5. *Арлинский Ю. М., Цекановский Э. Р.* О секториальных расширениях положительных эрмитовых операторов и их резольвентах // Докл. АН АрмССР.—1984.— **79**, № 5.— С. 199—203.
6. *Колманович В. Ю., Маламуд М. М.* О расширениях секториальных операторов и дуальных пар сжатий.— Донецк, 1985.— 57 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 4428-85.

Ворошиловград. машиностроит. ин-т Получено 08.08.85

УДК 519.21

Е. Б. Баховец

О связи целочисленных марковских мер и мер с независимыми значениями

Понятие марковской меры ввел А. В. Скороход, который получил [1] представления некоторых классов марковских мер.

Пусть $(X, \mathfrak{A})$ — измеримое пространство, $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ — вероятностное пространство, $\mathbb{Z}^+$ — множество неотрицательных целых чисел.

Определение 1. *Функцию* $\mu: \mathfrak{A}\times\Omega \to \mathbb{Z}^+$ *назовем целочисленной марковской мерой, если:*

1) $\forall A \in \mathfrak{A}$ $\mu(A; \cdot)$ *является случайной величиной;*
2) $\mu(\cdot; \omega)$ — *конечно-аддитивная мера п. н.;*
3) $\mu(A_1), \ldots, \mu(A_n)$ — *цепь Маркова, как только* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n$.

Заметим, что целочисленные меры с независимыми значениями (случайные меры, удовлетворяющие условиям 1 и 2 определения 1 и условию независимости $\mu(A_1), \ldots, \mu(A_n)$ для непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_n$ из $\mathfrak{A}$) являются частным случаем марковских мер. В качестве менее тривиального примера марковской меры можно привести случайную целочисленную меру, конечномерные распределения которой удовлетворяют соотношению

$$P\{\mu(A_1) = k_1, \ldots, \mu(A_n) = k_n\} = \frac{f^{(k_1)}(A_1; 0)}{k_1!} \cdots$$

$$\cdots \frac{f^{(k_n)}(A_n; 0)}{k_n!} \sum_r \varphi^{(k_1+\ldots+k_n+r)}(0) \frac{f^{(r)}\left(\overline{\sum_1^n A_i}; 0\right)}{r!}, \quad A_i \cap A_j = \varnothing. \tag{1}$$

Здесь $\varphi(z)$, $f(A; z)$, $A \in \mathfrak{A}$ — семейство аналитических при $|z| < c$ функций, у которых производные всех порядков в нуле неотрицательны, $f(A; 0) = 1$, причем $f(A_1 + A_2; z) = f(A_1; z) f(A_2; z)$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, и $\sum_k \varphi^{(k)}(0) \frac{f^{(k)}(X; 0)}{k!} = 1$.

В дальнейшем будем считать, что $\mathfrak{A}$ — счетная алгебра, $\mathfrak{A} = \bigcup \mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_n$ конечные алгебры с атомами $A_1^n, \ldots, A_{r_n}^n$, $\mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{A}_{n+1}$.

Определение 2. *Целочисленную марковскую меру, для которой* $\lim_n \max_{1\leqslant i\leqslant r_n} \mu(A_i^n) \leqslant 1$ *с вероятностью* 1, *будем называть считающей марковской мерой.*

Целью настоящей работы является получение представления характеристического функционала считающей марковской меры при некоторых дополнительных условиях.

Приведем, прежде всего, некоторые вспомогательные определения и результаты, которые понадобятся в дальнейшем.

Определение 3. *Будем говорить, что целочисленная марковская мера* μ *принадлежит классу* M_0, $\mu \in M_0$, *если из того, что*

$$P\{\mu(A_1)=k_1,\dots,\mu(A_s)=k_s\}=0,\quad P\{\mu(A_i)=k_i\}>0,$$
$$i=\overline{1,s},\ A_i\cap A_j=\varnothing,\ i\neq j,$$

следует $P\left\{\mu\left(\sum_1^s A_i\right)=k_1+\dots+k_s\right\}=0.$

Очевидно, что мера μ, распределения которой задаются (1), принадлежит классу M_0.

