УДК 517.944

**И. В. Скрыпник,** акад. АН Украины
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ПЕРФОРИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ

The asymptotic expansion of solutions to quasilinear parabolic problems with the Dirichlet boundary conditions is constructed in the regions with a fine-grain boundary. It is shown that the sequence of the remainders of the expansion strongly converges to zero in the space $W_2^{1,1/2}$.

Будується асимптотичний розклад розв'язків квазілінійних параболічних задач з граничною умовою Діріхле в областях з дрібнозернистою межею. Доводиться сильна збіжність до нуля послідовності залишкових членів розкладу у просторі $W_2^{1,1/2}$.

Пусть $\Omega$ — произвольная ограниченная область в $n$-мерном евклидовом пространстве $R^n$, $n \geq 3$. Предположим, что при каждом натуральном значении $s$ определено конечное число непересекающихся замкнутых множеств $F_i^{(s)}$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, I(s)$, содержащихся в $\Omega$. Дальше будут сформулированы условия на $F_i^{(s)}$, из которых, в частности, следует, что при $s \to \infty$ диаметры этих множеств стремятся к нулю, а их число может стремиться к бесконечности.

В цилиндрической области $Q_T^{(s)} = \Omega^{(s)} \times [0, T]$, $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{I(s)} F_i^{(s)}$, рассматривается квазилинейная параболическая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (x, t) \in Q_T^{(s)}, \tag{1}$$

$$u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \partial\Omega^{(s)} \times [0, T], \tag{2}$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in \Omega^{(s)} \tag{3}$$

с некоторыми известными определенными соответственно в $Q_T = \overline{\Omega} \times [0, T]$, $\overline{\Omega}$ функциями $f(x, t)$, $g(x)$.

Хорошо известны условия, обеспечивающие существование решения $u_s(x, t)$ задачи (1) – (3) (см., например, [1]). Вместе с тем сложная структура области $\Omega^{(s)}$ делает актуальным построение усредненной задачи в области $Q_T$, к решению которой сходятся $u_s(x, t)$ при $s \to \infty$. Интерес к такому усреднению стимулируется задачами математической физики, описывающими нестационарные процессы в сильно неоднородных средах.

Вопросы усреднения эллиптических граничных задач в семействах областей $\Omega^{(s)}$ изучены в линейном и в нелинейном случаях. Для линейных уравнений с гладкими коэффициентами это сделано в работах В. А. Марченко и Е. Я. Хруслова (см. монографию [2]). Для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка результаты получены автором при таких общих предположениях, что охватывались линейные дивергентные уравнения с измеримыми ограниченными коэффициентами [3, 4].

Построение усредненной задачи в нелинейном случае основывалось на поточечных оценках модельных задач, позволивших изучить поведение членов асимптотического разложения и построить усредненную задачу. Попытка перенесения этих методов на параболические уравнения предпринималась в статье [5], в которой использовались поточечные оценки решений эллиптических задач. Однако при этом возникали сильные ограничения как структурного характера, так и на гладкость коэффициентов. В частности, эти ограничения требовались для получения равномерной по $s$ оценки для $L_2$-норм производных $\partial u_s(x,t)/\partial t$ решений задачи вида (1) – (3).

В данной работе предлагается новый способ построения асимптотического разложения, связанный с локальными рассмотрениями не только по пространственным, но и по временной координатам. Основой такого разложения служат поточечные оценки решений параболических задач, полученные автором в [6]. Построению на базе предложенного асимптотического разложения усредненной граничной задачи будет посвящена отдельная статья автора.

**1. Оценка решений $u_s(x,t)$.** Вначале сформулируем условия относительно функций $a_j(x,t,u,p)$, $f(x,t)$, $g(x)$. При этом ограничимся наиболее простыми предположениями относительно роста коэффициентов $a_j(x,t,u,p)$ по переменным $u, p$, хотя последующие результаты легко доказываются при более общих условиях, обеспечивающих разрешимость задачи (1) – (3) в $W_2^{1,1/2}$ и ограниченность решения [1].

