УДК 519.21

М. М. Леоненко, д-р фіз.-мат. наук,
А. Ю. Портнова, студ. (Київ. ун-т)

ПРО ГРАНИЧНИЙ РОЗПОДІЛ КОРЕЛОГРАМИ СТАЦІОНАРНОГО ГАУССІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ ЗІ СЛАБКИМ СПАДАННЯМ КОРЕЛЯЦІЇ

An example of non-Gaussian limit distribution of a statistical estimator of the correlation function is given foa a stationary Gaussian process with the unbounded spectral density (or with a nonintegrable correlation function).

Наведено приклад негауссівського граничного розподілу статистичної оцінки кореляційної функції стаціонарного гауссівського процесу, спектральна щільність якого необмежена (або кореляційна функція не інтегровна).

1. Вступ. Граничні теореми для оцінки кореляційної функції випадкових процесів та полів стаціонарного типу розглядались у роботах багатьох авторів (див., наприклад, [1, 2]). У випадку слабкої залежності (кореляційна функція інтегровна або спектральна щільність обмежена і неперервна) при деяких інших припущеннях граничний розподіл корелограми є гауссівським ([1], гл. 4). Найбільш завершений результат одержано в [2], де показано, що єдиною умовою асимптотичної нормальності (при стандартному нормуванні) є обмеженість і неперервність спектральної щільності (точніше, допускається лише логарифмічне її зростання до нескінченності). В даній роботі показано, що якщо ця умова порушується (спектральна щільність прямує до нескінченності степеневим чином), то граничний розподіл корелограми (при нестандартному нормуванні) буде вже негауссівським, його можна задати за допомогою кратного стохастичного інтеграла.

Відзначимо ще роботи [3–7], присвячені граничним теоремам для функціоналів від гауссівських процесів при сильній залежності, зокрема, граничним теоремам для квадратичних форм від таких процесів, що мають безпосереднє відношення до результатів даної статті.

2. Деякі асимптотичні властивості корелограми. Зробимо припущення.

I. Нехай $x(t)$, $t \in R^1$, — вимірний дійсний неперервний у середньому квадратичному стаціонарний гауссівський процес з $Mx(t)=0$, $Mx^2(t)=1$ і кореляційною функцією

$$B(h) = B(|h|) = M\,x(0)\,x(h) \sim L(|h|)/|h|^{\alpha}, \quad |h| \to \infty,$$

де $\alpha > 0$, а $L(t)$, $t > 0$, — функція, що повільно змінюється на нескінченності та обмежена в кожному скінченному інтервалі.

***Зауваження* 1.** При умові I і $\alpha \in (0, 1)$ кореляційна функція не інтегровна, а спектральна щільність (якщо вона існує) необмежена (див. [6] і цитовану там літературу). В цьому випадку будемо говорити про випадковий процес з сильною залежністю.

При умові I для оцінки невідомої кореляційної функції $B(h)$ по спостереженням над процесом $x(t)$, $t \in [0, H]$, де $H > 0$ — фіксоване число, а $T \to \infty$, розглянемо корелограму

$$B_T(h) = T^{-1} \int_0^T x(t)x(t+h)\,dt.$$

Надалі будемо користуватися зображенням

$$B_T(h) = B(h) + (2T)^{-1} \int_0^T \left[(1+B(h))H_2(\eta_2(t)) - (1-B(h))H_2(\eta_1(t))\right] dt, \quad (1)$$

де $H_2(u) = u^2 - 1$ — другий поліном Чебишева – Ерміта, а

$$\eta_1(t) = \left(x(t+h) - x(t)\right) \Big/ \sqrt{2(1-B(h))}, \quad t \in \mathbb{R}^1,$$
$$\eta_2(t) = \left(x(t+h) + x(t)\right) \Big/ \sqrt{2(1+B(h))}, \quad t \in \mathbb{R}^1, \tag{2}$$

— стаціонарні випадкові процеси (при фіксованому h).

Зауваження 2. В умові I можна відмовитись від вимоги $B(0) = 1$. Всі сформульовані нижче результати залишаються справедливими, якщо замість процесів $\eta_1(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, та $\eta_2(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, розглянути процеси, що визначаються аналогічним чином з заміною в знаменниках 1 на $B(0)$.

