УДК 517.958; 532.595

И. А. Луковский, чл.-корр. АН Украины,
А. Н. Тимоха, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ВАРИАЦИОННЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН С АКУСТИЧЕСКИМИ ПОЛЯМИ

Variational problems equivalent to nonlinear evolution boundary-value problems with free boundary are formulated. These problems arise in the theory of interaction of a bounded volume of liquid, gas, and their boundary with acoustic fields. It is proved that the motion separation principle can be applied to these variational problems. A variational formulation is obtained for the problem of cappilary-acoustic balance mode.

Сформульовані варіаційні задачі, еквівалентні нелінійним еволюційним крайовим задачам з вільною границею, які виникають у теорії взаємодії обмежених об'ємів рідини, газу та поверхні розділу з акустичними полями. Доведена можливість застосування в цих варіаційних задачах принципу розділення рухів та одержані варіаційні формулювання задачі про капілярно-звукову форму рівноваги.

Исследуются нелинейные краевые задачи, описывающие волновые движения объема $Q_2(t)$ (жидкость) и объема $Q_1(t)$ (газа) в фиксированной области $Q = Q_1 \cup Q_2 (W(x, y, z) < 0$ — сосуд) с неизвестной односвязной поверхностью раздела $\Sigma(t) = \partial Q_1 \setminus \partial Q = \partial Q_2 \setminus \partial Q$ $(\xi(x, y, z, t) = 0)$. (Система "жидкость – газ" находится в условиях, близких к невесомости.) Объемы $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ ограничены подвижной поверхностью $\Sigma(t)$ и неподвижными границами (стенками) $S_i = \partial Q_i \setminus S$, $S = \partial Q$. В $Q_1(t)$ на части границы S_1 $S_0 \subset S_1 = \partial Q_1 \setminus \Sigma \subset \partial Q$ имеется периодическая неоднородность (расположен вибратор, создающий некоторое акустическое поле с частотой ν).

1. Постановка задачи. Пусть φ_1 и φ_2 — потенциалы скоростей газа и жидкости соответственно, p_i — давления, ρ_i — плотности. Тогда задача о совместных движениях жидкости и газа описывается:

уравнениями Эйлера

$$\rho_i \nabla(\varphi_{it} + 0{,}5(\nabla\varphi_i)^2 + gx) = -\nabla p_i \quad \text{в} \quad Q_i(t),\ i = 1, 2, \tag{1}$$

уравнением неразрывности в $Q_i(t)$ и кинематическими условиями

$$\begin{gathered} \rho_{it} + \operatorname{div}(\rho_i \nabla\varphi_i) = 0 \quad \text{в} \quad Q_i(t); \quad \partial\varphi_i/\partial n = 0 \quad \text{на} \quad S_i, \\ \partial\varphi_i/\partial n = -\xi_t/|\nabla\xi| \quad \text{на} \quad \Sigma(t),\ i = 1, 2; \\ \rho_1 \partial\varphi_1/\partial n = \rho_{01} V_0(x, y, z) \sin \nu t \quad \text{на} \quad S_0, \end{gathered} \tag{2}$$

динамическим условием

$$\begin{gathered} -p_2 + \sigma(K_1 + K_2) = -p_1 \quad \text{на} \quad \Sigma(t); \\ -\frac{(\nabla W,\ \nabla\xi)}{|\nabla W|} = \cos\alpha |\nabla\xi| \quad \text{на} \quad \partial\Sigma(t) \end{gathered} \tag{3}$$

и уравнениями состояния (с условием баротропности)

$$\rho_i = \rho_{0i}(p_i) \quad \text{в} \quad Q_i(t),\ i = 1, 2, \tag{4}$$

где K_i — главные кривизны поверхности $\Sigma(t)$, n — внешняя нормаль к ∂Q или к Σ по отношению к Q_2, σ — коэффициент поверхностного натяжения,

g — ускорение силы тяжести, α — угол смачивания, $\rho_{0i}(\cdot)$ — функциональные зависимости плотности от давления, $V_0(x, y, z)\sin \nu t$ — нормальные скорости акустических вибраций на S_0, ρ_{01} — „табличная" плотность газа. Задача (1) – (4) является замкнутой для определения φ_i, p_i, ρ_i и ξ, описывающих процесс колебания сред $Q_i(t)$ и поверхности $\Sigma(t)$. Она относится к числу сложных нелинейных эволюционных краевых задач с неизвестной поверхностью раздела двух областей. До настоящего времени не существует методов ее качественного анализа и определения решений в аналитическом виде.

Замечание. Если положить $V_0(x, y, x) = 0$, то задача (1) – (4) становится однородной, описывающей так называемые свободные колебания системы „жидкость – газ". Последняя может быть линеаризована относительно равновесного состояния, которое характеризуется отсутствием движения $\nabla\varphi_i \equiv 0$, $i = 1, 2$, а Σ принимает капиллярную равновесную форму $\Sigma_0(\xi_0(x, y, z) = 0)$. Такая линейная однородная задача о малых колебаниях относительно капиллярной формы равновесия системы „жидкость – газ" исследовалась в работах [1, 2] в нормальной (спектральной) форме, там же установлены спектральные свойства такой задачи.

Задача (1) – (4) существенно отличается от задачи из теории поверхностных волн [1, 3 – 5] тем, что последняя есть нелинейная эволюционная краевая задача в одной области со свободной границей, а исходная задача (1) – (4) — двухфазная задача с неизвестной поверхностью раздела двух областей.