Лемма 1. *Если* $\mathfrak{A}$ — *алгебра, порожденная конечным разбиением* $\mathcal{D}=(A_1,\dots,A_n)$ *множества* X, $\nu\in M_0$, $\nu(A_i)\leqslant 1$, $0<P\{\nu(A_i)=1\}<1$, $i=\overline{1,n}$, *то для* $(a_1,\dots,a_n)\in\{0,1\}^n$

$$P\{\nu(A_1)=a_1,\dots,\nu(A_n)=a_n\}=P\{\nu(X)=r\}\times$$
$$\times\frac{\alpha_1^{a_1}\dots\alpha_n^{a_n}}{\sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_r\leqslant n}\alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_r}},\tag{2}$$

где $r=\sum_1^n a_i$, $\alpha_i=P\{\nu(A_i)=1,\ \nu(X-A_i)=0\}$, $i=\overline{1,n}$.

Доказательство см. в работе [2].

Пусть μ_n: $\mathfrak{A}_n\times\Omega\to\mathbb{Z}^+$ — марковские меры вида (1), $\mu_n(A_i^n)\leqslant 1$, $i=\overline{1,r_n}$, $n=1,2,\dots$. т. е. для $B_1,\dots,B_s\in\mathfrak{A}_n$, $B_i\cap B_j=\varnothing$

$$P\{\mu_n(B_1)=l_1,\dots,\mu_n(B_s)=l_s\}=\frac{f_n^{(l_1)}(B_1;0)}{l_1!}\dots\frac{f_n^{(l_s)}(B_s;0)}{l_s!}\times$$

$$\times\sum_r\varphi_n^{(r+l_1+\dots+l_s)}(0)\,\frac{f_n^{(r)}\left(\overline{\sum\limits_1^s B_j};0\right)}{r!},\ f_n^{(m)}(A_i^n;0)=0,\ m\geqslant 2,$$

$$i=\overline{1,r_n},\ n=1,2,\dots$$

Будем говорить, что последовательность μ_n удовлетворяет условию S_1, если существует счетное число непересекающихся множеств $E_1,\dots,E_s,\dots$ $\dots,\Sigma E_i=X$, что $\underline{\lim}_n P\{\mu_n(E_i)=1,\ \mu_n(X-E_i)=0\}>0$, $i=1,2,\dots$

Теорема 1 [2]. *Для сходимости распределений* $\mu_n(B_1),\dots,\mu_n(B_s)$, $B_i\in\mathfrak{A}$, $i=\overline{1,s}$, *к некоторому предельному распределению при выполнении условия* S_1 *необходимо, а при выполнении условия* $\underline{\lim}_n P\{\mu_n(X)=1\}>0$ *достаточно существования пределов*

$$\lim_n P\{\mu_n(X)=k\}=b_k,\ \sum_k b_k=1,\ \lim_n\sum_{A_j^n\subset A}P^l\{\mu_n(A_j^n)=1,$$
$$\mu_n(X-A_j^n)=0\}=m_l(A),\ \forall A\in\mathfrak{A}$$

для таких l, *что* $\sum_l^\infty b_i>0$. *В этом случае предельное распределение является распределением марковской меры вида* (1) *с*

$$f(A;z)=\exp\left(\sum_{i=1}^\infty\frac{(-1)^{i-1}}{i}m_i(A)z^i\right),\quad\varphi(z)=\sum_k\frac{b_k}{f^{(k)}(X;0)}z^k.$$

Рассмотрим марковскую меру ν, заданную на конечной алгебре $\mathfrak{B}$ с атомами $B_1, \dots, B_n$, $\nu(B_i) \leqslant 1$, $i = \overline{1, n}$. Обозначим

$$\alpha_i = P\{\nu(B_i) = 1, \quad \nu(X - B_i) = 0\}, \quad i = \overline{1, n};$$

$$I = \{i : \alpha_i > 0\} \equiv \{i_1, \dots, i_s\}; \; \beta_i = P\{\nu(X) = i\}, \quad i = \overline{1, n};$$

$$\tilde{P}_{j_1 \dots j_l} = P\left\{\nu(B_{j_1}) = 1, \dots, \nu(B_{j_l}) = 1, \; \nu\left(X - \sum_1^l B_{j_k}\right) = 0\right\}.$$