Будем предполагать, что $a_j(x,t,u,p)$, $j=0,1,\ldots,n$, определены при $x\in R^n$, $t\in R^1$, $u\in R^1$, $p\in R^n$ и удовлетворяют условиям:

$A_1$) функции $a_j(x,t,u,p)$ непрерывны по $u, p$ при почти всех $(x,t)\in$ $\in R^n\times R^1$, измеримы по $x, t$ при любых $(u,p)\in R^1\times R^n$; $a_j(x,t,0,0)\equiv 0$ при $(x,t)\in R^n\times R^1$, $j=0,1,\ldots,n$;

$A_2$) существуют положительные постоянные $\nu, \mu$ такие, что при всех значениях $x,t,u,p$ выполнены неравенства

$$\sum_{j=1}^{n}[a_j(x,t,u,p)-a_j(x,t,u,q)](p_j-q_j)\ \ge\ \nu\,|p-q|^2,$$

$$|a_j(x,t,u,p)-a_j(x,t,v,q)|\ \le\ \mu(|u-v|+|p-q|),\quad j=1,\ldots,n, \tag{4}$$

$$|a_0(x,t,u,p)|\ \le\ \mu(|u|+|p|)+\varphi(x,t),$$

где $\varphi(x,t)\in L_2(Q_T)$.

При сформулированных предположениях уравнению (1) удовлетворяет функция, тождественно равная нулю. Это не сужает общности рассмотрения, так как можно обеспечить данное условие, переходя к новой неизвестной функции путем вычитания какого-нибудь решения уравнения (1) в $Q_T$. По этой же причине в дальнейшем сможем заменить условие (3) следующим:

$$u(x,0)\ =\ 0\quad \text{при}\quad x\in\Omega^{(s)}. \tag{5}$$

Будем предполагать, что выполнено условие:

F) функция $f(x,t)$ определена при $x\in\overline{\Omega}$, $t\in R^1$, равна нулю при $t<0$, принадлежит в цилиндре $Q=\Omega\times R^1$ пространству $W_2^{1,1/2}(Q)$ и удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{vrai\,max}\{|f(x,t)|:\ (x,t)\in Q\}\ +\ \|f(x,t)\|_{W_2^{1,1/2}(Q)}\ \le\ N \tag{6}$$

с некоторой постоянной $N$.

Используемые далее обозначения пространств $V_2(Q_T)$, $\overset{\circ}{V}_2(Q_T)$, $W_2^{1,1/2}(Q_T)$, $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1/2}(Q_T)$ и другие понимаются так же, как и в [1].

При условиях $A_1$, $A_2$, F и любом $T<\infty$ будем рассматривать разрешимость задачи (1), (2) (5) в пространстве $V_2(Q_T^{(s)})$, норма в котором задается равенством

$$\| u \|^2_{V_2(Q_T^{(s)})} = \operatorname*{vrai\,max}_{0 \le t \le T} \int\limits_{\Omega^{(s)}} u^2(x, t)\, dx + \iint\limits_{Q_T^{(s)}} \left| \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right|^2 dx\, dt.$$

Под решением задачи (1), (2), (5) понимаем такую функцию $u_s(x, t) \in V_2(Q_T^{(s)})$, что $u_s(x, t) - f(x, t) \in \overset{\circ}{V}_2(Q_T^{(s)})$ и при любых

$$\varphi(x, t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T^{(s)}), \quad t \in [0, T],$$

справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega^{(s)}} u(x, t)\, \varphi(x, t)\, dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega^{(s)}} \left\{ -u(x, \tau) \frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial \tau} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^n a_j\left(x, \tau, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial x_j} - a_0\left(x, \tau, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \varphi(x, \tau) \right\} dx\, d\tau = 0. \qquad (7)$$

**Теорема 1.** *Предположим, что выполнены условия* $A_1$, $A_2$, F *и* $T$ — *произвольное положительное число. Тогда при каждом* $s = 1, 2, \ldots$ *задача* (1), (2), (5) *имеет решение* $u_s(x, t)$ *в* $V_2(Q_T^{(s)})$. *Функция* $u_s(x, t)$ *принадлежит пространству* $W_2^{1,1/2}(Q_T^{(s)})$ *и существует постоянная* $M$, *зависящая лишь от* $n, \nu, \mu, N$, $\|\varphi\|_{L_2(Q_T)}$, $T$, $\operatorname{mes}\Omega$, *такая, что при всех* $s$ *выполнены оценки*

$$\operatorname{vrai\,max} \{ | u_s(x, t) | : (x, t) \in Q_T^{(s)} \} \le M, \qquad (8)$$

$$\| u_s(x, t) \|_{V_2(Q_T^{(s)})} \le M, \qquad \| u_s(x, t) \|_{W_2^{1,1/2}(Q_T^{(s)})} \le M. \qquad (9)$$

Разрешимость задачи (1), (2), (5) в пространстве $V_2(Q_T^{(s)})$ можно доказать методом Галеркина. При этом устанавливается и первое неравенство в (9). Неравенство (8) легко получается методом Мозера. Второе неравенство в (9) можно получить, следуя [1] (гл. 3, §4).