Очевидно, що $MB_T(h) = B(h)$. Виявляється, що при сильній залежності асимптотика дисперсії $B_T(h)$ при $T \to \infty$ не залежить від h (пор. з результатами [1, 2]).

Лема 1. *Нехай виконана умова* I *і* $T \to \infty$. *Тоді при* $\alpha \in (0, 1/2)$ *і будь-якому* $h \in [0, H]$

$$DB_T(h) = c_1(\alpha)\, T^{-2\alpha} L^2(T)\,(1 + o(1)),$$

де $c_1(\alpha) = 2/[(1-\alpha)(1-2\alpha)]$.

Доведення. Неважко показати, що

$$DB_T(h) = 2T^{-1} \int_0^T (1 - \tau/T)\left[B^2(\tau) + B(\tau+h)B(\tau-h)\right] d\tau.$$

Виконуючи заміну змінної $t = \tau/T$, одержуємо

$$DB_T(h) = 2L^2(T)\, T^{-2\alpha} \int_0^1 (1-t) R_T(t) t^{-2\alpha} dt,$$

де

$$R_T(t) = (tT)^{2\alpha}\left[B^2(tT) + B(tT+h)B(tT-h)\right]/L^2(T).$$

Використовуючи асимптотику $B(Tt)$ при $T \to \infty$ та відомі властивості функцій, що повільно змінюються на нескінченності, маємо $R_T(t) \to 2$, $T \to \infty$. При $\alpha \in (0, 1/2)$ граничним переходом під знаком інтеграла (його можна зробити, оскільки функція $(1-t)/t^{2\alpha}$ абсолютно інтегровна) одержуємо, що

$$DB_T(h) \sim c_1(\alpha)\, L^2(T)\, T^{-2\alpha}, \quad T \to \infty.$$

Теорема 1. *Нехай виконана умова* I *і*

$$|B(\tau+h) - B(\tau)| \le c_4^2 |h|^{1+\Delta}, \quad \Delta > 0.$$

Тоді

$$P\{\lim_{T\to\infty} \sup_{h\in[0,H]} |B_T(h) - B(h)| = 0\} = 1.$$

Зауважимо, що в умовах теореми

$$M\left(x(t+h) - x(t)\right)^4 \le 12(B(h) - 1)^2 \le c_3^2 |h|^{2(1+\Delta)}.$$

Доведення. 1)

$$B_T(h) - B(h) = T^{-1} \int_0^T [x(t)x(t+h) - B(h)]\,dt = T^{-1} \int_0^T u(h,t)\,dt,$$

де $u(h,t) = x(t)x(t+h) - B(h)$. Позначимо $Y_T(h) = B_T(h) - B(h)$. Виберемо деякі $0 < \gamma < \alpha$, $\delta > 0$ і для послідовності $T_k = k^{\delta + 1/(\alpha\gamma)}$ доведемо, що з імовірністю 1

$$\sup_{h \in [0,H]} \left| Y_{T_k}(h) \right| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Розглянемо співвідношення

$$\left| Y_{T_k}(\tau + h) - Y_{T_k}(t) \right|^2 \le 2(B(\tau + h) - B(\tau))^2 +$$

$$+ 2T_k^{-2} \int_0^{T_k} \int_0^{T_k} x(t)x(s)[x(t+h+\tau) - x(t+\tau)][x(s+\tau+h) - x(s+\tau)]\,dt\,ds.$$

За нерівністю Коші – Буняковського

$$M \left| x(t)x(s)[x(t+h+\tau) - x(t+\tau)][x(s+\tau+h) - x(s+\tau)] \right| \le$$

$$\le \left(M|x(t)x(s)|^2 \right)^{1/2} \left(M(x(t+h+\tau) - x(t+\tau))^4 \right)^{1/4} \times$$

$$\times \left(M(x(s+\tau+h) - x(s+\tau))^4 \right)^{1/4} \le c_5 |h|^{1+\Delta}, \tag{3}$$