Лемма 2.

$$\tilde{P}_{j_1 \dots j_l} = \beta_l \frac{\alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_l}}{\sum\limits_{\{k_1 \dots k_l\} \subset \{1 \dots n\}} \alpha_{k_1} \dots \alpha_{k_l}}, \quad l \leqslant s. \tag{3}$$

Доказательство. Покажем сначала, что $\tilde{P}_{j_1 \dots j_l} > 0$, $l \leqslant s$, тогда и только тогда, когда $\{j_1 \dots j_l\} \subset I$, $\beta_l > 0$. Доказательство необходимости проведем индукцией по l. При $l = 1$ утверждение следует из определения 1. Пусть оно верно для k, $\beta_k > 0$ и $\beta_{k+1} = \dots = \beta_{k+p-1} = 0$, $\beta_{k+p} > 0$, $k + p \leqslant s$. Предположим, что $\tilde{P}_{j_1 \dots j_{k+p}} > 0$, $j_{k+p} \bar{\in} I$. Выбирая $i_m \in I$, $i_m \bar{\in} \{j_1 \dots j_{k+p}\}$ и приравнивая условные вероятности

$$P\left\{\nu(X) = k + p / \nu\left(X - \sum_1^{k+p-1} B_{j_i}\right) = 1, \; \nu(B_{j_{k+p}}) = 1\right\},$$

$$P\left\{\nu(X) = k + p / \nu\left(X - \sum_1^{k+p-1} B_{j_i}\right) = 1, \; \nu(B_{i_m}) = 1\right\},$$

заключаем, что

$$\frac{\tilde{P}_{j_1 \dots j_{k+p}}}{\sum\limits_{l=0}^{k+p-1} \sum\limits_{\{k_1 \dots k_l\} \subset \{j_1 \dots j_{k+p-1}\}} \tilde{P}_{k_1 \dots k_l j_{k+p}}} = \frac{\tilde{P}_{j_1 \dots j_{k+p-1} i_m}}{\sum\limits_{l=0}^{k+p-1} \sum\limits_{\{k_1 \dots k_l\} \subset \{j_1 \dots j_{k+p-1}\}} \tilde{P}_{k_1 \dots k_l i_m}}.$$

Отсюда согласно предположению индукции следует $1 \leqslant \dfrac{\tilde{P}_{j_1 \dots j_{k+p-1} i_m}}{\tilde{P}_{j_1 \dots j_{k+p-1} i_m} + \alpha_{i_m}}$, хотя $\alpha_{i_m} > 0$. Что касается достаточности, то при $\{j_1 \dots j_{l-1}, k, m\} \subset I$, $\beta_l > 0$, $l \leqslant s$, справедливо соотношение

$$\frac{\tilde{P}_{j_1 \dots j_{l-1} k}}{\alpha_k + \sum\limits_{m=0}^{l-1} \sum\limits_{\{r_1 \dots r_m\} \subset \{j_1 \dots j_{l-1}\}} \tilde{P}_{r_1 \dots r_m k}} = \frac{\tilde{P}_{j_1 \dots j_{l-1} m}}{\alpha_m + \sum\limits_{n=0}^{l-1} \sum\limits_{\{r_1 \dots r_n\} \subset \{j_1 \dots j_{l-1}\}} \tilde{P}_{r_1 \dots r_n m}},$$

а значит, вероятности $\tilde{P}_{j_1 \dots j_{l-1} k}$, $\tilde{P}_{j_1 \dots j_{l-1} m}$ либо положительны, либо обращаются в 0 одновременно, что и доказывает утверждение.