Продолжим функции $u_s(x, t)$ на $Q$, полагая их равными $f(x, t)$ при $(x, t) \in Q_T \setminus Q_T^{(s)}$ и нулю вне $Q_T$. Так полученная последовательность будет ограниченной в $W_2^{1,1/2}(Q_T)$ в силу (9). Следовательно, из $\{u_s(x, t)\}$ можно выделить слабо сходящуюся в $W_2^{1,1/2}(Q_T)$ подпоследовательность к некоторой предельной функции $u_0(x, t)$. Можем считать в дальнейшем, что к $u_0(x, t)$ слабо сходится вся последовательность $\{u_s(x, t)\}$.

Наряду с (7) в дальнейшем будут использоваться еще другие интегральные тождества. Определим для любой функции $\varphi(x, t)$ усреднение по $t$

$$[\varphi(x, t)]_{(h)} = \frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} \varphi(x, \tau)\, d\tau.$$

Если $u_s(x, t)$ — решение задачи (1), (2), (5), то произвольной функции $\psi(x, t) \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_{t_1})$ при $h > 0$, $0 < t_1 < T - h$ справедливо тождество

$$\int\limits_0^{t_1} \int\limits_{\Omega^{(s)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [u_s(x, t)]_{(h)}\, \psi(x, t) + \sum_{j=1}^n \left[ a_j\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \right]_{(h)} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x_j} - \right.$$

$$- \left[ a_0\left( x,\ t,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_{(h)} \psi(x,\ t) \Bigg\}\, dx\, dt \ = \ 0. \tag{10}$$

Обозначим через $[Fg](x, \alpha)$ преобразование Фурье по переменной $t$ функции $g(x, t)$, определенной и интегрируемой в $\overline{Q}$.

**Лемма 1.** *Пусть выполнены условия* $A_1$, $A_2$, $F$. *Тогда для произвольной функции* $\psi(x, t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1/2}(Q_T^{(s)}) \cap W_2^{1,1/2}(Q^{(s)})$ *и произвольной непрерывно дифференцируемой на* $R^1$ *функции* $\eta(t)$ *с носителем в интервале* $(-T, T)$ *справедливо интегральное тождество*

$$\sqrt{-1} \int\limits_{R^1} \int\limits_{\Omega^{(s)}} \alpha\, [F(u_s\eta)](x, \alpha)\, \overline{[F\psi](x,\ \alpha)}\, dx\, d\alpha \ + \iint\limits_{Q_T^{(s)}} \Bigg\{ u_s(x,\ t)\, \psi(x,\ t) \frac{d\eta(t)}{dt} \ -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} a_j\left( x,\ t,\ u_s,\ \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) \eta(t)\, \frac{\partial \psi(x,\ t)}{\partial x_j} \ + \ a_0\left( x,\ t,\ u_s,\ \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) \eta(t)\, \psi(x,\ t) \Bigg\}\, dx\, dt \ = \ 0 \tag{11}$$

*и* $\eta(t)\, u_s(x,\ t) \in W_2^{1,1/2}(Q_T^{(s)})$. *Черта над* $[F\psi](x, \alpha)$ *в* (11) *обозначает комплексное сопряжение.*

Принадлежность $\eta(t)\, \tilde{u}_s(x, t)$ пространству $W_2^{1,1/2}(Q^{(s)})$ следует из того, что в рассматриваемых условиях функция $u_s(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию (2) в цилиндре $\Omega^{(s)} \times [-T, T]$. Для получения (11) вначале для достаточно малого $h > 0$ установим тождество

$$\int\limits_{R^1} \int\limits_{\Omega^{(s)}} \frac{\partial}{\partial t} [u_s(x,\ t)\, \eta(t)]_{(h)}\, \psi(x, t)\, dx\, dt \ +$$

$$+ \ \iint\limits_{Q_T^{(s)}} \Bigg\{ -u_s(x,\ t)\, \frac{d\eta(t)}{dt}\, [\psi(x,\ t)]_{(-h)} \ +$$

$$+ \ \sum_{j=1}^{n} \left[ a_j\left( x,\ t,\ u_s,\ \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) \eta(t) \right]_{(h)} \frac{\partial \psi(x,\ t)}{\partial x_j} \ -$$

$$- \left[ a_0\left( x,\ t,\ u_s,\ \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) \eta(t) \right]_{(h)} \psi(x, t) \Bigg\}\, dx\, dt \ = \ 0,$$

затем применим в первом интеграле равенство Парсеваля и совершим предельный переход при $h \to 0$.