де $c_5 = \left(M|x(t)x(s)|^2 \right)^{1/2} c_3$. З іншого боку, використовуючи лему 1, маємо $M\left(Y_{T_k}(\tau + h) - Y_{T_k}(\tau) \right)^2 \le c_6 T_k^{-\alpha}$, і отже,

$$M\left(Y_{T_k}(\tau + h) - Y_{T_k}(\tau) \right)^2 \le \left[M\left(Y_{T_k}(\tau + h) - Y_{T_k}(\tau) \right)^2 \right]^{1-\gamma} \times$$

$$\times \left[M\left(Y_{T_k}(\tau + h) - Y_{T_k}(\tau) \right)^2 \right]^{\gamma} \le c_7 |h|^{(1+\Delta)(1-\gamma)} T_k^{-\alpha\gamma}.$$

Позначимо

$$\varphi\left(Y_{T_k}, q \right) = \sup_{\substack{\tau \\ |h| \le q \\ h:\, \tau + h \in [0,H]}} \left| Y_{T_k}(\tau + h) - Y_{T_k}(\tau) \right|.$$

Тоді

$$P\left\{ \varphi\left(Y_{T_k}, q \right) \ge \varepsilon \right\} \le \varepsilon^{-2} c_7 T_k^{-\alpha\gamma} q^{(1+\Delta)(1-\gamma)-1}.$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k^{-\alpha\gamma} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1-\alpha\gamma\delta} < \infty,$$

то

$$P\left\{ \lim_{k \to \infty} \varphi\left(Y_{T_k}, q \right) = 0 \right\} = 1.$$

2) Нехай $I \subset [0,H]$ — скінченна множина, що задовольняє умову $\forall\, h \in [0,H]\ \exists\, h' \in I$: $|h' - h| < 1$. Тоді

$$\sup_{\tau\in[0,H]} \left| Y_{T_k}(\tau) \right| \le \sup_{\substack{\tau\in[0,H],\\ |h|<1}} \left| Y_{T_k}(\tau+h) - Y_{T_k}(h) \right| + \sup_{\tau'\in I} \left| Y_{T_k}(\tau') \right| =$$

$$= \varphi\left(Y_{T_k}, 1 \right) + \max_{\tau'\in I} \left| Y_{T_k}(\tau') \right|.$$

За доведеним $P\{\varphi\left(Y_{T_k}, 1 \right) \to 0, \ \ k\to\infty\} = 1$.

3) Покажемо, що $P\{ \lim\limits_{k\to\infty} \left| Y_{T_k}(h) \right| = 0\} = 1$. Дійсно, за нерівністю Чебишова

$$P\{ \left| Y_{T_k}(h) \right| > \varepsilon \} \le \varepsilon^{-2} M \left| Y_{T_k}(h) \right|^2 \le 2\varepsilon^{-2} T_k^{-2\alpha} L^2(T_k) c_1(\alpha) \le c_6/2\, T_k^{-\alpha} \varepsilon^{-2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k^{-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(1/\gamma+\alpha\delta)} < \infty.$$

Потрібна збіжність випливає з леми Бореля – Кантеллі.

4) $$\sup_{\tau\in[0,H]} |Y_T(\tau)| \le \sup_{\tau\in[0,H]} \left| Y_T(\tau) - Y_{T_k}(\tau) \right| + \sup_{\tau\in[0,H]} \left| Y_{T_k}(\tau) \right| \le$$

$$\le \sup_{\tau\in[0,H]} \delta_k(\tau) + \sup_{h\in[0,H]} \left| Y_{T_k}(h) \right|, \quad \delta_k(\tau) = \sup_{T_k\le T<T_{k+1}} \left| Y_T(\tau) - Y_{T_k}(\tau) \right|.$$

Залишається довести, що

$$P\{ \sup_{\tau\in[0,H]} \delta_k(\tau) \to 0, \ \ k\to\infty\} = 1;$$

$$\delta_k(\tau) = \sup_{T_k\le T<T_{k+1}} \left| T^{-1} \int_0^T u(\tau, t)dt - T_k^{-1} \int_0^{T_k} u(\tau, t)dt \right| \le$$

$$\le \sup_{T_k\le T<T_{k+1}} \left| T_{k+1}/T_k \cdot T_k^{-1} \int_0^{T_k} u(\tau, t)dt + \right.$$

$$\left. + T_k^{-1} \int_{T_k}^{T} u(\tau, t)dt - T_k^{-1} \int_0^{T_k} u(\tau, t)dt \right| \le$$

$$\le (T_{k+1} - T_k)\, T_k^{-1} \left| \int_0^{T_k} u(\tau, t)dt \right| + T_k^{-1} \int_{T_k}^{T_{k+1}} |u(\tau, t)|\, dt.$$