Рассмотрим сужение меры ν на $X' = \bigcup\limits_{j=1}^{s} B_{i_j}$, т. е. случайную меру ν' на $(X', \mathfrak{B} \cap X')$, распределения которой

$$\tilde{P}'_{j_1 \dots j_l} \equiv P\left\{\nu'(B_{i_{j_1}}) = 1, \dots, \nu'(B_{i_{j_l}}) = 1, \; \nu'\left(X' - \sum_{k=1}^{l} B_{i_{j_k}}\right) = 0\right\} =$$

$$= P\left\{\nu(B_{i_{j_1}}) = 1, \dots, \nu(B_{i_{j_l}}) = 1, \; \nu\left(X - \sum_{k=1}^{l} B_{i_{j_k}}\right) = 0\right\}, \; l \leqslant s,$$

$$P\{\nu'(X') = 0\} = 1 - \sum_1^s \beta_i.$$

Мера ν' на X' принадлежит классу M_0, поэтому из леммы 1 следует

$$\tilde{P}'_{j_1 \ldots j_l} = \frac{\alpha_{i_{j_1}} \ldots \alpha_{i_{j_l}}}{\sum\limits_{\{k_1 \ldots k_l\} \subset \{1 \ldots s\}} \alpha_{i_{k_1}} \ldots \alpha_{i_{k_l}}} P\{\nu'(X') = l\}, \quad 0 < l \leqslant s,$$

$$\{j_1 \ldots j_l\} \subset \{1 \ldots s\},$$

что влечет (3).

Будем говорить, что мера μ удовлетворяет условию S, если существует счетное число непересекающихся множеств E_i, $E_i \in \mathfrak{A}$, $\bigcup E_i = X$, что $P\{\mu(E_i) = 1,\ \mu(X - E_i) = 0\} > 0$, $i = 1, 2, \ldots$ Введем следующие обозначения:

$$\alpha_{i,n} = P\{\mu(A_i^n) = 1,\ \mu(X - A_i^n) = 0\}, \qquad i = \overline{1, r_n};$$

$$I_n(A) = \{i\colon A_i^n \subset A\}, \quad A \in \mathfrak{A}_n; \ \sigma_{i,n}(A) = \sum_{\{j_1 \ldots j_i\} \subset I_n(A)} \alpha_{j_1,n} \ldots \alpha_{j_i,n}, \ i = \overline{1, r_n}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Конечномерные распределения марковской считающей меры* μ, *удовлетворяющей условию* S, *представимы в виде* (1) *и* $\mu \in M_0$.

Доказательство. Пусть $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\sum\limits_1^l A_i = X$, $A_i \in \mathfrak{A}$. Поскольку μ — считающая марковская мера, то

$$P\{\mu(A_1) = k_1, \ldots, \mu(A_l) = k_l\} =$$
$$= \lim_n P\{\mu(A_1) = k_1, \ldots, \mu(A_l) = k_l,\ \max_i \mu(A_i^n) \leqslant 1\} =$$
$$= \lim_n P\{\mu_n(A_1) = k_1, \ldots, \mu_n(A_l) = k_l\}.$$

Здесь μ_n — целочисленная марковская мера, заданная на $(X, \mathfrak{A}_n)$, $\max\limits_i \mu_n(A_i^n) \leqslant 1$, $P\{\mu_n(A_1^n) = a_1, \ldots, \mu_n(A_{r_n}^n) = a_{r_n}\} = P\{\mu(A_1^n) = a_1, \ldots, \mu(A_{r_n}^n) = a_{r_n}\}$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}^{r_n}$, $\sum\limits_1^{r_n} a_i < r_n$.

В силу условия S при достаточно больших n среди $\alpha_{i,n}$, $i = \overline{1, r_n}$, будет не менее $k_1 + \ldots + k_l$ положительных, поэтому согласно лемме 2 при достаточно больших n в случае $\sum\limits_1^{r_n} a_i \leqslant k_1 + \ldots + k_l$

$$P\left\{\mu_n(A_1^n) = a_1, \ldots, \mu_n(A_{r_n}^n) = a_{r_n}\right\} = P\left\{\mu_n(X) = \sum_1^{r_n} a_i\right\} \times$$

$$\times \frac{\alpha_{1,n}^{a_1} \ldots \alpha_{r_n,n}^{a_{r_n}}}{\sigma_{\sum\limits_1^{r_n} a_i, n}(X)}.$$

Следовательно,

$$P\{\mu_n(A_1) = k_1, \ldots, \mu_n(A_l) = k_l\} = P\{\mu_n(X) = k_1 + \ldots + k_l\} \times$$
$$\times \frac{\sigma_{k_1,n}(A_1) \ldots \sigma_{k_l,n}(A_l)}{\sigma_{k_1 + \ldots + k_l, n}(X)}.$$