В работах [5, 6] показано, что после перехода от задачи (1) – (4) к задаче в безразмерном виде

$$\rho_i\nabla(\varphi_{it} + 0{,}5\,(\nabla\varphi_i)^2 + \mu\mu_1\varepsilon^3 Bo\,x) = -\nabla p_i \quad \text{в } Q_i, \quad i = 1, 2, \tag{5}$$

$$\rho_{it} + \operatorname{div}(\rho_i\nabla\varphi_i) = 0 \quad \text{в } Q_i; \qquad \partial\varphi_i/\partial n = 0 \quad \text{на } S_i, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \partial\varphi_i/\partial n = -\xi_t/|\nabla\xi| \quad \text{на} \quad \Sigma, \; i = 1, 2; \\ \rho_1\partial\varphi_1/\partial n = \varepsilon V(x, y, z)\frac{\mu_0}{k}\sin t \quad \text{на} \quad S_0, \\ -p_2 + \mu\mu_1\varepsilon^3(K_1 + K_2) = -\mu_1\varepsilon p_1 \quad \text{на} \quad \Sigma; \\ -\frac{(\nabla W,\ \nabla\xi)}{|\nabla W|} = \cos\alpha\,|\nabla\xi| \quad \text{на } \partial\Sigma \end{gathered} \tag{7}$$

($\varepsilon = V_0/\sup|V_0| << 1$ — число Маха, Bo — число Бонда) предполагая, что задача (5) – (7) имеет такое решение, что $\forall\, t_1 < t_2$ $\varphi_i, p_i, \rho_i \in W_2^2(\hat{Q}_i)$, $\hat{Q}_i = \{(t, x, y, z)\colon \forall\, t \in [t_1, t_2]\ (x, y, z) \in Q_i(t) \cup \Sigma(t)\}$, а поверхность $\Sigma(t)$ гладкая (т. е. существует гладкий изоморфизм $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1})$ для некоторой фиксированной односвязной области с кусочно-гладкой границей

$$Q_0[t_1, t_2] \times \overline{Q}_0 \xrightarrow{\ \mathfrak{F}\ } \overline{\hat{Q}}_2 \xrightarrow{\ \mathfrak{F}^{-1}\ } [t_1, t_2] \times \overline{Q}_0)$$

и $\xi, \varphi_i, \rho_i, \mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1})$ — аналитические по ε в окрестности нуля, можно воспользоваться принципом разделения движений и провести редукцию задачи (5) – (7) к задаче теории поверхностных волн на поверхности ограниченного объема капиллярной жидкости с потенциалом специального вида ($\tau = \varepsilon^{3/2}t$ — медленное время):

$$\Delta\varphi = 0 \ \text{ в } \langle Q_2\rangle(\tau); \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \langle S_2\rangle; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\zeta_\tau/|\nabla\zeta| \ \text{ на } \langle\Sigma\rangle(\tau),$$

$$\varphi_\tau + 0,5\,(\nabla\varphi)^2 + \mu\mu_1(Bo\,x - (K_1 + K_2)) +$$
$$+\ 0,25\mu_1(k^2(\Phi_1)^2\,(\nabla\Phi_1)^2) = \text{const} \quad \text{на} \quad \langle\Sigma\rangle(\tau); \tag{8}$$
$$-(\nabla W, \nabla\zeta)/|\nabla W| = \cos\alpha\,|\nabla\zeta| \quad \text{на} \quad \partial\Sigma; \quad \int\limits_{Q_2} dQ = \text{const},$$

при условии

$$\Delta\Phi_1 + k^2\Phi_1 = 0 \quad \text{в} \quad \langle Q_1\rangle; \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \langle S_1\rangle \cup \langle\Sigma\rangle;$$
$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \mu_0 V(x, y, z)/k \quad \text{на} \quad S_0. \tag{9}$$

Здесь $\mu \sim \mu_1 \sim \mu_0 \sim 1$, $|Bo| \sim 1$ — число Бонда, $k \sim 1$ — волновое число, Φ_1 — волновая функция, $\langle Q_i(\tau)\rangle$ — усредненные по быстрым вибрациям объемы $Q_i(t)$, $\langle\Sigma\rangle(\tau)$: $\zeta(x, y, z, \tau) = 0$ — усредненное по быстрым движениям уравнение поверхности раздела. При этом показано, что при указанных предположениях любое решение задачи (1) – (3) (в безразмерном виде (5) – (7)) может быть с точностью до ε^3 на Σ сведено к решению задачи (8), (9) относительно усредненного по быстрым колебаниям движения поверхности $\Sigma(t, \tau)$ $\langle\Sigma\rangle_t$: $\zeta(x, y, z, \tau) = 0$, потенциала скоростей в жидкости $\psi(x, y, z, \tau)$ и волновой функции акустического поля в газе $\Phi_1(x, y, z, \tau)$:

$$\langle\xi(x, y, z, \tau)\rangle_t = \zeta(x, y, z, \tau) + o(\varepsilon^3),$$
$$\varphi_2(x, y, z, t, \tau) = \varepsilon^{3/2}\psi(x, y, z, \tau) + o(\varepsilon^{3/2}), \tag{10}$$
$$\varphi_1(x, y, z, t, \tau) = \varepsilon\,\Phi_1(x, y, z)\sin t + \varepsilon^{3/2}\,\varphi_1^{(3/2)}(x, y, z, \tau) + o(\varepsilon^{3/2}).$$