**2. Построение асимптотического разложения.** Сформулируем предположения относительно множеств $F_i^{(s)}$. Обозначим через $d_i^{(s)}$ нижнюю грань радиусов шаров, содержащих $F_i^{(s)}$, и определим точку $x_i^{(s)}$ условием $F_i^{(s)} \subset \subset \overline{B(x_i^{(s)},\ d_i^{(s)})}$. Здесь и далее $B(x_0, \rho)$ — шар радиуса $\rho$ с центром в $x_0$. Через $r_i^{(s)}$ обозначим расстояние от $B(x_i^{(s)},\ d_i^{(s)})$ до множества $\bigcup_{j \neq i} B(x_j^{(s)},\ d_j^{(s)}) \cup \partial\Omega$.

Будем предполагать выполнение условий:

$B_1$) справедливо равенство $\lim\limits_{s\to\infty} r^{(s)} = 0$, где $r^{(s)} = \max\{r_i^{(s)}:\ i = 1, \ldots, I(s)\}$;

$B_2$) существует положительная постоянная $c_0$ такая, что при $i = 1, \ldots,$

$I(s)$, $s = 1, 2, \ldots$, выполнены неравенства

$$d_i^{(s)} \le c_0 r_i^{(s)}, \qquad \sum_{i=1}^{I(s)} [d_i^{(s)}]^{2(n-2)} [r_i^{(s)}]^{-n} \le c_0 .$$

Из определения чисел $r_i^{(s)}$ и из условия $B_2$ также непосредственно следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{I(s)} [d_i^{(s)}]^{n-2} \le \left\{ \sum_{i=1}^{I(s)} [d_i^{(s)}]^{2(n-2)} [r_i^{(s)}]^{-n} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^{I(s)} [r_i^{(s)}]^{n} \right\}^{1/2} \le \{2^n c_0 \operatorname{mes} \Omega\}^{1/2}. \tag{12}$$

При построении асимптотического разложения основную роль играет функция $v_i^{(s)}(x, t, q)$, определяемая при $d_i^{(s)} \le 1/2$ и произвольном вещественном числе $q$ как решение следующей задачи:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j \left( x, t, 0, \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0, \qquad (x, t) \in G_i^{(s)} \times [-T, T], \tag{13}$$

$$v(x, t) = q\omega(|x - x_i^{(s)}|)\, \omega(-t/T), \qquad (x, t) \in \partial G_i^{(s)} \times [-T, T], \tag{14}$$

$$v(x, -T) = 0, \qquad x \in G_i^{(s)}. \tag{15}$$

Здесь $G_i^{(s)} = B(x_i^{(s)}, 1) \setminus F_i^{(s)}$ и в дальнейшем $\omega(r)$ — определенная на $R^1$ бесконечно дифференцируемая функция, равная единице при $r \le 1/2$, нулю при $r \ge 1$ и такая, что $0 \le \omega(r) \le 1$. Продолжим функцию $v_i^{(s)}(x, t, q)$ на $R^n \times R^1$, полагая ее равной нулю вне $B(x_i^{(s)}, 1) \times [-T, T]$ и $q\omega(-t/T)$ при $(x, t) \in F_i^{(s)} \times [-T, T]$. Можно показать, что для непрерывно дифференцируемой функции $\xi(t)$ с носителем в интервале $(-T, T)$ справедливо включение $\xi(t) v_i^{(s)}(x, t, q) \in W_2^{1, 1/2}(R^n \times R^1)$.

Будем строить и изучать поведение асимптотического разложения при $0 \le t \le T' = T - 1/2$, но это не ограничивает общности результата, так как $T$ — произвольное число.

