1. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Экспоненциальная дихотомия инвариантного тора динамических систем // Дифференц. уравнения.— 1979.— **15**, № 8.— С. 1434—1443.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование линейных систем дифференциальных уравнений с помощью квадратичных форм.— Киев, 1982.— 44 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 82.10).
3. *Кулик В. Л.* Квадратичные формы и дихотомия решений систем линейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1982.— **34**, № 1.— С. 43—49.
4. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Применение квадратичных форм к исследованию систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1985.— **21**, № 5.— С. 776—787.
5. *Митропольский Ю. А., Кулик В. Л.* Функция Ляпунова и ограниченные решения линейных систем дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 1.— С. 39—49.
6. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1970.— **34**, № 6.— С. 1219—1240.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 28.02.86

УДК 517.9

А. К. Лопатин

Обоснование алгоритма асимптотической декомпозиции для конечного числа приближений

Основная идея метода асимптотической декомпозиции [1, 2] состоит в сопоставлении исходной возмущенной системе

$$dx'/dt = \omega(x') + \varepsilon\tilde{\omega}(x') \tag{1}$$

централизованной системы

$$dx_j/dt = \omega_j(x) + \varepsilon N(x)x_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{2}$$

получаемой из исходной с помощью замены переменных в виде рядов Ли

$$x_j = \exp(\varepsilon S)x_j, \quad j = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Здесь

$$S = S_1 + \varepsilon S_2 + \varepsilon^2 S_3 + \dots . \tag{4}$$

В формулах (1), (2) $x = \operatorname{colon}\| x_1, \dots, x_n \|$, $\omega = \operatorname{colon}\| \omega_1(x), \dots, \omega_n(x)\|$, $\tilde{\omega} = \operatorname{colon}\| \tilde{\omega}_1(x), \dots, \tilde{\omega}_n(x)\|$, $\omega_i(x), \tilde{\omega}_i(x) \in \mathfrak{O}(G)$, $i = \overline{1, n}$, $G_{0\varepsilon} = \mathfrak{J} \times \mathfrak{J}_\varepsilon \times G \in R^{n+2}$, $\varepsilon \in \mathfrak{J}_\varepsilon = [0, 1]$, $t \in \mathfrak{J}$, — область существования и единственности решения задачи Коши системы (1), $\mathfrak{O}(G)$ — многообразие аналитических функций, определенное на G,

$$N(x) = N_1(x) + \varepsilon N_2(x) + \dots, \ [U, N_\nu] \equiv 0, \quad \nu = 1, 2, \dots . \tag{5}$$

В настоящей работе рассматривается вопрос обоснования алгоритма асимптотической декомпозиции. Сопоставим возмущенной системе (1) укороченную централизованную систему

$$dx_j^{(m)}/dt = \omega_j(x^{(m)}) + \varepsilon N^{(m)}(x^{(m)})x_j^{(m)} + \varepsilon^{m+1}\Phi_j^{(m+1)}(x^{(m)}, \varepsilon), \quad j = \overline{1, n}, \tag{6}$$

где $N^{(m)}(x^{(m)}) = N_1(x^{(m)}) + \dots + \varepsilon^{m-1}N_m(x^{(m)})$, $x^{(m)} = \operatorname{colon}\| x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}\|$, $\Phi_j^{(m+1)}(x^{(m)}, \varepsilon)$ — известные аналитические функции.

Укороченная централизованная система (6) до членов порядка ε^m совпадает с централизованной системой (2). Для получения системы (6) вместо замены переменных (3) вводим укороченное преобразование

$$x_j' = \exp(\varepsilon S^{(m)}(x^{(m)}))x_j^{(m)}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{7}$$

где

$$S^{(m)} = S_1 + \varepsilon S_2 + \dots + \varepsilon^{m-1}S_m. \tag{8}$$

Можно определить явный вид правых частей системы (6), если обратиться к формуле Кемпбелла—Хаусдорфа [1, 2]. Систему (6) легко проинтегрировать приближенно с достаточно высокой (порядка ε^{m+1}) степенью точности, если рассмотреть вместо нее централизованную систему m-го приближения

$$d\bar{x}_j^{(m)}/dt = \omega_j(\bar{x}^{(m)}) + \varepsilon N^{(m)}\bar{x}_j^{(m)}, \tag{9}$$