2. Вариационные принципы для нелинейных краевых задач теории взаимодействия поверхности раздела с акустическими полями (задача (1) – (4)). Построим ряд вариационных задач, сводящих определение решения краевой задачи (1) – (4) к определению стационарных точек некоторого нелинейного функционала с изменяемой областью интегрирования. По форме такие функционалы подобны функционалам типа Гамильтона – Остроградского и типа Бейтмена в эйлеровой постановке и могут быть формально записаны для ряда гидродинамических задач со свободной границей. Однако, как показали исследования [7 – 14], доказательство того, что стационарные точки таких функционалов достигаются на решениях исходной краевой задачи гидромеханики, должно быть проведено для каждой конкретной задачи и не следует из истинности указанных выше вариационных принципов аналитической механики в лагранжевой постановке [9].

Вариационные задачи, *вытекающие из принципа Гамильтона – Остроградского*, записаны в [7] для идеальной баротропной неограниченной сжимаемой жидкости со свободной поверхностью, доказана их эквивалентность исходной дифференциальной задаче. Вариационные задачи для несжимаемой капиллярной жидкости, но в ограниченном объеме, приведены в [8], однако доказательство работы [8] содержит ряд неточностей, что показано в [9].

Следующая теорема устанавливает эквивалентность задачи (1) – (4) вариационной задаче для функционала Гамильтона – Остроградского.

Теорема 1 (вариационная задача типа Гамильтона – Остроградского). *Пусть решение задачи* (1) – (4) *такое, что*

$$\forall\, t_1 < t_2 \qquad \varphi_i,\ p_i,\ \rho_i \in W_2^2(\hat{Q}_i),$$
$$\hat{Q}_i = \{(t, x, y, z):\ \forall\, t \in [t_1, t_2]\ \ (x, y, z) \in Q_i(t) \cup \Sigma(t)\},$$

а поверхность $\Sigma(t)$ гладкая (т. е. существует гладкий изоморфизм $\mathfrak{F}\,(\mathfrak{F}^{-1})$ для некоторой фиксированной односвязной области с кусочно-гладкой границей

$$Q_0[t_1, t_2] \times \overline{Q}_0 \xrightarrow{\ \mathfrak{F}\ } \overline{\hat{Q}}_2 \xrightarrow{\ \mathfrak{F}^{-1}\ } [t_1, t_2] \times \overline{Q}_0).$$

Тогда множество решений задачи (1) – (4) *совпадает с множеством стационарных точек функционала*

$$G(\xi, \varphi_i, \rho_i) = \int_{t_1}^{t_2} (T - U - \Pi)\, dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \int_{Q_i(t)} \rho_i \left(\frac{(\nabla\varphi_i)^2}{2} - U_i(\rho_i) - gx \right) dQ - \sigma\left(|\Sigma| - \cos\alpha\, |S_2|\right) \right\} dt \tag{11}$$

при кинематической связи (2) *и условиях для гладких изохронных вариаций*

$$\delta\xi|_{t_1, t_2} = 0; \quad \delta\rho_i|_{t_1, t_2} = 0. \tag{12}$$

Здесь $U_i(\rho_i)$ — внутренняя энергия газа и жидкости соответственно, причем

$$p_i \overset{\text{def}}{=} \rho_i^2 \frac{\partial u_i}{\partial \rho_i}. \tag{13}$$

Замечание. Поскольку имеется математическая связь (2), то функционал G — фактически лишь функция ξ и ρ_i.

Доказательство *принципа Гамильтона.* Воспользуемся тем, что

$$\int_{Q(t)} \rho\,(\varphi_t + (\nabla\varphi, \nabla\psi))\, dQ + \frac{d}{dt} \int_{Q(t)} \rho\varphi\, dQ - \int_{S_0 \subset S} \rho_0 V_0 \varphi \sin(\nu t)\, ds =$$
$$= -\int_{Q(t)} (\rho_t + \operatorname{div}(\rho\nabla\psi))\,\varphi\, dQ + \int_{S \setminus S_0} \rho \frac{\partial\psi}{\partial n}\varphi\, ds + \int_{\Sigma} \rho \frac{\partial\psi}{\partial n}\varphi\, ds +$$
$$+ \int_{\Sigma} \rho \frac{\xi_t}{|\nabla\xi|}\varphi\, ds + \int_{S_0} \left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial n} - \rho_0 V_0 \sin(\nu t) \right) \varphi\, ds \tag{14}$$

для произвольной области Q, $\partial Q = \Sigma \cup S \cup S_0$, причем $\Sigma(\xi(x, y, z, t) = 0)$ — подвижная часть границы ∂Q, а $\varphi(x, y, z, t)$ и $\psi(x, y, z, t)$ — некоторые заданные гладкие функции. Если выполнено (2), а $\varphi = \varphi_1$, $\psi = \varphi_1$, то правая часть (14) равна нулю. Аналогично, если $\varphi = \varphi_2, \psi = \varphi_2$ (с учетом того, что $S_0 \cap \cap\, \partial Q_2 = \varnothing$), то правая часть также равна нулю. Вычитая соответствующие левые части из функционала Гамильтона – Остроградского, получаем

$$G(\xi, \varphi_i, \rho_i) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \int_{Q_i(t)} \rho_i \left(-\varphi_{it} - \frac{(\nabla\varphi_i)^2}{2} - U_i(\rho_i) - gx \right) dQ - \right.$$
$$\left. - \sigma(|\Sigma| - \cos\alpha\, |S_2|) + \int_{S_0} \rho_0 V_0 \sin(\nu t)\, \varphi_1\, ds \right\} dt - \sum_{i=1}^{2} (\rho_i\varphi_i)\Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{15}$$

