УДК 517.968

А. Н. Урумбаев, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПРЯМЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА II–РОДА С ЯДРАМИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛАДКОСТИ

We give a direct method, optimal in L_2, of solving the Fredholm integral equation of the second kind with operators acting in the space of functions harmonic on a disk or in the space of function analytically extendable onto an infinite strip. For this method, an exact order of the error is obtained.

Вказано оптимальний в L_2 прямий метод розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма II – роду з операторами, які діють у простори функцій, гармонічних у крузі, а також функцій, які можна аналітично продовжити в нескінченну смугу. Знайдено точний порядок похибки вказаного методу.

1. Пусть X — нормированное пространство, $\mathcal{H}$ — некоторый класс линейных непрерывных операторов из X в X таких, что операторное уравнение

$$z = Hz + f \tag{1}$$

однозначно разрешимо при любых $H \in \mathcal{H}$ и $f \in \Phi \subset X$. Класс таких уравнений обозначим через $[\mathcal{H}, \Phi, X]$.

Как и в [1], следуя Ритцу [2], под прямым методом приближенного решения уравнения (1) будем понимать всякое правило D, по которому каждому оператору $H \in \mathcal{H}$ ставится в соответствие координатная система элементов $\psi_k = \psi_k(H, D)$, а каждой паре $(H \in \mathcal{H}, f \in \Phi)$ — набор коэффициентов $c_k = c_k(H, f, D)$, где $k = \overline{1, N}$. При этом приближенное решение задается в виде

$$\omega(D) = \sum_{k=1}^{N} c_k \psi_k + f. \tag{2}$$

При фиксированном N множество всевозможных прямых методов обозначим через $\mathcal{D}_N$.

Под погрешностью прямого метода D на классе $[\mathcal{H}, \Phi, X]$ понимается величина

$$e([\mathcal{H}, \Phi, X], D) = \sup_{\substack{z = Hz + f, \\ H \in \mathcal{H},\, f \in \Phi}} \| z - \omega(D) \|_X. \tag{3}$$

Задача о выборе прямого метода, имеющего минимальную погрешность, рассматривалась в [3]. При этом значение минимальной погрешности прямых методов из $\mathcal{D}_N$ на классе $[\mathcal{H}, \Phi, X]$ определялось величиной

$$\Theta_N[\mathcal{H}, \Phi, X] = \inf_{D \in \mathcal{D}_N} e([\mathcal{H}, \Phi, X], D). \tag{4}$$

Позднее, в работах [4–6] найден точный порядок величины (4) для различных классов интегральных уравнений Фредгольма II – рода, ядра которых имеют конечное число производных (конечную гладкость). Задача оптимизации прямых методов решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве, в смысле величины (4), исследовалась в [7]. В настоящей статье для некоторых классов уравнений Фредгольма с ядрами бесконечной гладкости мы найдем точный порядок величины (4) и укажем метод, его реализующий. Причем, как оказывается, общие теоремы из [7] не позволяют в рассматриваемом случае получить правильный порядок величины (4).

2. В дальнейшем предполагаем, что X — гильбертово пространство. Так называемый итерированный метод Галеркина [8] представляет собой прямой метод $D_{F_N} \in \mathcal{D}_N$, при котором приближенное решение $\omega\left(D_{F_N}\right)$ определяется из уравнения

$$\omega = HP_{F_N}w + f, \tag{5}$$

где P_{F_N} — ортопроектор на подпространство $F_N \subset X$, $\dim F_N = N$. Если $l_1, l_2, \ldots, l_N$ — ортонормированный базис F_N, то приближенное решение имеет вид

$$\omega\left(D_{F_N}\right) = \sum_{k=1}^{N} c_k H l_k + f,$$

где коэффициенты c_k определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$c_k = \sum_{m=1}^{N} c_m (l_k, H l_m) + (f, l_k), \quad k = \overline{1,N},$$

а $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в X.

Введем ряд обозначений. Соотношение $a(N) << b(N)$ будет означать, что, начиная с некоторого N_1; $a(N) \le \lambda \cdot b(N)$ для всех $N \ge N_1$, где постоянная λ не зависит от N; $a(N) \asymp b(N)$ означает, что одновременно выполняются соотношения $a(N) << b(N)$ и $b(N) << a(N)$.