Позначимо

$$\eta_k(\tau) = T_k^{-1} \int_{T_k}^{T_{k+1}} |u(\tau, t)|\, dt.$$

Використовуючи оцінку (3), одержуємо

$$M|\eta_k(\tau+h) - \eta_k(\tau)|^2 \le (T_{k+1} - T_k)^2\, T_k^{-2}\, c_8 |h|^{1+\Delta}.$$

Оскільки ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (T_{k+1}/T_k - 1)^2 < \infty,$$

то для процесів $\eta_k(\tau)$ можна провести ті ж самі міркування, що і для процесів $Y_{T_k}(\tau)$. Отже,

$$P\Big\{ \sup_{\tau\in[0,H]} |\eta_k(\tau)| \to 0, k\to\infty \Big\} = 1,$$

що завершує доведення теореми.

3. Граничний розподіл корелограми. При умові I і $\alpha \in (0, 1/2)$ розглянемо випадковий процес

$$\xi_T(h) = L^{-1}(T)\, T^{\alpha}(B_T(h) - B(h)), \quad h \in [0, H].$$

Відомо (див., наприклад, [8]), що при умові I кореляційна функція $B(h)$, $h \in \in R^1$, допускає спектральний розклад

$$B(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\lambda h) F(d\lambda) = \int_{0}^{\infty} \cos(\lambda h)\, dG(\lambda), \tag{4}$$

де $F(\cdot)$ — спектральна міра процесу, $G(\lambda) = F((-\lambda, \lambda))$. Процес $x(t)$, $t \in R^1$, також допускає спектральний розклад у вигляді стохастичного інтеграла за комплексною ортогональною гауссівською випадковою мірою $Z(\cdot)$, що пов'язана з мірою $F(\cdot)$, тобто

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} Z(d\lambda), \tag{5}$$

$$MZ(S) = 0, \quad M|Z(S)|^2 = F(S), \quad S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1).$$

З (2), (4) одержуємо

$$\eta_1(t) = \big(2(1 - B(h))\big)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}(e^{i\lambda h} - 1) Z(d\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} Z_1(d\lambda),$$

$$\eta_2(t) = \big(2(1 + B(h))\big)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}(e^{i\lambda h} + 1) Z(d\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} Z_2(d\lambda),$$

де $Z_1(\cdot)$, $Z_2(\cdot)$ — випадкові спектральні міри стаціонарних процесів відповідно $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$.

Використовуючи формулу Іто (див., наприклад, [1, 4, 5]), маємо

$$H_2(\eta_k(t)) = \int'_{\mathbb{R}^2} e^{i(\lambda_1+\lambda_2)t} Z_k(d\lambda_1)\, Z_k(d\lambda_2), \quad k = 1, 2. \tag{6}$$

Тут і далі символом $\int'_{\mathbb{R}^2}$ позначено кратний стохастичний інтеграл (інтегрування по гіперплощинах $\lambda_i = \pm\lambda_j$, $i, j = 1, 2$, виключається). Використовуючи (2), (6), одержуємо

$$B_T(h) - B(h) = (1 + B(h))/(2T) \int_0^T \Big(\int'_{\mathbb{R}^2} e^{i(\lambda_1+\lambda_2)t} Z_2(d\lambda_1)\, Z_2(d\lambda_2) \Big) dt -$$

$$- (1 - B(h))/(2T) \int_0^T \Big(\int'_{\mathbb{R}^2} e^{i(\lambda_1+\lambda_2)t} Z_1(d\lambda_1)\, Z_1(d\lambda_2) \Big) dt =$$

$$= (2T)^{-1} \int'_{\mathbb{R}^2} (e^{i\lambda_1 h} + e^{i\lambda_2 h})(e^{i(\lambda_1+\lambda_2)t} - 1)/(i(\lambda_1 + \lambda_2))\, Z(d\lambda_1)\, Z(d\lambda_2). \tag{7}$$

Введемо припущення, пов'язане зі співвідношенням (4).