где $\bar{x}^{(m)} = \operatorname{colon}\|\bar{x}_1^{(m)}, \ldots, \bar{x}_n^{(m)}\|$, полученную из системы (6) отбрасыванием слагаемых порядка ε^{m+1}. Решение системы (9) можно представить в виде ряда Ли

$$\bar{x}_j^{(m)} = \exp(\tau N^{(m)}(\bar{z}^{(m)}))\,\bar{z}_j^{(m)}, \quad \tau \equiv \varepsilon(t - t_0), \tag{10}$$

где вектор $\bar{z}^{(m)} = \operatorname{colon}\|\bar{z}_1^{(m)}, \ldots, \bar{z}_n^{(m)}\|$ является решением системы

$$d\bar{z}^{(m)}/dt = \omega(\bar{z}^{(m)}), \tag{11}$$

совпадающей с точностью до обозначений с системой нулевого приближения

$$d\tilde{x}'/dt = \omega(\tilde{x}') \tag{12}$$

исходной возмущенной системы (1).

Подстановка в формулы (7) вместо точного решения $x^m(t)$ укороченной централизованной системы (6) решения централизованной системы $\bar{x}^{(m)}(t)$ m-го приближения (9) даст некоторое приближенное значение решения $x'(t)$ исходной возмущенной системы $x_j'(t) \sim \bar{x}_j'^{(m)} = \exp(\varepsilon \times \times S^{(m)}(\bar{x}^{(m)}))\,\bar{x}_j^{(m)}$, $j = \overline{1, n}$. Нахождение точной оценки для модулей разностей $|x_j'(t) - \bar{x}_j'^{(m)}(t)|$, $j = \overline{1, n}$, является основной задачей настоящей статьи.

Прежде чем сформулировать основной результат, введем некоторые дополнительные понятия. Будем рассматривать систему (1) в области $G_{0\varepsilon} = = \mathcal{J} \times \mathcal{J}_\varepsilon \times H_0(x)$, $t \in \mathcal{J} = [a, b]$, $\mathcal{J}_\varepsilon = [0, \bar{\varepsilon}]$ — область существования первых интегралов системы нулевого приближения (12) [1].

Рассмотрим решение $\tilde{x}' = \tilde{x}'(t, t_0, x_0)$ системы нулевого приближения (12), являющееся аналитической функцией t, t_0, x_0 в области своего задания: $D = \{(t, t_0, x_0) : t \in \mathcal{J}(t_0, x_0),\ (t_0, x_0) \in G_{0\varepsilon}\}$, $\mathcal{J}(t_0, x_0)$ — максимальный интервал существования решения. Так как правые части возмущенной системы (1) являются аналитическими функциями x', ε в области $G_{0\varepsilon}$, то к ней применима теорема Пуанкаре [3, 4]. Следовательно, можно указать область изменения параметра ε: $\mathcal{J}_{\varepsilon_0} = \{0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0\}$ такую, что решение возмущенной системы (1) $x' = x'(t, t_0, x_0, \varepsilon)$, где $t, t_0 \in [a, b]$, $[a, b] \in \mathcal{J}(t_0, x_0)$, $\varepsilon(t_0, x_0) \in \mathcal{J}_{\varepsilon_0}$, представляет собой аналитическую функцию переменных $(t, t_0, x_0, \varepsilon)$, обращающуюся в решение системы нулевого приближения (12) при $\varepsilon = 0$: $x'(t, t_0, x_0, 0) \equiv \tilde{x}'(t, t_0, x_0)$. Область $\mathcal{J}_{\varepsilon_0}$ будем называть областью Пуанкаре. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть возмущенная система* (1) *с вещественно аналитическими коэффициентами рассматривается в области* $G_{0\varepsilon} = \mathcal{J} \times \mathcal{J}_{\varepsilon_0} \times \times H_0(x)$, *где* $H_0(x)$ — *область существования первых интегралов системы нулевого приближения*, $\mathcal{J}_{\varepsilon_0}$ — *область Пуанкаре изменения параметра* ε, $\mathcal{J} = [a, b]$ — *интервал, входящий в максимальный интервал* $\mathcal{J}(t_0, x_0)$ *существования аналитического решения системы нулевого приближения* (12) *и функция* $x'(t, \varepsilon) \equiv x'(t, t_0, x_0, \varepsilon)$, $x'(t_0) \equiv x_0$, *является аналитическим решением системы* (1).