Пусть Y — вложенное в X нормированное пространство, т. е. $Y \subset X$ и для любого $\varphi \in Y$ выполнено $\|\varphi\|_X \le \|\varphi\|_Y$. В этом случае, как обычно, будем писать $Y \subsetneq X$.

Через $\mathcal{Z}(X, Y)$ обозначим пространство линейных непрерывных операторов, действующих из X в Y с обычной нормой $\|\cdot\|_{X\to Y}$. Положим

$$\mathcal{H}_\alpha(X,Y) = \Big\{H\colon H \in \mathcal{Z}(X,Y), \quad H^* \in \mathcal{Z}(X,Y), \quad \|H\|_{X\to Y} \le \alpha_1,$$

$$\|(I-H)^{-1}\|_{X\to X} \le \alpha_2, \quad \|H^*\|_{X\to Y} \le \alpha_3\Big\},$$

$$Y(\gamma) = \{\varphi\colon \varphi \in Y, \ \|\varphi\|_Y \le \gamma\},$$

где I — тождественный оператор в X; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma$ — заданные константы, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; H^* — оператор, сопряженный к H.

Оценим погрешность итерированного метода Галеркина на классе уравнений $\Psi_{\alpha,\gamma} = [\mathcal{H}_\alpha(X,Y), Y(\gamma), X]$.

Теорема 1. *Если N-мерное подпространство $F_N \subset X$ таково, что*

$$\alpha_1\alpha_2 \left\| I - P_{F_N} \right\|_{Y\to X} = \delta < 1,$$

то

$$e\left(\Psi_{\alpha,\gamma}, D_{F_N}\right) \le \frac{\gamma\alpha_2\alpha_3(\alpha_1\alpha_2+1)}{1-\delta} \left\| I - P_{F_N} \right\|^2_{Y\to X}.$$

Доказательство. Вначале получим ряд необходимых оценок;

$$\left\| H - HP_{F_N} \right\|_{X\to X} = \sup_{g,\varphi \in X(1)} \left(Hg - HP_{F_N}g, \varphi \right) =$$

$$= \sup_{g,\varphi \in X(1)} \left(g - P_{F_N} g, H^* \varphi \right) \le \alpha_3 \left\| I - P_{F_N} \right\|_{Y \to X}, \tag{6}$$

где $X(1)$ — шар единичного радиуса в гильбертовом пространстве X.

В силу теоремы о разрешимости приближенного уравнения [9, с. 517], оценки (6) и условия теоремы следует

$$\left\| \left(I - HP_{F_N} \right)^{-1} \right\|_{X \to X} \le \frac{\| (I-H)^{-1} \|_{X \to X}}{1 - \| H - HP_{F_N} \|_{X \to X} \| (I-H)^{-1} \|_{X \to X}} \le \frac{\alpha_2}{1 - \delta}. \tag{7}$$

Кроме того, если $z \in Y$, то

$$\left\| \left(H - HP_{F_N} \right) z \right\|_X = \left\| \left(H - HP_{F_N} \right) \left(I - P_{F_N} \right) z \right\|_X =$$

$$= \sup_{\varphi \in X(1)} \left(\left(H - HP_{F_N} \right) \left(I - P_{F_N} \right) z, \varphi \right) =$$

$$= \sup_{\varphi \in X(1)} \left(z - P_{F_N} z, H^* \varphi - P_{F_N} H^* \varphi \right) \le \alpha_3 \| z \|_Y \left\| I - P_{F_N} \right\|^2_{Y \to X}. \tag{8}$$

Очевидно, решение z уравнения (1) из класса $\Psi_{\alpha,\gamma}$ принадлежит Y, следовательно,

$$\| z \|_Y = \left\| Hz + f \right\|_Y = \left\| H(I-H)^{-1} f + f \right\|_Y \le \left\| H(I-H)^{-1} f \right\|_Y + \| f \|_Y \le$$

$$\le \| H \|_{X \to Y} \left\| (I-H)^{-1} \right\|_{X \to X} \| f \|_X + \| f \|_Y \le \gamma (\alpha_1 \alpha_2 + 1). \tag{9}$$