Рассмотрим последовательность «усеченных» мер $\tilde{\mu}_n$, заданных на $(X, \mathfrak{A}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, таких, что $P\{\tilde{\mu}_n(A_1^n) = a_1, \ldots, \tilde{\mu}_n(A_{r_n}^n) = a_{r_n}\} = P\{\mu_n(A_1^n) =$

$= a_1, \dots, \mu_n (A_n^{r_n}) = a_{r_n}\}$, если $0 < \sum_1^{r_n} a_i \leqslant k_1 + \dots + k_l$; $P\{\tilde{\mu}_n(X) = k\} = 0$, если $k > k_1 + \dots + k_l$; $P\{\tilde{\mu}_n(X) = 0\} = 1 - \sum_1^{k_1+\dots+k_l} P\{\mu_n(X) = i\} \equiv \tilde{\beta}_{0,n}$. Меры $\tilde{\mu}_n$ при достаточно больших n являются марковскими мерами с конечномерными распределениями

$$P\{\tilde{\mu}_n(B_1) = l_1, \dots, \tilde{\mu}_n(B_s) = l_s\} = \frac{f_n^{(l_1)}(B_1; 0)}{l_1!} \dots \frac{f_n^{(l_s)}(B_s; 0)}{l_s!} \times$$

$$\times \sum_r \varphi_n^{(l_1+\dots+l_s+r)}(0) \frac{f_n^{(r)}\left(\overline{\sum_1^s B_i}; 0\right)}{r!}, \quad n = 1, 2, \dots; \ B_1, \dots, B_s \in \mathfrak{A}_n,$$

$$B_i \cap B_j = \varnothing, \ i \neq j,$$

где $f_n(A; z) = \prod_{i \in I_n(A)} (\alpha_{i,n} z + 1)$, $\varphi_n(z) = \sum_{j=1}^{k_1+\dots+k_l} \frac{P\{\mu_n(X) = j\}}{\sigma_{j,n}(X)\, j!} z^j + \tilde{\beta}_{0,n}$, причем меры $\tilde{\mu}_n$ удовлетворяют для достаточно больших n условиям теоремы 1. Поскольку $\lim_n P\{\tilde{\mu}_n(B_1) = l_1, \dots, \tilde{\mu}_n(B_s) = l_s\} = P\{\mu(B_1) = l_1, \dots$ $\dots, \mu(B_s) = l_s\}$, для $B_i \in \mathfrak{A}$, $\sum_1^s B_i = X$, $0 < l_1 + \dots + l_s \leqslant k_1 + \dots + k_l$, $\lim_n \tilde{\beta}_{0,n} = 1 - \sum_{j=1}^{k_1+\dots+k_l} P\{\mu(X) = j\}$, а значит, распределения $\tilde{\mu}_n(B_1), \dots, \tilde{\mu}_n(B_s)$ сходятся к некоторому предельному распределению, то существуют пределы

$$\lim_n \sum_{i \in I_n(A)} \alpha_{i,n}^s = m_s(A) \quad \forall A \in \mathfrak{A}, \ s \leqslant k_1 + \dots + k_s. \tag{4}$$

В силу произвольности выбора $k_1 + \dots + k_l$ заключаем, что пределы вида 4) существуют для всех таких s, что $\sum_{k=s}^{\infty} P\{\mu(X) = k\} > 0$.

Воспользовавшись достаточными условиями теоремы 1, получим

$$P\{\mu(A_1) = k_1, \dots, \mu(A_s) = k_s\} = \frac{f^{(k_1)}(A_1; 0)}{k_1!} \dots \frac{f^{(k_s)}(A_s; 0)}{k_s!} \times$$

$$\times \sum_r \varphi^{(k_1+\dots+k_s+r)}(0) \frac{f^{(r)}\left(\overline{\sum_1^s A_i}; 0\right)}{r!}, \tag{5}$$

где $f(A; z) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} m_i(A) z^i\right)$, $\varphi(z) = \sum_j \frac{P\{\mu(X) = j\}}{f^j(X; 0)} z^j$.