Тогда для произвольного $\delta > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon(\delta)$, *что при всех* $\varepsilon \in [0, \varepsilon(\delta)]$ *для решения* $x'(t)$ *исходной системы* (1) *и решения* $\bar{x}'^{(m)}(t)$ *централизованной системы m-го приближения* (9)

$$\bar{x}_j'^{(m)}(t, \varepsilon) \equiv \exp(\tau N^{(m)}(\bar{z}^{(m)}))\exp(\varepsilon S^{(m)}(\bar{z}^{(m)}))\,\bar{z}_j^{(m)}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{13}$$

где $\bar{z}_j^{(m)} \equiv \tilde{x}'(t, t_0, x_0)$, $\tau \equiv \varepsilon(t - t_0)$, *справедливы неравенства*

$$|x_j'(t, \varepsilon) - \bar{x}_j'^{(m)}(t, \varepsilon)| < \delta, \quad j = \overline{1, n}, \tag{14}$$

причем также выполняются соотношения

$$|x_j'(t,\varepsilon)-\bar{x}_j'^{(m)}(t,\varepsilon)|\equiv O(\varepsilon^{m+1}),\quad j=\overline{1,n},\quad \forall t,t_0\in[a,b]. \tag{15}$$

С л е д с т в и е 1. *Пусть любое решение $\tilde{x}'(t,t_0,x_0)$ системы нулевого приближения* (12) *в области $G_0=(T_1,T_2)\times H_0(x)$ продолжимо на весь интервал (T_1,T_2). Тогда можно указать такой интервал $\mathcal{J}_{\varepsilon_{0T}}=[0,\varepsilon_{0T}]\in\in\mathcal{J}_{\varepsilon_0}$, что соотношения* (14), (15) *выполняются для произвольной точки $(t,t_0,x_0,\varepsilon)\in[a,b]\times[a,b]\times H_0(x)\times[0,\varepsilon_{0T}]$, $[a,b]\in(T_1,T_2)$.*

С л е д с т в и е 2. *Пусть решение $\tilde{x}'(t,t_0,x_0)$ системы нулевого приближения* (12), *проходящее через точку $x_0\in H_0(x)$, продолжимо на весь интервал $[0,\infty)$, ограничено при всех $t\in[0,\infty)$ и не выходит за пределы компакта $\bar{V}(x_0)\subset H_0(x)$, т. е. $V(x_0)\equiv\{(t,t_0,x): t,t_0\in[0,\infty),\ x=\tilde{x}'(t,t_0,x_0)\}\subseteq\bar{V}(x_0)$ и ряд Ли*

$$\exp(tN^{(m)}(x))\,x_j,\quad j=\overline{1,n}, \tag{16}$$

сходится при всех значениях $t\in[0,\infty)$, $x\in\bar{V}(x_0)$.

Тогда для любого сколь угодно малого $\delta>0$ и сколь угодно большого $L>0$ можно указать такой интервал изменения ε, $\varepsilon\in\mathcal{J}\varepsilon_{0L}=[0,\varepsilon_{0L}]$, что соотношения (14) *выполняются для произвольной точки*

$$(t,t_0,\varepsilon)\in[t_0,t_0+L/\varepsilon^{m+1}]\times[t_0,t_0+L/\varepsilon^{m+1}]\times\mathcal{J}_{\varepsilon_{0L}},\ t,t_0\in[0,\infty). \tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В укороченной централизованной системе (6) выполним замену переменных

$$x_j^{(m)}=\exp(\tau N^{(m)}(z^{(m)}))\,z_j^{(m)},\quad j=\overline{1,n}, \tag{18}$$