Теперь заметим, что из (1) и (5) вытекает представление

$$z - \omega \left(D_{F_N} \right) = \left(I - HP_{F_N} \right)^{-1} \left(H - HP_{F_N} \right) z,$$

тогда

$$\left\| z - \omega \left(D_{F_N} \right) \right\|_X \le \left\| \left(I - HP_{F_N} \right)^{-1} \right\|_{X \to X} \left\| \left(H - HP_{F_N} \right) z \right\|_X.$$

Отсюда в силу произвольности выбора $H \in \mathcal{H}_\alpha(X, Y)$ и $f \in Y(\gamma)$, оценок (7)–(9) и последнего неравенства следует утверждение теоремы.

3. Далее будем существенно использовать определения и результаты, приведенные в [10, с. 185].

В качестве гильбертова пространства X будем рассматривать пространство L_2 функций, суммируемых в квадрате на $[0, 2\pi]$, с нормой

$$\| \varphi \|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

В качестве Y рассмотрим пространство Γ_2^ρ, элементами которого являются 2π-периодические функции $\varphi(t)$, представимые в виде $\varphi(t) = u(\rho, t)$, $0 < \rho < 1$, где функция $u(r, t)$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ гармонична в круге единичного радиуса (r, t — полярные координаты точки на плоскости).

Можно показать [10], что если $z(t) \in \Gamma_2^\rho$, то ее ряд Фурье записывается в виде

$$z(t) = \frac{a_0(\varphi)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left[a_k(\varphi) \cos kt + b_k(\varphi) \sin kt \right], \tag{10}$$

где $a_0(\varphi), a_k(\varphi), b_k(\varphi)$ — коэффициенты Фурье некоторой функции $\varphi(t) \in L_2$.

В пространстве Γ_2^ρ определен оператор G_ρ вида

$$G_\rho z(t) = \frac{a_0(z)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k}[a_k(z)\cos kt + b_k(z)\sin kt].$$

Норма в Γ_2^ρ вводится следующим образом: $\| z \|_{\Gamma_2^\rho} = \| G_\rho z \|_{L_2}$. Легко проверить, что тогда $\Gamma_2^\rho \subsetneq L_2$. Следует отметить, что если в (10) $z(t) \in \Gamma_2^\rho(\lambda)$, то $\varphi(t) \in L_2(\lambda)$ и наоборот.

Пусть $\mathcal{H}_\alpha^\rho$ — множество интегральных операторов H,

$$Hz(t) = \int_0^{2\pi} h(t, \tau) z(\tau)\, d\tau, \tag{11}$$

принадлежащих классу $\mathcal{H}_\alpha(L_2, \Gamma_2^\rho)$. Тогда, как известно, оператор H^*, сопряженный к H, имеет вид

$$H^* z(t) = \int_0^{2\pi} h(\tau, t) z(\tau)\, d\tau. \tag{12}$$

Обозначим через $\Psi_{\alpha,\gamma}^\rho$ класс интегральных уравнений Фредгольма II–рода

$$z(t) = Hz(t) + f(t) \equiv \int_0^{2\pi} h(t, \tau) z(\tau)\, d\tau + f(t) \tag{13}$$

с операторами $H \in \mathcal{H}_\alpha^\rho$ и свободными членами $f(t) \in \Gamma_2^{\rho'}(\gamma)$.

Пусть T_n — пространство тригонометрических полиномов степени не выше n, $\dim T_n = 2n + 1$. Ортопроектором на T_n является оператор S_n: $L_2 \to T_n$, который каждой функции $\varphi(t) \in L_2$ ставит в соответствие частную сумму $S_n\varphi$ ее ряда Фурье:

$$S_n\varphi = \frac{a_0(\varphi)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(\varphi)\cos kt + b_k(\varphi)\sin kt.$$

Теорема 2. *Справедливо соотношение*

$$\Theta_N[\Psi_{\alpha,\gamma}^\rho] \asymp \rho^N.$$

Оптимальный порядок на классе $\Psi_{\alpha,\gamma}^\rho$ *реализует итерированный метод Галеркина* D_{T_n}, *в рамках которого в качестве подпространства* F_N *выбирается* T_n, $n = \left[\frac{N}{2}\right]$, *а* $P_{F_N} = S_n$ ($[\beta]$ — *целая часть числа* β).