Обозначим $\lambda_s = [\ln(1/r^{(s)})]^{-1}$, $s = 1, 2, \ldots$, и определим при $s = 1, 2, \ldots$, $i = 1, \ldots, I(s)$ числовую последовательность $\rho_i^{(s)}$ условиями:

$$\rho_i^{(s)} = d_i^{(s)}, \quad \text{если} \quad i \in I'(s) = \{ i = 1, \ldots, I(s) \colon d_i^{(s)} \ge [r_i^{(s)}]^{n/(n-2)} \lambda_s^{-1} \},$$

$$\rho_i^{(s)} = [r_i^{(s)}]^{n/(n-2)} \lambda_s^{-2}, \quad \text{если} \quad i \in I''(s) = \{ i = 1, \ldots, I(s) \colon$$
$$d_i^{(s)} < [r_i^{(s)}]^{n/(n-2)} \lambda_s^{-1} \}. \tag{16}$$

Можем считать в дальнейшем $s$ настолько большим, чтобы $\rho_i^{(s)} \le r_i^{(s)}/4$ при $i \in I''(s)$, $d_i^{(s)} \le 1/2$, $\lambda_s < 1/16$.

Для заданной пары значений $i, s$ таких, что $i \in I''(s)$, $s = 1, 2, \ldots$, разделим отрезок $[0, T']$ на $K(i, s)$ отрезков равной длины точками $t_{i,0}^{(s)} = 0$, $t_{i,1}^{(s)}, \ldots$, $t_{i,K(i,s)}^{(s)} = T'$ так, чтобы $[\rho_i^{(s)}]^2 K(i, s)/2 \le T' \le [\rho_i^{(s)}]^2 K(i, s)$. Определим при $t \in R^1$ бесконечно дифференцируемые функции $g_{i,k}^{(s)}(t)$, $k = 1, \ldots, K(i, s)$,

$\overline{g}_{i,l}^{(s)}(t)$, $l = 0, 1, \ldots, K(i, s)$, удовлетворяющие условиям:

1) носители функций $g_{i,k}^{(s)}(t)$, $\overline{g}_{i,l}^{(s)}(t)$ содержатся соответственно в интервалах $(t_{i,k-1}^{(s)} + \lambda_s[\rho_i^{(s)}]^2,\ t_{i,k}^{(s)} - \lambda_s[\rho_i^{(s)}]^2)$, $(t_{i,l}^{(s)} - 2\lambda_s[\rho_i^{(s)}]^2,\ t_{i,l}^{(s)} + 2\lambda_s[\rho_i^{(s)}]^2)$; значения указанных функций принадлежат отрезку $[0, 1]$;

2) при $t \in [0, T']$ выполняется тождество

$$\sum_{k=1}^{K(i,s)} g_{i,k}^{(s)}(t) + \sum_{l=0}^{K(i,s)} \overline{g}_{i,l}^{(s)}(t) \equiv 1; \tag{17}$$

3) при всех значениях $i \in I''(s)$, $s = 1, 2, \ldots$, $t \in R^1$, справедливы неравенства

$$\left| \frac{dg_{i,k}^{(s)}(t)}{dt} \right| \le 2\lambda_s^{-1}[\rho_i^{(s)}]^{-2}, \qquad \left| \frac{d\overline{g}_{i,l}^{(s)}(t)}{dt} \right| \le 2\lambda_s^{-1}[\rho_i^{(s)}]^{-2}.$$

Для пары значений $i, s$ таких, что $i \in I'(s)$, $s = 1, 2, \ldots$, разделим отрезок $[0, T']$ на $R(i, s)$ отрезков равной длины точками $\tilde{t}_{i,r}^{(s)}$, $r = 0, 1, \ldots, R(i, s)$, $\tilde{t}_{i,0}^{(s)} = 0$, $\tilde{t}_{i,R(i,s)}^{(s)} = T'$ так, чтобы $[d_i^{(s)}]^2 R(i, s)/2 \le T' \le [d_i^{(s)}]^2 R(i, s)$. Определим при $t \in R^1$ бесконечно дифференцируемые функции $\tilde{g}_{i,r}^{(s)}(t)$, $r = 0, 1, \ldots, R(i, s)$, удовлетворяющие условиям:

1) носитель функции $\tilde{g}_{i,r}^{(s)}(t)$ содержится в интервале $(\tilde{t}_{i,r}^{(s)} - [d_i^{(s)}]^2,\ \tilde{t}_{i,r}^{(s)} + [d_i^{(s)}]^2)$; значения этой функции принадлежат отрезку $[0, 1]$;