При условии (21) вычислим вариации от G по ρ_i и ξ:

$$\delta_{\rho_j} G = \int_{t_1}^{t_2} \Bigg[\int_{Q_j(t)} \delta\rho_j \left(-\varphi_{jt} - 0{,}5(\nabla\varphi_j)^2 - gx - U_j(\rho_j) - \rho_j \frac{\partial U_j}{\partial \rho_j} \right) dQ -$$

$$- \int_{Q_j(t)} \rho_j \left(\delta\varphi_{jt} + (\nabla\varphi_j, \nabla\delta\varphi_j)\right) dQ + \int_{S_0} \rho_0 \delta\varphi_j V_0 \sin(\nu t)\, ds - \frac{d}{dt} \int_{Q_j(t)} \rho_j \delta\varphi_j \, dQ +$$

$$+ \frac{d}{dt} \int_{Q_j(t)} \rho_j \delta\varphi_j \, dQ \Bigg] dt - [\delta\rho_j \varphi_j + \rho_j \delta\varphi_j] \Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \quad j = 1, 2.$$

С учетом (14) при выполнении условия изохронности вариации и (12) по ρ_j и наличии кинематических связей (2) выполнено

$$-\varphi_{jt} - 0{,}5\, (\nabla\varphi_j)^2 - gx - U_j(\rho_j) - \rho_j \frac{\partial U_j}{\partial \rho_j} = 0. \tag{16}$$

Из равенства (16) после нахождения grad и преобразования с учетом определения давления (13) получаем (1). Вычислим вариацию по ξ от (15), учитывая условие изохронности вариации (12) и известные формулы для вариаций от площадей $|\Sigma|$ и $|S_2|$ [1]:

$$\delta_\xi G = \int_{t_1}^{t_2} \Bigg\{ \sum_{i=1}^{2} \int_{Q_i(t)} \rho_i \left(-\delta\varphi_{it} - (\nabla\varphi_i, \nabla\delta\varphi_i)\right) dQ +$$

$$+ \int_{\Sigma_0} \sum_{i=1}^{2} (-1)^i \frac{\delta\xi}{|\nabla\xi|} \rho_i \left(-\varphi_{it} - 0{,}5 (\nabla\varphi_i)^2 - gx - U_i(\rho_i)\right) ds -$$

$$- \sigma \int_{\Sigma_0} (K_1 - K_2) \frac{\delta\xi}{|\nabla\xi|} ds + \sigma \int_{\partial\Sigma_0} \frac{\delta\xi}{|\nabla\xi|} \left\{ \frac{\nabla W, \nabla\xi}{|\nabla W|} + \cos\alpha\, |\nabla\xi| \right\} d\Gamma +$$

$$+ \int_{S_0} \rho_0 \delta\varphi_1 V_0 \sin(\nu t)\, ds \Bigg\} dt - \sum_{i=1}^{2} (\rho_i\, \delta\varphi_i) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

С учетом (14) для пары φ_i и $\delta\varphi_i$ имеем

$$\delta_\xi G = \int_{t_1}^{t_2} \Bigg[\Bigg\{ \int_{\Sigma_0} \sum_{i=1}^{2} (-1)^i \rho_i \big(-\varphi_{it} - 0{,}5 (\nabla\varphi_i)^2 -$$

$$- gx - U_i(\rho_i)\big)\, ds + \sigma (K_1 + K_2) \frac{\delta\xi}{|\nabla\xi|} ds +$$

$$+ \sigma \int_{\partial\Sigma_0} \frac{\delta\xi}{|\nabla\xi|} \left\{ \frac{\nabla W, \nabla\xi}{|\nabla W|} + \cos\alpha\, |\nabla\xi| \right\} d\Gamma \Bigg] dt = 0,$$

откуда следует, что динамическое условие (3) выполнено тогда и только тогда, когда выполнено (16), т. е. $\delta_{\rho_j} G = 0$, $j = 1, 2$. Теорема доказана.

Вариационные задачи типа Бейтмена. В [10] впервые указано, что роль лагранжиана в гидродинамических задачах со свободной поверхностью (в том числе и для сжимаемой жидкости) может играть давление. В более сложных случаях при наличии капиллярных сил, а также других потенциальных и кинематических воздействий соответствующая формулировка требовала уточнения. Каноническая формулировка вариационной задачи подобного типа, тесно связанная с вариационным принципом Гамильтона – Остроградского в эйлеровой постановке и допускающая обобщения, дана Бейтменом [11]. В случае несжимаемой жидкости с трактовкой лагранжиана как давления соответствующая вариационная формулировка для случая безграничной жидкости впервые приведена в [12]. Попытка формального обобщения работы Люка для сжимаемой жидкости сделана в [13], однако, как весьма резонно замечено в [7], такое обобщение в общем случае не верно и не только не соответствует канонической формулировке Бейтмена, но и в случае ограниченного объема при наличии капиллярных сил не является полным (не определяет условия на контуре смачивания). В то же время формулировка вариационной задачи типа Бейтмена позволяет при необходимости учесть все виды потенциальных и кинематических воздействий на систему.