Доказательство. Известно [10, с. 187], что

$$\| I - S_n \|_{\Gamma_2^\rho \to L_2} \asymp \rho^n \asymp \rho^{N/2}, \quad n = \left[\frac{N}{2}\right], \tag{14}$$

но тогда, учитывая, что $\Psi_{\alpha,\gamma}^\rho \subset \Psi_{\alpha,\gamma}$, из теоремы 1 вытекает оценка сверху

$$\Theta_N[\Psi^\rho_{\alpha,\gamma}] \le e\left(\Psi^\rho_{\alpha,\gamma}, D_{T_n}\right) << \left\| I - S_n \right\|^2_{\Gamma^\rho_2 \to L_2} \asymp \rho^N. \tag{15}$$

Перейдем к получению оценки снизу. Пусть, как и ранее, $\Gamma^\rho_2(\mu)$ — шар радиуса μ в пространстве Γ^ρ_2 с центром в нуле. Нам потребуется следующий результат [10, с. 240]:

$$d_N\left(\Gamma^\rho_2(\mu), L_2\right) \asymp \rho^{[N/2]} \asymp \rho^{N/2}, \tag{16}$$

где

$$d_N(\mathcal{G}, \mathfrak{M}) = \inf_{\substack{M \subset \mathfrak{M},\\ \dim M \le N}} \sup_{g \in \mathcal{G}} \inf_{\varphi \in M} \| g - \varphi \|_{\mathfrak{M}}$$

— N-мерный поперечник по Колмогорову множества $\mathcal{G}$ в пространстве $\mathfrak{M}$.

Введем в рассмотрение оператор

$$H_\nu z(t) = \frac{\nu}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos k(t-\tau) \right] z(\tau)\, d\tau.$$

Очевидно, что H_ν: $L_2 \to \Gamma^\rho_2$. Поэтому постоянную ν можно выбрать так, что $H_\nu \in \mathcal{H}^\rho_\alpha$. При этом ν будет зависеть лишь от α.

Положим $\Phi_\lambda = \{f\colon f = z - H_\nu z,\ z \in \Gamma^\rho_2(\lambda)\}$, где постоянная λ выбирается так, чтобы $\Phi_\lambda \subset \Gamma^\rho_2(\gamma)$. Легко видеть, что множество решений уравнений $z = H_\nu z + f$, $f \in \Phi_\lambda$, совпадает с шаром $\Gamma^\rho_2(\lambda)$. Кроме того, из (10) следует, что при $z \in \Gamma^\rho_2(\lambda)$ элементы

$$H_\nu z = \frac{\nu}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos k(t-\tau) \right] \left[\frac{a_0(\varphi)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k(\varphi) \cos k\tau + \right.$$

$$\left. + b_k(\varphi) \sin k\tau) \right] d\tau = \nu \left[\frac{a_0(\varphi)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{2k} (a_k(\varphi) \cos kt + b_k(\varphi) \sin kt) \right]$$

полностью заполняют шар радиуса $\nu\lambda$ в пространстве $\Gamma^{\rho^2}_2$. Теперь в силу (1)–(4), (16) и очевидного включения $[H_\nu, \Phi_\lambda, L_2] \subset \Psi^\rho_{\alpha,\gamma}$ имеем

$$\Theta_N[\Psi^\rho_{\alpha,\gamma}] = \inf_{D \in \mathcal{D}_N} \sup_{\substack{z = Hz + f,\\ H \in \mathcal{H}^\rho_\alpha,\, f \in \Gamma^\rho_2(\gamma)}} \| z - \omega(D) \|_{L_2} \ge$$

$$\ge \inf_{D \in \mathcal{D}_N} \sup_{\substack{z = H_\nu z + f,\\ f \in \Phi_\lambda}} \| z - \omega(D) \|_{L_2} = \inf_{D \in \mathcal{D}_N} \sup_{z \in \Gamma^\rho_2(\lambda)} \left\| H_\nu z - \sum_{k=1}^{N} c_k \psi_k \right\|_{L_2} \ge$$