2) при $t \in [0, T']$ выполняется тождество

$$\sum_{r=0}^{R(i,s)} \tilde{g}_{i,r}^{(s)}(t) \equiv 1; \tag{18}$$

3) при всех значениях $i \in I'(s)$, $s = 1, 2, \ldots$, $t \in R^1$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{d\tilde{g}_{i,r}^{(s)}(t)}{dt} \right| \le 2[d_i^{(s)}]^2.$$

Определим срезывающие функции $\varphi_i^{(s)}(x)$, $i = 1, \ldots, I(s)$, $\psi_i^{(s)}(x)$, $i \in I''(s)$, $s = 1, 2, \ldots$, равенствами

$$\varphi_i^{(s)}(x) = \omega\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{2\rho_i^{(s)}}\right), \qquad \psi_i^{(s)}(x) = \omega\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{2\sqrt{\lambda_s}\rho_i^{(s)}}\right),$$

где $\omega(r)$ — та же функция, что и в (14).

Обозначим через $Q_{i,k}^{(s)}$, $\overline{Q}_{i,l}^{(s)}$, $\tilde{Q}_{i,r}^{(s)}$ соответственно цилиндры

$$B(x_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)}) \times [t_{i,k-1}^{(s)}, t_{i,k}^{(s)}],$$

$$B(x_i^{(s)}, 2\sqrt{\lambda_s}\rho_i^{(s)}) \times [t_{i,l}^{(s)} - 2\lambda_s(\rho_i^{(s)})^2,\ t_{i,l}^{(s)} + 2\lambda_s(\rho_i^{(s)})^2],$$

$$B(x_i^{(s)}, 2d_i^{(s)}) \times [t_{i,r}^{(s)} - 2(d_i^{(s)})^2,\ t_{i,r}^{(s)} + 2(d_i^{(s)})^2].$$

Пусть для произвольного цилиндра $Q'$ и интегрируемой функции $g(x,t)$

$$M[g,Q'] = \frac{1}{\operatorname{mes} Q'} \iint\limits_{Q'} g(x,t)\,dx\,dt$$

— среднее значение $g(x,t)$ по $Q'$.

Определим

$$u_{i,k}^{(s)} = M[u_0, Q_{i,k}^{(s)}], \qquad \overline{u}_{i,l}^{(s)} = M[u_0, \overline{Q}_{i,l}^{(s)}], \qquad \tilde{u}_{i,r}^{(s)} = M[u_0, \tilde{Q}_{i,r}^{(s)}],$$

$$f_{i,k}^{(s)} = M[f, Q_{i,k}^{(s)}], \qquad \bar{f}_{i,l}^{(s)} = M[f, \overline{Q}_{i,l}^{(s)}], \qquad \tilde{f}_{i,r}^{(s)} = M[f, \tilde{Q}_{i,r}^{(s)}],$$

где $u_0(x,t)$ — слабый предел последовательности $u_s(x,t)$, $f(x,t)$ — функция из граничного условия (2).

Введенные обозначения позволяют определить следующее асимптотическое разложение:

$$u_s(x,t) = u_0(x,t) + r_s(x,t) + \sum_{j=1}^{5} r_s^{(j)}(x,t) + w_s(x,t), \tag{19}$$

где

$$r_s(x,t) = \sum_{i \in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} v_i^{(s)}(x,t,f_{i,k}^{(s)} - u_{i,k}^{(s)})\, g_{i,k}^{(s)}(t)\, \varphi_i^{(s)}(x),$$

$$r_s^{(1)}(x,t) = \sum_{i \in I'(s)} \sum_{r=0}^{R(i,s)} v_i^{(s)}(x,t,\tilde{f}_{i,r}^{(s)} - \tilde{u}_{i,r}^{(s)})\, \tilde{g}_{i,r}^{(s)}(t)\, \varphi_i^{(s)}(x),$$

$$r_s^{(2)}(x,t) = \sum_{i \in I''(s)} \sum_{l=0}^{K(i,s)} v_i^{(s)}(x,t,\bar{f}_{i,l}^{(s)} - \overline{u}_{i,l}^{(s)})\, \overline{g}_{i,l}^{(s)}(t)\, \psi_i^{(s)}(x),$$

$$r_s^{(3)}(x,t) = \sum_{i \in I'(s)} \sum_{r=0}^{R(i,s)} \left\{[\tilde{u}_{i,r}^{(s)} - u_0(x,t)] + [f(x,t) - \tilde{f}_{i,r}^{(s)}]\right\} \tilde{g}_{i,r}^{(s)}(t)\, \varphi_i^{(s)}(x),$$