где $z^{(m)}=\mathrm{colon}\,\|z_1^{(m)},\ldots,z_n^{(m)}\|$ — вектор новых переменных, взяв за основу вид преобразования (10), приводящего централизованную систему m-го приближения к системе (11) нулевого приближения. Окончательно получим

$$dz_j^{(m)}/dt=\omega_j(z^{(m)})+\varepsilon^{m+1}\Psi_j^{(m+1)}(z^{(m)},\varepsilon),\quad j=\overline{1,n}, \tag{19}$$

где $\Psi_j^{(m+1)}(z^{(m)},\varepsilon)$ — известные аналитические функции ε, $z^{(m)}$.

Система (19) является возмущенной по отношению к системе

$$dz^{(m)}/dt=\omega(z^{(m)}), \tag{20}$$

совпадающей с точностью до обозначений с системой нулевого приближения (12). Будем изучать поведение решения возмущенной системы (19) в окрестности решения $\bar{z}^{(m)}(t)\equiv\tilde{x}'(t,t_0,x_0)$, $\bar{z}^{(m)}(t_0)\equiv x_0$ системы (20). С этой целью применим метод малого параметра Пуанкаре. Выполним в системе (19) замену переменных $z^{(m)}=y+\bar{z}^{(m)}$, где $y=\mathrm{colon}\,\|y_1,\ldots,y_n\|$ —вектор новых переменных. В результате система (19) перейдет в систему

$$dy/dt=\omega(y+\bar{z}^{(m)})-\omega(\bar{z}^{(m)})+\varepsilon^{m+1}\tilde{\Psi}^{(m+1)}(t,y,\varepsilon), \tag{21}$$

где $\tilde{\Psi}^{(m+1)}=\mathrm{colon}\,\|\tilde{\Psi}_1^{(m+1)},\ldots,\tilde{\Psi}_n^{(m+1)}\|$ — известные аналитические функции.

Решение системы (21) будем искать в виде ряда

$$y=\varepsilon y^{(1)}(t)+\varepsilon^2y^{(2)}(t)+\ldots. \tag{22}$$

Опустив выкладки, связанные с записью уравнений для определения функций $y^{(j)}(t)$, $y^{(j)}(t_0)\equiv0$, $j=1,2,\ldots$, отметим, что ряд (22) будет начинаться с членов порядка ε^{m+1}, поскольку в правой части системы (21) разложения по ε также начинаются со степеней ε^{m+1}. Таким образом,

$$y=\varepsilon^{m+1}y^{(m+1)}(t)+\varepsilon^{m+2}y^{(m+2)}(t)+\ldots. \tag{23}$$

Пусть M обозначает верхнюю границу модуля функций, стоящих в правых частях уравнений (21), когда t, t_0 изменяются в интервале $[a, b]$ и переменные y и ε достаточно малы: $|y_j| \leqslant \rho$, $j = \overline{1, n}$, $|\varepsilon| \leqslant \rho$, где ρ — некоторое малое фиксированное число. Тогда ряд (23) сходится при условии, что ε удовлетворяет неравенству [4, с. 159]

$$\left| e^{n \frac{M}{\rho}(t-t_0)} \frac{\varepsilon\rho}{(\rho+\varepsilon)^2} \right| < \frac{1}{4}, \quad t, t_0 \in [a, b], \tag{24}$$

Таким образом, решение системы (19) можно представить в виде суммы

$$z^{(m)}(t, \varepsilon) = \bar{z}^{(m)}(t) + \varepsilon^{m+1} y(t, \varepsilon), \tag{25}$$

где $\bar{z}^{(m)} \equiv \tilde{x}'(t, t_0, x_0)$, $y(t, \varepsilon) = y^{(m+1)}(t) + \varepsilon y^{(m+2)}(t) + \ldots$ — ряд, получаемый из соотношений (23).