II. Процес $x(t)$, $t \in R^1$, має спектральну щільність, тобто невід'ємну парну інтегровну на $(0, \infty)$ функцію таку, що

$$B(h) = 2 \int_0^\infty \cos(\lambda h) f(\lambda)\, d\lambda. \tag{8}$$

Використовуючи тауберову теорему з роботи [9] (узагальнення цих разультатів, пов'язане з появою функцій, що повільно змінюються, наведено в [10]) одержуємо, що при умовах I, II і $\lambda \to 0+$

$$G(\lambda) \sim L(1/\lambda)\lambda^{\alpha}/c_2(\alpha), \tag{9}$$

де

$$c_2(\alpha) = \Gamma((2+\alpha)/2)2^{\alpha}\sqrt{\pi}\,/\Gamma((1-\alpha)/2).$$

III. Нехай спектральна щільність (див. (8)) монотонно спадає при $\lambda \ge \lambda_0$, де $\lambda_0 > 0$.

При умовах II, III [9, с. 6] з (9) одержуємо

$$f(\lambda) \sim \alpha L(1/\lambda)\lambda^{\alpha-1}/[2c_2(\alpha)], \quad \lambda \to 0+. \tag{10}$$

***Зауваження* 3.** Умову III можна замінити на більш слабку: вираз $tG'(ty)/G(t)$ обмежений $\forall\, y > 0$ [11].

При умовах I – III з (2), (7) одержуємо, що

$$B_T(h) - B(h) = (2T)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2}' (e^{i(\lambda_1+\lambda_2)T} - 1) \times$$

$$\times\, (e^{i\lambda_1 h} + e^{i\lambda_2 h})\sqrt{f(|\lambda_1|)f(|\lambda_2|)}\,/(i(\lambda_1+\lambda_2))\, W(d\lambda_1)\, W(d\lambda_2), \tag{11}$$

де $W(\cdot)$ — комплексний гауссівський білий шум в R^1.

Розглянемо випадкову величину другого порядку η, яка визначається за допомогою кратного стохастичного інтеграла

$$\eta = \alpha/[2c_2(\alpha)] \int_{\mathbb{R}^2}' (e^{i(\lambda_1+\lambda_2)} - 1)/(i(\lambda_1+\lambda_2)) \times$$

$$\times\, |\lambda_1|^{(\alpha-1)/2}|\lambda_2|^{(\alpha-1)/2} W(d\lambda_1)\, W(d\lambda_2). \tag{12}$$

***Зауваження* 4.** Очевидно, що $M\eta^2 < \infty$, але розподіл величини η не є гауссівським.

Основним результатом роботи є така теорема.

Теорема 2. *При умовах* I – III *і* $T \to \infty$ *розподіли випадкових процесів*

$$\xi_T(h) = L^{-1}(T)\, T^{\alpha}(B_T(h) - B(h)), \quad h \in [0, H],$$

слабко збігаються до розподілу випадкової величини η.

Доведення. Доведемо, що при $T \to \infty$ $M|\xi_T(h) - \eta|^2 \to 0$. Виконавши заміну змінних $\lambda_i T = \mu_i$, $i = 1, 2$, і використавши автомодельність порядку $1/2$ вінерівської випадкової міри (формально $W(d(d\lambda)) = \sqrt{a}\, W(d\lambda)$), з (11) маємо

$$\xi_T(h) = T^{\alpha-1}/(2L(T)) \int_{\mathbb{R}^2}' (e^{i\mu_1 h/T} + e^{i\mu_2 h/T})(e^{i(\mu_1+\mu_2)} - 1)/(i(\mu_1 + \mu_2)) \times$$

$$\times \sqrt{f(|\mu_1|/T) f(|\mu_2|/T)}\, W(d\mu_1) W(d\mu_2) =$$

$$= \alpha/(2c_2(\alpha)) \int_{\mathbb{R}^2}' (e^{i(\mu_1+\mu_2)} - 1)/(i(\mu_1 + \mu_2)) \times$$