$$\ge \inf_{\substack{M \subset L_2,\\ \dim M \le N}} \sup_{g \in \Gamma^{\rho^2}_2(\nu\lambda)} \inf_{\varphi \in M} \| g - \varphi \|_{L_2} = d_N\left(\Gamma^{\rho^2}_2(\nu\lambda), L_2 \right) \asymp$$

$$\asymp (\rho^2)^{N/2} = \rho^N. \tag{17}$$

Из соотношений (15) и (17) следует утверждение теоремы 2.

4. Рассмотрим пространство $\mathcal{A}^l_2$, элементами которого являются 2π-периодические функции $\varphi(t)$, допускающие аналитическое продолжение в полосу

$\{w = t + iu,\ -l < u < l\}$.

Можно показать [10], что если функция $z(t) \in \mathcal{A}_2^l$, то ее ряд Фурье записывается в виде

$$z(t) = \frac{a_0(\varphi)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(\varphi)\cos kt + b_k(\varphi)\sin kt}{\operatorname{ch} kl},$$

где $a_0(z) = a_0(\varphi)$, $a_k(z) = \dfrac{a_k(\varphi)}{\operatorname{ch} kl}$, $b_k(z) = \dfrac{b_k(\varphi)}{\operatorname{ch} kl}$, $\varphi(t) \in L_2$.

В пространстве $\mathcal{A}_2^l$ определен оператор A_l (аналог оператора G_ρ в Γ_2^ρ) вида

$$A_l z(t) = \frac{a_0(z)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ch} kl\,[a_k(z)\cos kt + b_k(z)\sin kt].$$

Норма в $\mathcal{A}_2^l$ определяется соотношением $\| z \|_{\mathcal{A}_2^l} = \| A_l z \|_{L_2}$. Очевидно, что тогда $\mathcal{A}_2^l \subsetneq L_2$.

Пусть $\mathcal{H}_\alpha^l$ — множество интегральных операторов H вида (11), принадлежащих классу $\mathcal{H}_\alpha(L_2, \mathcal{A}_2^l)$. Обозначим через $\Psi_{\alpha,\gamma}^l$ класс интегральных уравнений вида (13) с операторами $H \in \mathcal{H}_\alpha^l$ и свободными членами $f \in \mathcal{A}_2^l(\gamma)$.

Теорема 3. *Справедливо соотношение*

$$\Theta_N[\Psi_{\alpha,\gamma}^l] \asymp e^{-Nl}.$$

Оптимальный порядок на классе $\Psi_{\alpha,\gamma}^l$ *реализует метод* D_{T_n}, $n = \left[\dfrac{N}{2}\right]$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2, с той лишь разницей, что вместо (14), (16) нужно использовать соответственно соотношения [10, с. 187; 240]

$$\| I - S_n \|_{\mathcal{A}_2^l \to L_2} \asymp \frac{1}{\operatorname{ch} nl} \asymp e^{-Nl/2},$$

$$d_N\left(\mathcal{A}_2^l(\mu), L_2\right) \asymp \frac{1}{\operatorname{ch}[N/2]l} \asymp e^{-Nl/2},$$

а оператор H_ν выбрать в виде

$$H_\nu z(t) = \frac{\nu}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k(t-\tau)}{\operatorname{ch} kl}\right] z(\tau)\, d\tau.$$

5. Отметим, что уравнения из класса $\Psi_{\alpha,\gamma}^l$ естественно возникают в методе граничных интегральных уравнений при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа в областях, ограниченных замкнутыми аналитическими кривыми (см., например, [11]). Заметим еще, что классы $\Psi_{\alpha,\gamma}^\rho$ и $\Psi_{\alpha,\gamma}^l$ содержат уравнения, ядра которых имеют бесконечную гладкость по соответствующим переменным. Например, с учетом (12) для принадлежности оператора H классу $\mathcal{H}_\alpha^l$ достаточно, чтобы ядро $h(t, \tau)$ по каждой переменной являлось периодической аналитической функцией, продолжимой в полосу шириной $2l$.