В силу сходимости (23) в области $|y_j| \leqslant \rho$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \leqslant \rho$, где значения ε удолетворяют неравенству (24), найдется постоянная $M_0^{(m)}$, ограничивающая функцию $y(t, \varepsilon)$ сверху, т. е. $|y(t, \varepsilon)| \leqslant M_0^{(m)}$. Поэтому для модуля разности $|z_j^{(m)} - \bar{z}_j^{(m)}|$ справедлива оценка

$$|z_j^{(m)}(t, \varepsilon) - \bar{z}_j^{(m)}(t, \varepsilon)| \leqslant \varepsilon^{m+1} M_0^{(m)}. \tag{26}$$

Как видно из оценки (26), разность $|z_j^{(m)}(t, \varepsilon) - \bar{z}_j^{(m)}(t, \varepsilon)|$ как функция ε эквивалентна бесконечно малой величине ε^{m+1}, т. е. $|z_j^{(m)}(t, \varepsilon) - \bar{z}_j^{(m)}(t, \varepsilon)| \equiv \equiv O(\varepsilon^{m+1})$. Из неравенств (26) следуют неравенства $\bar{z}_j^{(m)}(t) - \varepsilon^{m+1} M_0^{(m)} \leqslant \leqslant z_j^{(m)} \leqslant \bar{z}_j^{(m)}(t) + \varepsilon^{m+1} M_0^{(m)}$. Следовательно, за счет выбора параметра ε можно добиться, чтобы решение $z^{(m)}(t, \varepsilon)$ находилось в сколь угодно малой окрестности решения системы нулевого приближения и не выходило из области $H_0(x)$. Запишем последовательно выполняемые преобразования (7), (18) в виде одного

$$x_j'(t, \varepsilon) = \exp(\tau N^{(m)}(z^{(m)})) \exp(\varepsilon S^{(m)}(z^{(m)})) z_j^{(m)}(t, \varepsilon). \tag{27}$$

Как следует из теоремы 3.3 работы [5], за счет выбора достаточно малых значений $\tau = \varepsilon(b - a)$, ε можно добиться, чтобы ряд Ли в правой части соотношений (27) сходился в любой замкнутой подобласти $H_0(x)$ и его значения не выходили из этой области. Пусть этот факт имеет место при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Аналитической функцией при изменении ε в указанном интервале будет также преобразование, обратное к (27), и его значения не будут выходить из области $H_0(x)$. Таким образом, если выбрать ε из условия $\varepsilon \in (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \leqslant \varepsilon_1) \cap (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$, то все преобразования, проведенные выше, правомерны.

Для получения оценок для решения в исходных переменных подставим решение (25) укороченной централизованной системы в формулы (27). В итоге получим

$$x_j'(t, \varepsilon) = x_j'^{(m)}(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} y_j'^{(m)}(t, \varepsilon), \quad j = \overline{1, n}, \tag{28}$$

где $x_j'^{(m)}(t, \varepsilon) = \exp(\tau N^{(m)}(\bar{z}^{(m)})) \exp(\varepsilon S^{(m)}(\bar{z}^{(m)}) \bar{z}_j^{(m)}(t, \varepsilon)$ — решение централизованной системы m-го приближения, $y_j'^{(m)}(t, \varepsilon)$ — известная аналитическая функция.

В силу абсолютной сходимости рядов, стоящих в правой и левой частях равенств (28) и свойств их перестановочности, из (28) следует оценка $|x'(t, \varepsilon) - x_j'^{(m)}(t, \varepsilon)| < \varepsilon^{m+1} \tilde{M}_0^{(m)}$, $j = \overline{1, n}$, где $\tilde{M}_0^{(m)}$ — константа, ограничивающая сверху сходящийся ряд $y_j'^{(m)}(t, \varepsilon)$, $j = \overline{1, n}$. Выбирая значение ε из условия $\varepsilon^{m+1} \tilde{M}_0^{(m)} < \delta$, приходим к доказываемым оценкам (14) и (15).

Следствие 1 очевидно, поскольку все рассуждения можно повторить для произвольной точки $(t_0, x_0) \in G_{0\varepsilon}$.