$$\times |\mu_1|^{(\alpha-1)/2} |\mu_2|^{(\alpha-1)/2} Q_T(\mu_1, \mu_2) W(d\mu_1) W(d\mu_2), \tag{13}$$

$$Q_T(\mu_1, \mu_2) = c_2(\alpha)/\alpha L^{-1}(T)\, T^{\alpha-1} (e^{i\mu_1 h/T} + e^{i\mu_2 h/T}) \times$$

$$\times |\mu_1|^{(1-\alpha)/2} |\mu_2|^{(1-\alpha)/2} \sqrt{f(|\mu_1|/T) f(|\mu_2|/T)}.$$

Тоді з (12), (13) маємо

$$M|\xi_T(h) - \eta|^2 = \alpha^2/(4c_2^2(\alpha)) \int_{\mathbb{R}^2} |e^{i(\mu_1+\mu_2)} - 1|^2 (\mu_1 + \mu_2)^{-2} \times$$

$$\times |\mu_1|^{\alpha-1} |\mu_2|^{\alpha-1} |Q_T(\mu_1, \mu_2) - 1|^2 d\mu_1\, d\mu_2.$$

Функція

$$g(\mu_1, \mu_2) = |e^{i(\mu_1+\mu_2)} - 1|^2 (\mu_1 + \mu_2)^{-2} |\mu_1 \mu_2|^{\alpha-1}$$

на нескінченності має порядок $(\mu_1\mu_2)^{\alpha-3}$, а в нулі $g(\mu_1, \mu_2) \le \tilde{c}/(\mu_1\mu_2)^{(1-\alpha)}$, тому g абсолютно інтегровна, а $Q_T(\mu_1, \mu_2) \to 1$, $T \to \infty$, що витікає з асимптотики спектральної щільності в нулі та властивостей функцій, що повільно змінюються. Таким чином, $M|\xi_T(h) - \eta|^2 \to 0$ при $T \to \infty$, звідки випливає, що розподіли випадкових величин $\xi_T(h)$ збігаються до розподілу випадкової величини η. Збіжність всіх скінченновимірних розподілів доводиться методом Крамера – Уолда – Сапогова (доведення опускаємо, бо воно стандартне).

1. *Ivanov A. V., Leonenko N. N.* Statistical analysis of random fields. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Acad. Publ., 1989. – 244 p.
2. *Buldigin V. V., Zayats V. V.* Strong consistency and asymptotic normality of correlation function estimates in different functional spaces // YI USSR – Japan symposium on probability theory and mathematical statistics (Kiev, August 5 – 10. 1991). Abstract and Communications. – Киев, Ин-т математики АН УССР, 1991. – 30 с.
3. *Rosenblatt M.* Some limit theorems for partial sums of quadratic form in stationary Gaussian variables // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1979. – **49**, № 2. – P. 125–132.
4. *Dobrushin R. L., Major P.* Non-central limit theorems for non-linear functionals of Gaussian fields // Ibid. – **50**, № 1. – P. 27–52.
5. *Taqqu M. S.* Convergence of integral processes of arbitrary Hermit rang // Ibid. – P. 53–83.
6. *Terrin N., Taqqu M. S.* Convergence in distribution of sums of bivariate Appell polynomials with long range dependence. – Boston, 1989. – 25 p. – (Preprint).
7. *Terrin N., Taqqu M. S.* A concentral limit theorem for quadratic forms of Gaussian stationary sequences. – Boston, 1989. – 26 p. – (Preprint).
8. *Ядренко М. И.* Спектральная теория случайных полей. – Киев: Вища шк. Изд-во при Киев. ун-те, 1980. – 207 с.
9. *Леоненко Н. Н., Оленко А. Я.* Тауберова и абелева теоремы для корреляционной функции однородного изотропного случайного поля // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 12. – С. 1652–1664.
10. *Оленко А. Я.* Некоторые вопросы корреляционной и спектральной теории случайных полей: дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1991. – 17 с.
11. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т. – М.: Мир, 1984. – Т. 2. – 750 с.

Получено 03. 01. 92