$$r_s^{(4)}(x,t) = \sum_{i \in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} \left\{[u_{i,k}^{(s)} - u_0(x,t)] + [f(x,t) - f_{i,k}^{(s)}]\right\} g_{i,k}^{(s)}(t)\, \varphi_i^{(s)}(x),$$

$$r_s^{(5)}(x,t) = \sum_{i \in I''(s)} \sum_{l=0}^{K(i,s)} \left\{[\overline{u}_{i,l}^{(s)} - u_0(x,t)] + [f(x,t) - \bar{f}_{i,l}^{(s)}]\right\} \overline{g}_{i,l}^{(s)}(t)\, \psi_i^{(s)}(x),$$

$w_s(x,t)$ — остаточный член разложения (19), и эта функция определяется равенством (19) при $x \in \Omega$, $t \in R^1$.

Дальше будет изучено поведение всех членов разложения (19) на базе поточечных и интегральных оценок вспомогательных функций $v_i^{(s)}(x,t,q)$. Этим оценкам посвящен следующий пункт. В последнем пункте будет доказана основная в настоящей работе теорема.

**Теорема 2.** *Предположим, что выполнены условия* $A_1$, $A_2$, F *и* $u_s(x,t)$ — *слабо сходящаяся к* $u_0(x,t)$ *в* $W_2^{1,1/2}(Q)$ *последовательность решений задачи* (1), (2), (5). *Тогда выполняется равенство*

$$\lim_{s\to\infty} \| w_s(x,t)\,\eta(t) \|_{W_2^{1,1/2}(Q)} = 0, \tag{20}$$

*где* $w_s(x,t)$ — *определенный в* (19) *остаточный член асимптотического раз-*

*ложения,* $\eta(t)$ *— произвольная непрерывно дифференцируемая на* $R^1$ *функция с носителем в интервале* $(-T,\ T-1/2)$.

Как уже отмечалось, сужение интервала по $t$ не ограничивает общности результата.

**3. Оценки решений модельных задач.** При изучении сходимости последовательности решений $u_s(x,t)$ и доказательстве теоремы 2 основную роль играют поточечные и интегральные оценки функции $v_i^{(s)}(x,t,q)$, определенной выше, как решение задачи (13) – (15).

**Теорема 3.** *Пусть выполнены условия* $A_1$, $A_2$. *Тогда существует постоянная* $K_1$, *зависящая только от* $n, \nu, \mu, T$, *такая, что при* $(x,t)\in Q_{i,T}^{(s)} = G_i^{(s)}\times[-T,T]$ *справедлива оценка*

$$|v_i^{(s)}(x,t,q)| \le |q| \min\left\{K_1\left(\frac{d_i^{(s)}}{|x-x_i^{(s)}|}\right)^{n-2},\ 1\right\}. \tag{21}$$

***Доказательство.*** Обозначим через $\bar{v}_i^{(s)}(x,t,q)$ решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dx_j}a_j\left(x,\ t,\ 0,\ \frac{\partial v}{\partial x}\right), \qquad (x,t)\in G_i^{(s)}\times[-T,T], \tag{22}$$

$$v(x,t) = q\omega\left(\frac{|x-x_i^{(s)}|}{2d_i^{(s)}}\right), \qquad (x,t)\in \partial G_i^{(s)}\times[-T,T], \tag{23}$$

$$v(x,-T) = q\omega\left(\frac{|x-x_i^{(s)}|}{2d_i^{(s)}}\right), \qquad x\in G_i^{(s)}. \tag{24}$$

Из работы [6] для решения такой задачи следует оценка

$$|\bar{v}_i^{(s)}(x,t,q)| \le q\min\left\{c\left(\frac{d_i^{(s)}}{|x-x_i^{(s)}|}\right)^{n-2},\ 1\right\}, \qquad (x,t)\in Q_i^{(s)} \tag{25}$$

с постоянной $c$, зависящей лишь от $n, \nu, \mu, T$.