Для задачи (1) – (4) приведем последовательно формулировки вариационных задач, основанные на принципах Бейтмена [11], Бейтмена – Бердичевского [7] и Бейтмена – Люка [12, 14], укажем на их взаимосвязь.

Основная идея вариационной формулировки Бейтмена заключается в том, чтобы построить функционал, не связанный ограничениями (2), стационарные точки которого достигаются на решении задачи (1) – (4) при независимой вариации функций, входящих в него. Рассмотрим функционал

$$B(\xi, \varphi_j, \rho_j) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \int_{Q_i(t)} \rho_i \left(-\varphi_{it} - \frac{(\nabla\varphi_i)^2}{2} - U_i(\rho_i) - gx \right) dQ - \right.$$

$$\left. - \sigma(|\Sigma| - \cos\alpha\, |S_2|) + \int_{S_0} \rho_0 V_0 \sin(\nu t)\varphi_1\, ds \right\} dt, \qquad (17)$$

отличающийся от (15) отсутствием последнего слагаемого.

Теорема 2 (вариационная задача типа Бейтмена). *Пусть решение задачи* (1) – (4) *такое, что*

$$\forall\, t_1 < t_2 \quad \varphi_i, p_i, \rho_i \in W_2^2(\hat{Q}_i),$$

$$\hat{Q}_i = \{(t, x, y, z)\colon\ \forall\, t \in [t_1, t_2] \ \ (x, y, z) \in Q_i(t) \cup \Sigma(t)\},$$

а поверхность $\Sigma(t)$ *гладкая (т. е. существует гладкий изоморфизм* $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1})$ *для некоторой фиксированной односвязной области с кусочно-гладкой границей*

$$Q_0[t_1, t_2] \times \overline{Q}_0 \xrightarrow{\ \mathfrak{F}\ } \overline{\hat{Q}}_2 \xrightarrow{\ \mathfrak{F}^{-1}\ } [t_1, t_2] \times \overline{Q}_0).$$

Тогда множество решений задачи (1) – (4) *совпадает с множеством стационарных точек функционала* (17) *при независимых изохронных гладких вариациях*

$$\delta\xi|_{t_1, t_2} = 0; \quad \delta\varphi_i|_{t_1, t_2} = 0; \quad \delta\rho_i|_{t_1, t_2} = 0.$$

Доказательство следует из формул для вариаций от (15) по ρ_j и ξ, а также по φ_j:

$$\delta_{\varphi_j} B = \int_{t_1}^{t_2} \left[- \int_{Q_j(t)} \rho_j (\delta\varphi_{jt} + (\nabla\varphi_j, \nabla\delta\varphi_j))\, dQ + \right.$$

$$+ \int\limits_{S_0} \rho_0 \delta\varphi_j V_0 \sin(\nu t)\, ds \Bigg] dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Bigg[\int\limits_{Q_j(t)} (\rho_{jt} + \operatorname{div}(\rho_j \nabla\varphi_j))\, \delta\varphi_j\, dQ -$$

$$- \int\limits_{S \setminus S_0} \rho_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial n} \delta\varphi_j\, ds - \int\limits_{\Sigma} \rho_j \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial n} + \frac{\xi_t}{|\nabla\xi|} \right) \delta\varphi_j\, ds -$$

$$- \int\limits_{S_0} \left(\rho_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \rho_0 V_0 \sin(\nu t) \right) \delta\varphi_1\, ds \Bigg] dt + \rho_0 \delta\varphi_j \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Теорема доказана.

Если выполнено (16), а φ_j — потенциалы скоростей, то подынтегральное выражение в интеграле по $Q_j(t)$ в (17) совпадает с давлением, определяемым (13). Таким образом, лагранжиан в функционале Бейтмена действительно совпадает с давлением, но лишь для решения задачи (1) – (4), т. е. только на стационарных точках.

Согласно *идее Бердичевского* формальным образом введем функционал

$$B_0(\xi, \varphi_i) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Bigg\{ \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{Q_i(t)} \sup_{\rho_i} \left\{ \rho_i \left(-\varphi_{it} - \frac{(\nabla\varphi_i)^2}{2} - U_i(\rho_i) - gx \right) \right\} dQ -$$

$$- \sigma(|\Sigma| - \cos\alpha\, |S_2|) + \int\limits_{S_0} \rho_0 V_0 \sin(\nu t) \varphi_1\, ds \Bigg\} dt. \tag{18}$$

Теорема 3 (вариационная задача типа Бейтмена – Бердичевского). *Пусть решение задачи* (1) – (4) *такое, что* $\forall\, t_1 < t_2 \;\; \varphi_i, p_i, \rho_i \in W_2^2(\hat{Q}_i)$, $\hat{Q}_i = \{(t, x, y, z):\ \forall\, t \in [t_1, t_2]\ (x, y, z) \in Q_i(t) \cup \Sigma(t)\}$, *а поверхность* $\Sigma(t)$ *гладкая (т. е. существует гладкий изоморфизм* $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1})$ *для некоторой фиксированной односвязной области с кусочно-гладкой границей*

$$Q_0\ \ [t_1, t_2] \times \overline{Q}_0 \xrightarrow{\ \mathfrak{F}\ } \overline{\hat{Q}}_2 \xrightarrow{\ \mathfrak{F}^{-1}\ } [t_1, t_2] \times \overline{Q}_0).$$

Тогда множество решений задачи (1) – (4) *совпадает с множеством стационарных точек функционала* (18) *при независимых изохронных гладких вариациях* ξ *и* φ_i

$$\delta\xi|_{t_1, t_2} = 0; \quad \delta\varphi_i|_{t_1, t_2} = 0.$$

(Последнее слагаемое в функционале Бейтмена – Бердичевского (18) *связано с наличием акустического воздействия.) В принципе Бейтмена – Бердичевского фактически сразу используется давление (если* φ_i *именно потенциалы скоростей) в качестве гидромеханической части лагранжиана, при этом процедура варьирования по* ρ_i *в функционале Бейтмена косвенно сводится к операции* sup. *Тем самым косвенно считаются выполненными уравнения Эйлера в областях* Q_i.

