alpha}\vec{x}+\alpha_2'\vec{\beta}\vec{x})^2}{x_0}}, \tag{62}$$

$$U(x)=\{(\vec{\alpha}\vec{x})^2+(\vec{\beta}\vec{x})^2\}^{-1/4},\quad 2m\varepsilon=\frac{1}{4}, \tag{63}$$

$$U(x)=\{x_1^2+x_2^2+x_3^2\}^{-1/4},\quad 2m\varepsilon=-\frac{1}{4}. \tag{64}$$

В формулах (54) — (64) параметры $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ удовлетворяют (11), а параметры $\vec{\alpha}'=(\alpha_1', \alpha_2')$ — условию (28).

Таким образом, формулы (52), (53) дают асимптотические решения уравнения (1) соответственно в случаях $k = 2$ и $k = 4$, а формулы (54)—(59) и (60)—(64) — точные решения (1) в случаях $k = 2$ и $k = 4$.

Метод, с помощью которого в работе получены асимптотические и точные решения, может быть успешно применен и для нахождения решений других нелинейных уравнений, инвариантных относительно группы Галилея.

1. *Теория солитонов*: Метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.— М. : Наука, 1980.— 319 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 500 с.
3. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных.— Киев : Вища шк., 1976.— 620 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 09.06.87

УДК 517.544

И. М. Спитковский, П. М. Тишин

О частных индексах треугольных матриц порядка выше 2

Пусть Γ — замкнутый спрямляемый контур, ограничивающий конечносвязную область D^+, D^- ($\ni \infty$) — дополнение к $D^+ \cup \Gamma$ до полной плоскости. Обозначим через $E_r^{\pm}$, $0 < r \leqslant \infty$, классы Смирнова функций, аналитических в $D^{\pm}$, $\overset{0}{E}{}_r^- = \{\varphi \in E_r^- : \varphi(\infty) = 0\}$. Факторизацией в L_p, $1 < p < \infty$, заданной на Γ $(n \times n)$ — матрицы-функции G, как известно (см., например, [1]), называется ее представление в виде

$$G = G_+ \Lambda G_-^{-1}, \tag{1}$$

где $G_{\pm} \in E_p^{\pm}$, $G_{\pm}^{-1} \in E_q^{\pm}$ (принадлежность матриц-функций каким-либо функциональным классам здесь и ниже понимается поэлементно, $q = p/(p-1)$), $\Lambda(t) = \mathrm{diag}\,[(t - z_0)^{\varkappa_1}, \ldots, (t - z_0)^{\varkappa_n}]$, z_0 — фиксированная точка области D^+, $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ — целые числа, называемые частными индексами G. Без ограничения общности можно считать, что $0 \in D^+$, и выбирать $z_0 = 0$. При фиксированном p частные индексы определяются по матрице G однозначно.

Если $G \in L_\infty$, то для нетеровости в L_p векторной краевой задачи Римана с матричным коэффициентом G необходимо и достаточно, чтобы существовала факторизация (1), для которой оператор $G_-^{-1} \Lambda^{-1} P_- G_+^{-1}$ (P_- — определенный на прямой сумме $E_p^+ \dot{+} \overset{0}{E}{}_p^-$ проектор параллельно первому слагаемому на второе) ограничен в L_p. Такая факторизация называется Ф-факторизацией в L_p матрицы G.

Вопросам существования факторизации, Ф-факторизации и вычисления частных индексов при различных ограничениях на контур Γ и матрицу-функцию G посвящена обширная литература (см. [1—4] и приведенную там библиографию). Нас будет интересовать случай треугольной матрицы $G \in L_\infty$ с Ф-факторизуемыми в L_p диагональными элементами. В этом случае матрица G также Ф-факторизуема в L_p, а ее факторизацию можно получить с помощью конечного числа алгебраических операций и решений скалярных задач Римана [1]. Тем самым в принципе можно вычислить частные индексы произвольной треугольной матрицы-функции с Ф-факторизуемыми диагональными элементами. Г. Н. Чеботарев [5] (см. также [1]) указал алгоритм вычисления частных индексов при $n = 2$, согласно которому $\varkappa_1 = k_1 + \gamma$, $\varkappa_2 = k_2 - \gamma$, где k_1, k_2 — индексы диагональных элементов, рас-