Говорят, что последовательность $(A_{i(n)}^n)$ фундаментальна относительно $(\mathfrak{A}_n)$, если $A_{i(n)}^n \supset A_{i(n+1)}^{n+1}$ $\forall n$. Случайная мера μ называется стохастически непрерывной относительно $(\mathfrak{A}_n)$, если для всякой фундаментальной последовательности $\mu(A_{i(n)}^n) \underset{n}{\to} 0$ с вероятностью 1.

Следствие 1. *Если $P\{\mu(X) = 1\} > 0$ и μ — стохастически непрерывная марковская считающая мера, то ее конечномерные распределения представимы в виде* (4), (5).

Доказательство. Поскольку число положительных $\alpha_{i,n}$ не убывает, то либо $\forall k$ можно указать N такое, что число положительных $\alpha_{i,n}$ больше k при $n \geqslant N$ (это эквивалентно выполнению условия S), либо для достаточно больших n число положительных $\alpha_{i,n}$ величина постоянная. В этом случае существует конечное число фундаментальных последовательностей $(A^n_{i_1(n)}), \ldots, (A^n_{i_p(n)})$, что $\alpha_{i_j,n} > 0$ $\forall n$, $j = \overline{1, p}$, и $P\{\mu(X) = 1\} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{i_j,n}$, но $\alpha_{i,n} \leqslant P\{\mu(A^n_i) = 1\}$, и, следовательно, $P\{\mu(X) = 1\} = 0$. Таким образом, стохастически непрерывная марковская считающая мера с $P\{\mu(X) = 1\} > 0$ удовлетворяет условиям теоремы 2.

Пусть мера $\tilde{\mu}$ на $(X, \mathfrak{A})$ является целочисленной мерой с независимыми значениями и производящая функция случайной величины $\tilde{\mu}(A)$ есть

$$\exp\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} m_i(A) z^i\right\} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} m_i(A)\right\}. \tag{6}$$

Тогда распределения меры μ можно представить в виде

$$P\{\mu(A_1) = k_1, \ldots, \mu(A_l) = k_l\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{l} P\{\tilde{\mu}(A_i) = k_i\} \sum_{r} \frac{P\{\mu(X) = r + k_1 + \ldots + k_l\}}{P\{\tilde{\mu}(X) = r + k_1 + \ldots + k_l\}} P\left\{\tilde{\mu}\left(X - \sum_{1}^{l} A_i\right) = r\right\}.$$

Рассмотрим характеристический функционал меры μ $\mathrm{X}_\mu(g)$. Пусть $g(z) = \sum_{1}^{l} g_i I_{A_i}(z)$, $A_i \in \mathfrak{A}$. Тогда с учетом (6)

$$\mathrm{X}_\mu(g) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{\mu(X) = k\} M\{e^{\int g(z) d\tilde{\mu}(z)} / \tilde{\mu}(X) = k\}. \tag{7}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *Характеристический функционал марковской считающей меры* μ, *удовлетворяющей условию* S, *представим в виде* (6), (7).

1. *Скороход А. В.* Несколько замечаний о случайных мерах // Вестн. Киев. ун-та. Сер. астроном., мат. и мех.— 1958.— Вып. 1.— С. 105—114.
2. *Баховец Е. Б.* Об одном классе целочисленных марковских мер // Случайные процессы. Теория и практика.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 3—14.

Киев. ун-т — Получено 16.12.85

УДК 517.53

А. П. Голуб

О совместных аппроксимациях Паде набора вырожденных гипергеометрических функций

1. Введение. Приведем необходимые сведения и определения.

Определение 1 (см., например, [1]). *Пусть* $F = \{f_k(z)\}_{k=1}^{n}$ — *набор аналитических в окрестности точки* $z = 0$ *функций, а* $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ — *вектор, координатами которого являются неотрицательные целые числа, сумма которых равна некоторому числу* $N = N(\vec{r}) \in \mathbb{N}^1$. *Совместными аппроксимациями Паде набора функций* $\{f_k(z)\}_{k=1}^{n}$ *порядка* $([N/N]; \vec{r})$ *на-*