Авторами в [14] конкретизирован принцип Бейтмена – Бердичевского для случая, когда уравнение состояния (4) есть известная функция. Тогда, считая (1) выполненным (в результате операции sup), можно явно выразить p через φ: $p = P^{-1}(-\varphi_t - 0{,}5\,(\nabla\varphi)^2 - gx)$, где p имеет (в случае, когда φ не любая функция, а потенциал) смысл давления:

$$B_l(\xi,\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \int_{Q_i(t)} P^{-1}\left(-\varphi_{it} - \frac{(\nabla\varphi_i)^2}{2} - U_i(\rho_i) - gx \right) dQ - \right.$$

$$\left. - \sigma\left(|\Sigma| - \cos\alpha\, |S_2|\right) + \int_{S_0} \rho_0 V_0 \sin(\nu t)\varphi_1\, ds \right\} dt. \qquad (19)$$

Соответствующая вариационная задача типа Бейтмена – Люка для рассматриваемой задачи формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 4 (вариационная задача типа Бейтмена – Люка). *Пусть решение задачи* (1) – (4) *такое, что*

$$\forall\, t_1 < t_2 \quad \varphi_i, p_i, \rho_i \in W_2^2(\hat{Q}_i),$$

$$\hat{Q}_i = \left\{(t, x, y, z)\colon\ \forall\, t \in [t_1, t_2]\ \ (x, y, z) \in Q_i(t) \cup \Sigma(t)\right\},$$

а поверхность $\Sigma(t)$ гладкая (т. е. существует гладкий изоморфизм $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1})$ для некоторой фиксированной односвязной области с кусочно-гладкой границей

$$Q_0\ \ [t_1, t_2] \times \overline{Q}_0 \xrightarrow{\ \mathfrak{F}\ } \overline{\hat{Q}}_2 \xrightarrow{\ \mathfrak{F}^{-1}\ } [t_1, t_2] \times \overline{Q}_0).$$

Тогда множество решений задачи (1) – (4) *совпадает с множеством стационарных точек функционала* (19) *при независимых изохронных гладких вариациях ξ и φ_i:*

$$\delta\xi\big|_{t_1, t_2} = 0; \quad \delta\varphi_i\big|_{t_1, t_2} = 0.$$

Последняя формулировка есть наиболее точное обобщение работы Люка [12] для исследуемой задачи с неизвестной поверхностью раздела двух областей и является самым естественным для задачи о колебании жидкости в сосуде. В то же время последний принцип — частная форма записи принципа Бейтмена.

3. Редукция вариационных постановок задачи о взаимодействии с неизвестными поверхностями раздела к вариационным формулировкам задач теории волн на поверхности ограниченного объема жидкости. Вариационные формулировки задачи о капиллярно-звуковой равновесной форме. Следующие теоремы дают возможность обосновать принцип разделения движений в вариационных задачах (1) – (4), сформулированных в теоремах 1 – 4, и построить две вариационные задачи (типа Гамильтона – Остроградского и Бейтмена) для усредненной по быстрому времени задачи (8), (9).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теорем* 1 – 4 *и, кроме того,* ξ, φ_i, ρ_i, $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1})$ — *аналитические функции по* ε *в окрестности нуля. Тогда задача определения решения указанной задачи с точностью до* ε^3 *на* Σ *и стационарных точек функционала Гамильтона – Остроградского* (*теорема* 1) *эквивалентна задаче определения стационарных точек функционала* (G^* — *функционал типа Гамильтона – Остроградского в безразмерном виде*)

$$\langle G^*(\xi, \varphi_i, \rho_i)\rangle_t = \mathrm{const} + \varepsilon^{3/2}\vartheta(\zeta, \varphi) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\vartheta(\zeta,\varphi) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \int_{\langle Q_2\rangle} \left(\frac{(\nabla\varphi)^2}{2} - \mu\mu_1 Box \right) dQ - \mu\mu_1(|\Sigma| - \cos\alpha\,|S_2|) + \right.$$

$$\left. + 0{,}25\mu_1 \int_{\langle Q_1\rangle} (k^2\Phi_1^2 - (\nabla\Phi_1)^2)\, dQ - 0{,}5\mu_1\mu_0/k \int_{S_0} \Phi_1 V(x, y, z)\, ds \right\} d\tau, \qquad (20)$$

для изохронных гладких вариаций $\delta\zeta|_{t_1, t_2} = 0$, *при кинематических ограничениях*

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \langle Q_2\rangle; \quad \partial\varphi/\partial n = 0 \text{ на } \langle S_2\rangle; \quad \partial\varphi/\partial n = -\zeta_\tau/|\nabla\zeta| \text{ на } \langle\Sigma\rangle \tag{21}$$