Для доказательства следствия 2 обратимся к укороченной централизованной системе (19). Точка x_0 не является положением равновесия, и в некоторой ее окрестности $W(x_0)$ решение

$$x = \tilde{x}'(t, t_0, x_0) \tag{29}$$

системы нулевого приближения (12) можно разрешить относительно переменных x_0 и получить n независимых интегралов $x_{0j} = \varphi_j(t, t_0, x)$, $j = \overline{1, n}$. Так как решение системы (20), являющейся системой нулевого приближения для (19), также ищем в виде (29), то выполним в системе (19) замену переменных $z^{(m)} = \tilde{x}'(t, t_0, c)$, $c = \varphi(t, t_0, z^{(m)})$, считая $c = \mathrm{colon}\,\| c_1, \ldots, c_n \|$ новыми переменными. В результате система (19) перейдет в новую

$$dc/dt = \varepsilon^{m+1}\Omega(t, c, \varepsilon), \tag{30}$$

где $\Omega(t, c, \varepsilon) = \mathrm{colon}\,\| \Omega_1, \ldots, \Omega_n \|$ — известные аналитические функции t, c, ε. Особенностью системы (30) является пропорциональность ее правых частей параметру ε^{m+1}. Система нулевого приближения $dc/dt = 0$, полученная из (30) при $\varepsilon = 0$, имеет решение $c = x_0$ при $t = t_0$. Выполним в системе (30) замену переменных $\bar{c} = c - x_0$:

$$d\bar{c}/dt = \varepsilon^{m+1}\tilde{\Omega}(t, \bar{c}, \varepsilon), \ \bar{c}(t_0) \equiv 0. \tag{31}$$

Функции $\tilde{\Omega}_j(t, \bar{c}, \varepsilon)$, $j = \overline{1, n}$, стоящие в правых частях системы (31), ограничены в силу сделанных предположений: $|\tilde{\Omega}_j(t, \bar{c}, \varepsilon)| < M$, $t_0, t \in [0, \infty)$, когда $\bar{c}, \varepsilon$ достаточно малы и не выходят из области $|\bar{c}| \leqslant \rho$, $|\varepsilon| \leqslant \rho$. Применяя к системе (31) метод малого параметра Пуанкаре, можно представить ее решение сходящимся по ε рядом

$$\bar{c} = \varepsilon^{m+1}\bar{c}^{(m+1)} + \varepsilon^{m+2}\bar{c}^{(m+2)} + \ldots, \tag{32}$$

если параметр ε удовлетворяет неравенству

$$\left| e^{n\frac{M}{\rho}\varepsilon^{m+1}(t-t_0)} \frac{\varepsilon\rho}{(\rho+\varepsilon)^2} \right| < \frac{1}{4}. \tag{33}$$

Пусть интервал изменения независимой переменной t ограничен числом t_1 и ε удовлетворяет неравенству (33). Тогда, обозначая $\varepsilon^{m+1}(t - t_0) = L$, получаем $t_1 = t_0 + L/\varepsilon^{m+1}$. Решение в переменных $z^{(m)}$ представляется в виде

$$z^{(m)} = \tilde{x}'(t, t_0, x_0 + \bar{c}). \tag{34}$$

Здесь вектор $\bar{c}$ представлен сходящимися рядом (32). Выбирая ρ, ε достаточно малыми, можно добиться, чтобы значения $\bar{c}$ сходились в области $W(x_0)$. Раскладывая (34) по степеням параметра ε, получаем сходящийся ряд

$$z^{(m)} = \tilde{x}'(t, t_0, x_0) + \varepsilon^{m+1} \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \varepsilon^{\nu-m-1}\eta_\nu(t, \varepsilon), \tag{35}$$

где $\eta_\nu(t, \varepsilon)$ — известные функции.

Подставим ряд (35) в формулы (27). За счет выбора достаточно малого ε можно добиться, чтобы значения ряда $\exp(\varepsilon S^{(m)}(z^{(m)}))\, z^{(m)}(t, \varepsilon)$, где $z^{(m)}(t, \varepsilon)$ задается формулами (35), принадлежали $\bar{V}(x_0)$. Согласно сделанным предположениям, сходится также ряд (16). Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству теоремы 1, и в итоге приходим к оценкам (17).

