1. *Шуренков В. М., Елейко Я. И.* Предельные распределения временных средних для полумарковского процесса с конечным числом состояний // Укр. мат. журн.— 1979.— **31**, № 5.— С. 598—603.
2. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1976.— 184 с.
3. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы.— М. : Наука, 1971.— 436 с.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— М. : Мир, 1967.— 752 с.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики, Львов Получено 10.07.85

УДК 517.53

*В. А. Зморович, Л. А. Гудзь*

# Об одном обобщении асимптотической формулы для $n$!

Как известно, $\Gamma(n+1) = n! = \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{\frac{\theta_n}{12n}}$, где $0 < \theta_n < 1$. В настоящей статье устанавливается обобщение этой классической формулы. Докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть дана последовательность положительных действительных чисел $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию $0 < p_{k+1} - p_k = h_k \leqslant h$, $k = 1, 2, 3, \ldots, h$ — некоторая постоянная. Тогда*

$$\prod_{k=1}^{n} p_k^{\lambda_k} = C p_n^{p_n} \exp(-p_n + \vartheta_n), \tag{1}$$

*где* $\lambda_1 = \frac{1}{2} h_1$, $\lambda_n = \frac{1}{2} h_{n-1}$; $\lambda_k = \frac{h_{k-1} + h_k}{2}$, $k = 2, 3, \ldots, n-1$, $C = p_1^{-p_1} \exp(p_1 - A)$, $A = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \frac{h^2\theta}{12p_1}$, $0 < \theta_n < 1$, $f(k) = \left(p_k + \frac{1}{2} h_k\right) \times \ln\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\right) - h_k$, $\vartheta_n = \sum_{k=n}^{\infty} f(k) = \frac{h^2\theta_n}{12p_n}$, $0 < \theta_n < 1$.

Доказательство. Исходим из равенства

$$\int_{p_k}^{p_{k+1}} \ln x dx = p_{k+1} \ln p_{k+1} - p_k \ln p_k - h_k.$$

Суммируя по $k$ от $k = 1$ до $k = n-1$, получаем

$$\int_{p_1}^{p_n} \ln x dx = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} h_k \ln(p_k p_{k+1}), \tag{2}$$

где $f(k) = \left(p_k + \frac{1}{2} h_k\right) \ln\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\right) - h_k$. Из равенства (2), вычисляя интеграл, стоящий в левой части, имеем

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} h_k \ln(p_k p_{k+1}) = p_n \ln p_n - p_n - p_1 \ln p_1 + p_1 - \sum_{k=1}^{n-1} f(k). \tag{3}$$

Потенцируя равенство (3), получаем

$$\prod_{k=1}^{n} p_k^{\lambda_k} = C_n p_n^{p_n} \exp(-p_n), \tag{4}$$

где $C_n = p_1^{-p_1} \exp(p_1 - A_n)$, $A_n = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$.

Докажем сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$. Положим $x_k = \frac{h_k}{2p_k + h_k}$, тогда $f(k) = \frac{1}{2x_k} h_k \left( \ln \frac{1+x_k}{1-x_k} - 2x_k \right)$. Учитывая значение $x_k$ и разлагая функцию $\ln \frac{1+x_k}{1-x_k}$ в степенной ряд, получаем

$$f(k) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m+1} h_k^{2m+1} (2p_k + h_k)^{-2m} < \frac{h_k}{3} \sum_{m=1}^{\infty} (h_k (2p_k + h_k)^{-1})^{2m} =$$

$$= \frac{1}{12} h_k^2 \left( \frac{1}{p_k} - \frac{1}{p_{k+1}} \right), \tag{5}$$

так как последний ряд — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{h_k}{2p_k + h_k} < 1$. Следовательно, ряд сходится. Обозначая его сумму через $A$, имеем $A = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leqslant \frac{1}{12} h^2 \left( \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} \right)$, где $p_0 = \lim_{n \to +\infty} p_n$. Отсюда $A = \frac{h^2}{12p_1} \theta$, где $0 < \theta < 1$. Таким образом, формулу (4) можно представить в виде (1), где $\vartheta_n = \sum_{k=n}^{\infty} f(k)$. Но на основании (5) легко получить $\sum_{k=n}^{\infty} f(k) \leqslant \frac{1}{12} h^2 \left( \frac{1}{p_n} - \frac{1}{p_0} \right)$, так что $\vartheta_n = \frac{h^2 \theta_n}{12p_n}$, где $0 < \theta_n < 1$. Теорема доказана.

Примечание. Если положить $p_1 = h_k = 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, то из (1) получаем $n! = Cn^{n+1/2} \exp(-n + \theta_n / 12n)$, $0 < \theta_n < 1$, где $C = \exp \times \times \left( 1 - \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \right)$, $f(k) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m+1} (2k+1)^{-2m}$, $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \frac{1}{12} \theta$, $0 < \theta < 1$. Интерес представляют также случай $h_k = h$, $k = 1, 2, 3 \ldots$, и др.

1. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального исчисления: В 2-х т.— М. : Физматгиз, 1962.— Т. 2.— 373 с.

Киев. политехн. ин-т Получено 30.01.86

УДК 517.977

*Г. А. Курина*

# Достаточные условия оптимальности управления для линейных периодических систем, не разрешенных относительно производной

Линейные системы, не разрешенные относительно производной, встречаются в экономике, в теории электрических цепей, а также при изучении сингулярно возмущенных задач.

**1.** Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(u) = \int_0^T (f^0(x(t), t) + h^0(u(t), t))\, dt, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t) \in \Omega \subset R^m, \tag{1}$$