и условиях параметрической зависимости $\Phi_1(x, y, z, \tau)$ *от* $\zeta(x, y, z, \tau)$

$$\Delta\Phi_1 + k^2\Phi_1 = 0 \quad \text{в } \langle Q_1\rangle;$$
$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \langle S_1\rangle \cup \langle\Sigma\rangle; \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \mu_0 V(x, y, z)/k \quad \text{на } S_0. \tag{22}$$

Доказательство. *Необходимость.* Согласно теореме 1 нахождение решений задачи (1) – (4) (в безразмерном виде (5) – (7)) эквивалентно определению стационарных точек функционала (11). С другой стороны, для безразмерных ξ, φ_1 и φ_2 выполнено (10). Подставив представление (10) в вариационный принцип теоремы 1 и выбрав $|t_2 - t_1| > \varepsilon^{3/2}$, получим $\langle G^*(\xi, \varphi_i, \rho_i)\rangle_t = \text{const} + \varepsilon^{3/2}\mathfrak{G}(\zeta, \varphi) + O(\varepsilon^2)$. При этом кинематические ограничения (2) примут вид (21), (22). С точностью до малых более высокого порядка задача определения стационарных точек функционала типа Гамильтона – Остроградского сведется к определению стационарных точек функционала $\mathfrak{G}(\zeta, \varphi)$.

Достаточность. Пусть ζ, φ — стационарная точка функционала (20) при ограничениях (21), (22). Легко проверить, что тогда ζ и φ удовлетворяют задаче (8), (9). Тогда для решения задачи вида (5) – (7) выполнены соотношения (10), а построенные по данным соотношениям ξ, φ_i [6] являются с точностью до малых более высокого порядка стационарными точками функционала G^*. Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теорем* 1 – 4 *и, кроме того,* ξ, φ_i, ρ_i, $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1})$ *— аналитические функции по* ε *в окрестности нуля. Тогда задача определения решения указанной задачи с точностью до* ε^3 *на* Σ *и стационарных точек функционала типа Бейтмена* (*теорема* 2) *эквивалентна задаче определения стационарных точек функционала* (B^**— функционал типа Бейтмена в безразмерном виде)*

$$\langle B^*(\xi, \varphi_i, \rho_i)\rangle_t = \text{const} + \varepsilon^{3/2}\mathfrak{B}(\zeta, \varphi) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\mathfrak{B}(\zeta, \varphi) = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\{\int_{\langle Q_2\rangle}\left(-\varphi_\tau - \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} - \mu\mu_1 Box\right)dQ - \mu\mu_1(|\Sigma| - \cos\alpha|S_2|) + \right.$$
$$\left. + 0{,}25\mu_1\int_{\langle Q_1\rangle}(k^2\Phi_1^2 - (\nabla\Phi_1)^2)\,dQ - 0{,}5\mu_1\mu_0/k\int_{S_0}\Phi_1 V(x, y, z)\,ds\right\}d\tau, \tag{23}$$

для изохронных гладких независимых вариаций

$$\delta\zeta|_{t_1, t_2} = 0; \quad \delta\varphi|_{t_1, t_2} = 0$$

(вариации по Φ_1 *также независимы).*

Доказательство. *Необходимость.* По теореме 2 нахождение решений задачи (1) – (4) (в безразмерном виде (5) – (7)) эквивалентно определению стационарных точек функционала (12). С другой стороны, для безразмерных ξ, φ_1 и φ_2 выполнено (10). Поставив представление (10) в функционал (12) и выбрав $|t_2 - t_1| > \varepsilon^{-3/2}$, получим $\langle B^*(\xi, \varphi_i, \rho_i)\rangle_t = \mathrm{const} + \varepsilon^{3/2}\mathfrak{B}(\zeta, \varphi) + O(\varepsilon^2)$. С точностью до малых более высокого порядка задача определения стационарных точек функционала Бейтмена сведется к определению стационарных точек функционала $\mathfrak{B}(\zeta, \varphi)$.

Достаточность. Пусть ζ, φ — стационарная точка функционала (23). Легко проверить, что тогда ζ и φ удовлетворяют задаче (8), (9). Тогда для решения задачи (5) – (7) выполнены соотношения (10), а построенные по данным соотношениям ξ, φ_i являются с точностью до малых более высокого порядка чем ε^2 стационарными точками функционала. Теорема доказана.

Замечание. Легко заметить, что вариационные задачи типа Бейтмена – Бердичевского и типа Бейтмена (теоремы 3 и 4) приводят к формулировке теоремы 6.

Если $\varphi_\tau = 0$, то обе вариационные формулировки приводят к двум вариационным формулировкам для определения так называемой капиллярно-звуковой равновесной формы (см. работы [5, 6]):

$$\mu(Box - (K_1 + K_2)) + 0{,}25(k^2(\Phi_1)^2 - (\nabla\Phi_1)^2) = \mathrm{const} \quad \text{на } \Sigma_0,$$

$$-(\nabla W, \nabla\zeta_0)/|\nabla W| = \cos\alpha\,|\nabla\zeta_0| \quad \text{на } \partial\Sigma_0; \quad \int\limits_{Q_2} dQ = \mathrm{const}, \tag{24}$$

$$\Delta\Phi_1 + k^2\Phi_1 = 0 \quad \text{в } \langle Q_1\rangle;$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \langle S_1\rangle \cup \Sigma_0; \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \mu_0 V(x,y,z)/k \quad \text{на } S_0,$$

причем первая из них (отсутствие кинетической энергии) носит смысл вариационного принципа для минимума потенциальной энергии, усредненной по быстрым движениям.