Через $\mathcal{D}_{Q_N}$ обозначим совокупность прямых методов $D \in \mathcal{D}_N$, сопоставляющих всем операторам $H \in \mathcal{H}$ координатную систему $\psi_k(D)$, линейная оболочка которой образует N-мерное подпространство $Q_N \subset X$. Такие прямые методы будем называть неадаптивными. В работах [12, 13] исследовалась оптимизация неадаптивных прямых методов при фиксированном N. Оптимальная погрешность на классе $[\mathcal{H}, \Phi, X]$ определялась величиной

$$V_N[\mathcal{H}, \Phi, X] = \inf_{\substack{Q_N \subset X, \\ \dim Q_N = N}} \inf_{D \in \mathcal{D}_{Q_N}} e([\mathcal{H}, \Phi, X], D).$$

Учитывая результаты этих работ, можно показать, что для рассматриваемых нами классов справедливы соотношения

$$V_N[\Psi^{\rho}_{\alpha,\gamma}] \asymp \rho^{N/2}, \;\; V_N[\Psi^{l}_{\alpha,\gamma}] \asymp e^{-Nl/2}.$$

В [7] доказана теорема, в которой содержатся в общем виде оценки сверху и снизу для величины $\Theta_N[\Psi_{\alpha,\gamma}]$. Указанный там прямой метод, доставляющий оценку сверху, в ряде случаев оказывается оптимальным, например, для интегральных уравнений Фредгольма с ядрами конечной гладкости. Можно показать, что в рассматриваемом случае эти оценки будут соответственно иметь вид

$$\rho^N << \Theta_N[\Psi^{\rho}_{\alpha,\gamma}] << \rho^{N/2}, \quad e^{-Nl} << \Theta_N[\Psi^{l}_{\alpha,\gamma}] << e^{-Nl/2}.$$

Из теорем 2, 3 видно, что итерированный метод Галеркина на классах $\Psi^{\rho}_{\alpha,\gamma}$, $\Psi^{l}_{\alpha,\gamma}$ является оптимальным и обеспечивает точность погрешности в 2 раза выше, чем методы, упомянутые выше.

1. *Переверзев С. В., Урумбаев А. Н.* Об оптимальных прямых методах решения уравнений Вольтерра в гильбертовом пространстве // Мат. заметки. – 1992. – **52**, № 4. – С. 74–84.
2. *Ritz W.* Uber eine neue Methode zur Losung gewisser Variations probleme der mathematischen Physik // J. reine und angeu. Math. – 1908. – **135**, № 1. – P. 1–62.
3. *Переверзев С. В.* Об оптимизации адаптивных методов приближенного решения интегральных уравнений // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 6. – С. 1304–1308.
4. *Heinrich S.* On the optimal error of degenerate kernel methods // J. Integr. Equat. – 1985. – **9**, № 3. – P. 251–256.
5. *Переверзев С. В.* Об оптимизации методов приближенного решения интегральных уравнений с дифференцируемыми ядрами // Сиб. мат. журн. – 1987. – **28**, № 3. – С. 173–183.
6. *Переверзев С. В., Солодкий С. Г.* Об оптимизации методов приближенного решения двумерных уравнений Фредгольма II–рода // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 8. – С. 1077–1082.
7. *Солодкий С. Г.* Оптимизация адаптивных прямых методов решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве // Там же. – № 1. – С. 95–101.
8. *Sloan J. H.* Improvement by Iteration for Compact Operator Equations // Math. Comp. – 1976. – **36**, № 136. – С. 758–764.
9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
10. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
11. *Зализняк С. Н., Мельник Ю. И., Подлипенко Ю. К.* О приближенном решении интегральных уравнений теории потенциала // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 3. – С. 385–391.
12. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 231 с.
13. *Габдулхаев Б. Г., Велев Г. Д.* Наилучшие приближения решений функциональных уравнений и оптимизация численных методов // Тр. Междунар. конф. по конструктивной теории функций. – Варна, 1984; София: Изд-во БАН, 1984. – С. 18–26.

Получено 05.10.92.