Рассмотрим теперь уравнение (1) в некоторой замкнутой подобласти $\bar{V}_0(x) \in H_0(x)$. Согласно теореме 3.3 работы [5], можно указать такой замкнутый интервал изменения независимой переменной $|t| \leqslant T$, что решение системы нулевого приближения (12) будет представляться в виде абсолютного и равномерно сходящегося ряда Ли

$$\tilde{x}' = \exp(tU(x_0))\, x_0 \tag{36}$$

во всей области $[|t| \leqslant T] \times \bar{V}_0(x)$ и представлять в ней аналитическую функцию переменных t, x_0. Тогда, принимая в формуле (13)

$$\bar{z}_j^{(m)} = \exp(tU(x_0))\, x_{0j},\ j = \overline{1, n}, \tag{37}$$

и учитывая свойство точечности преобразований (37), для решения централизованной системы m-го приближения получим

$$\bar{x}_j'^{(m)}(t, \varepsilon) = \exp(tU(x_0)) \exp(\tau N^{(m)}(x_0)) \exp(\varepsilon S^{(m)}(x_0))\, x_{0j}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Применяя теорему 1 к указанному случаю, получаем следующий результат.

Следствие 3. *Пусть решение системы нулевого приближения* (12) *представляется рядом Ли* (36) *в замкнутой области* $[t \leqslant T] \times \bar{V}_0(x)$. *Тогда для любого сколь угодно малого* $\delta > 0$ *можно указать такой интервал* $\mathcal{J}_{\varepsilon_{01}} = [0, \varepsilon_{01}]$, *что при всех* $\varepsilon \in \mathcal{J}_{\varepsilon_{01}}$ *выполняются неравенства* $|x_j'(t, \varepsilon) - \bar{x}_j'^{(m)}(t, \varepsilon)| < \delta$, $j = \overline{1, n}$, *для всех точек* $(t, t_0, x_0, \varepsilon) \in [|t| \leqslant T] \times [|t| \leqslant T] \times \bar{V}_0(x) \times [0, \varepsilon_{01}]$, *причем модуль разности* $|x_j'(t, \varepsilon) - \bar{x}_j'^{(m)}(t, \varepsilon)|$, *как функция* ε, *есть величина порядка малости* ε^{m+1}.

1. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Асимптотическая декомпозиция систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 1.— С. 35—44.
2. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Теоретико-групповые аспекты асимптотических методов нелинейной механики // Мат. физика и нелинейн. механика.— 1986.— Вып. 5.— С. 34—45.
3. *Бибиков Ю. Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.— 232 с.
4. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.— М.; Л. : Гостехиздат, 1950.— 436 с.
5. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Векторные поля, алгебры и группы, порождаемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений, и их свойства.— Киев, 1985.— 63 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.73).

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 01.07.86

УДК 517.9

В. П. Маслов, Г. А. Омельянов

Взаимодействие коротких волн малых амплитуд в слабо дисперсионной плазме. II

Настоящая работа является продолжением работы [1].

1. Альфвеновские волны в косом магнитном поле. Пусть при $t = 0$ заданы две линейные альфвеновские волны

$$U|_{t=0} = \xi_A^+(k_1)\, \Psi_1^0(x) \exp(i\langle k_1, x\rangle/\varepsilon) + \xi_A^+(k_2)\, \Psi_2^0(x) \exp(i\langle k_2, x\rangle/\varepsilon) + \text{к. с.}, \tag{1}$$

где векторы $\xi_A^+(k)$ определены в (7) [1], Ψ_j^0 — ограниченные скалярные функции из $C^\infty(R^3)$.

Будем предполагать, что векторы B_0, k_1, k_2 не лежат в одной плоскости, причем $\langle B_0, k_j\rangle \neq 0$, $j = 1, 2$, и $\langle B_0, k_1 \pm k_2\rangle \neq 0$.

В силу линейности дисперсионных соотношений (8) [1] любая комбинация $l_1 S_1 + l_2 S_2$ фаз $S_i = \omega_A^+(k_i)\, t + \langle k_j, x\rangle$ альфвеновских волн является резо-