Теорема 7 (вариационная задача I — типа Гамильтона – Остроградского для задачи о капиллярно-звуковой равновесной форме). *Задача определения гладких поверхностей* Σ_0 *из задачи о капиллярно-звуковой равновесной форме* (24) *эквивалентна определению стационарных точек функционала*

$$U(\zeta_0) = \mu\left(-|\Sigma_0| - \cos\alpha\,|\langle S_1\rangle| - \int\limits_{\langle Q_2\rangle} Box\,dQ\right) +$$

$$+ \left(0{,}25\int\limits_{\langle Q_1\rangle}(k^2\Phi_1^2 - (\nabla\Phi_1)^2)\,dQ + 0{,}5\mu_0/k\int\limits_{S_0} V(x,y,z)\Phi_1\,ds\right) \tag{25}$$

при наличии ограничений

$$\int\limits_{\langle Q_2\rangle} dQ = \mathrm{const} \tag{26}$$

и

$$\Delta\Phi_1 + k^2\Phi_1 = 0 \quad \textit{в } \langle Q_1\rangle;$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \quad \textit{на } \langle S_1\rangle \cup \Sigma_0; \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \mu_0 V(x,y,z)/k \quad \textit{на } S_0. \tag{27}$$

Доказательство. Формулы для первой вариации от функционала (25) могут быть получены из формул для первой вариации от функционала вида

$$|\Sigma_0| + \cos\alpha\, |\langle S_1\rangle| + \int\limits_{\langle Q_2\rangle} \Pi_2\, dQ + \int\limits_{\langle Q_1\rangle} \Pi_1\, dQ, \tag{28}$$

которые приведены в [1] (при учете того, что условие $\delta_{\Phi_1} U = 0$ эквивалентно задаче (27)). В [1] для случая (28) показано, что условие $\delta U = 0$ эквивалентно условию на Σ_0 (24), что в совокупности с (26), (27) и составляет задачу о капиллярно-звуковой равновесной форме. Теорема доказана.

Теорема 8 (вариационная задача II — типа Бейтмена для капиллярно-звуковой равновесной формы). *Задача определения гладких поверхностей из задачи о капиллярно-звуковой равновесной форме* (24) *эквивалентна определению стационарных точек функционала по* ξ_0 *и* Φ_1:

$$UB(\zeta_0, \Phi_1) = \mu\left(-|\Sigma_0| - \cos\alpha\, |\langle S_1\rangle| - \int\limits_{\langle Q_2\rangle} Box\, dQ \right) +$$

$$+ \left(0{,}25 \int\limits_{\langle Q_1\rangle} (k^2\Phi_1^2 - (\nabla\Phi_1)^2)\, dQ + 0{,}5\mu_0 / k \int\limits_{S_0} V(x, y, z)\, \Phi_1\, ds \right) \tag{29}$$

при наличии ограничения (26).

Доказательство следует из доказательства предыдущей теоремы с учетом того, что $\delta_{\Phi_1} UB = 0$ эквивалентно задаче (27). Теорема доказана.

1. *Гидромеханика* невесомости / Под ред. А. Д. Мышкиса. – М.: Наука, 1978. – 504 с.
2. *Луковский И. А., Тимоха А. Н.* О свободных колебаниях системы "жидкость – газ" в цилиндрическом сосуде в слабом гравитационном поле / Прямые методы в задачах динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 5 – 12.
3. *Луковский И. А.* Введение в нелинейную динамику тела с полостью, частично заполненной жидкостью. – Киев: Наук. думка, 1990. – 296 с.
4. *Нелинейные* проблемы теории поверхностных и внутренних волн // В. Л. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Налимов и др. – Новосибирск: Наука, 1985. – 318 с.
5. *Луковский И. А., Тимоха А. Н.* Об одном классе краевых задач в теории поверхностных волн // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 3. – С. 359 – 365.
6. *Lukovsky I. A., Timokha A. N.* Waves on the liquid – gas free surface in limited volume in the presence of the acoustic field in gas // Int. Series of Numerical Mathematics.– 1992.– **106**.– P. 187 – 194.
7. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 448 с.
8. *Петров А. А.* Вариационная формулировка задачи о движении жидкости в сосуде конечных размеров // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, № 4. – С. 754 – 758.
9. *Комаренко А. Н.* Эквивалентность принципа Гамильтона – Остроградского и краевой задачи динамики жидкости в сосуде // Устойчивость движения твердых тел и деформируемых систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 52 – 60.
10. *Hargneaves R.* A pressure-integral as kinetic potential // Phil. Magazine.– 1908.– **16**.– P. 436–444.
11. *Bateman H.* Partial differential equations of mathematical physics. – New York: Dover publ., 1944. – 522 p.
12. *Luke J. C.* A variational principle for a fluid with free surface // J. Fluid Mech. – 1967. – **27**. – P. 395–397.
13. *Воляк К. И.* Вариационный принцип для сжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. – 1977. – **236**, № 5. – С. 1095 – 1097.
14. *Луковский И. А., Тимоха А. Н.* Вариационный принцип Бейтмена для одного класса задач динамики и устойчивости поверхностных волн // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 9. – С. 1181 – 1186.

Получено 08. 04. 93