Покажем, что выполняется неравенство

$$\bar{v}_i^{(s)}(x,t,-|q|) \le v_i^{(s)}(x,t,q) \le \bar{v}_i^{(s)}(x,t,|q|), \tag{26}$$

обеспечивающее вместе с (25) оценку (21). Проверим, например, второе неравенство в (26). Пусть

$$\psi(x,t) = \max\{[v_i^{(s)}(x,t,q)]_{(h)} - [\bar{v}_i^{(s)}(x,t,|q|)]_{(h)},\ 0\}.$$

Подставим $\psi(x,t)$ в интегральные тождества вида (10), соответствующие задачам (13) – (15), (22) – (24). Вычитая так полученные равенства одно из другого, интегрируя по частям в слагаемом, содержащем производную по $t$, и устремляя $h$ к нулю, имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{E_i^{(s)}(t_1)} |v_i^{(s)}(x,t_1,q) - \bar{v}_i^{(s)}(x,t_1,|q|)|^2\,dx + \int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E_i^{(s)}(t)}\sum_{j=1}^{n}\left[a_j\left(x,\ t,\ 0,\ \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right) - \right.$$

$$\left. - a_j\left(x,\ t,\ 0,\ \frac{\partial \bar{v}_i^{(s)}}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x_j}[v_i^{(s)}(x,t,q) - \bar{v}_i^{(s)}(x,t,|q|)]\,dx\,dt = 0.$$

Здесь $E_i^{(s)}(t) = \{x\in G_i^{(s)}:\ v_i^{(s)}(x,t,q) > \bar{v}_i^{(s)}(x,t,|q|)\}$. Используя первое из неравенств (4), получаем $\operatorname{mes} E_i^{(s)}(t) = 0$ при каждом $t \in [-T, T]$. И тем самым доказано второе неравенство в (26), а следовательно, и теорема 3.

**Теорема 4.** *Предположим, что выполнены условия* $A_1$, $A_2$. *Пусть* $h$ *и* $\rho$ *— произвольные положительные числа, удовлетворяющие неравенствам*

$$2d_i^{(s)} \le \rho \le 1, \qquad d_i^{(s)}\rho \le 2h \le 1, \tag{27}$$

*и* $\zeta(t)$ *— непрерывно дифференцируемая функция такая, что* $\zeta(t) \equiv 0$ *при* $t \notin [t_0 - h,\ t_0 + h]$, $t_0 \in [0, T']$,

$$|\partial\zeta(t)/\partial t| \le L/h. \tag{28}$$

*Тогда с некоторой зависящей лишь от* $n, \nu, \mu, T, L$ *постоянной* $K_2$ *справедлива оценка*

$$\left\| v_i^{(s)}(x,\ t,\ q)\,\omega\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{\rho}\right)\zeta(t)\right\|^2_{W_2^{1,1/2}(Q)} \le K_2\,|q|^2 h\,[d_i^{(s)}]^{n-2}, \tag{29}$$

*где* $\omega(r)$ *— функция, выбранная при постановке задачи* (13) – (15).

***Доказательство.*** Подставим в интегральное тождество вида (10), соответствующее задаче (13) – (15), пробную функцию

$$\psi(x, t) = [v_i^{(s)}(x, t, q)]_{(h)}\,\zeta^2(t)\,\omega^2\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{\rho}\right) - q\,\zeta^2(t)\,\omega^2\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{2d_i^{(s)}}\right).$$

Преобразуя слагаемое, содержащее производную по $t$, и переходя к пределу при $h \to 0$, имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{G_i^{(s)}} \left\{\frac{1}{2}\left| v_i^{(s)}(x,\ t_1,\ q)\right|^2 \omega^2\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{\rho}\right) - \right.\\
&\left. - q\,v_i^{(s)}(x,\ t_1,\ q)\,\omega^2\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{2d_i^{(s)}}\right)\right\}\zeta^2(t_1)\,dx\ + \\
&+ \int\limits_{-T}^{t_1}\int\limits_{G_i^{(s)}} \left\{-\frac{1}{2}\left| v_i^{(s)}(x,\ t,\ q)\right|^2 \omega^2\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{\rho}\right) + \right.\\
&\left. + q\,v_i^{(s)}(x,\ t,\ q)\omega^2\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{2d_i^{(s)}}\right)\right\}\frac{d\zeta^2(t)}{dt}\,dx\,dt\ + \\
&+ \int\limits_{-T}^{t_1}\int\limits_{G_i^{(s)}} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x,\ t,\ 0,\ \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{v_i^{(s)}(x,\ t,\ q)\,\omega^2\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{\rho}\right) - \right.\\
&\left. - q\,\omega^2\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{2d_i^{(s)}}\right)\right\}\zeta^2(t)\,dx\,dt = 0,
\end{aligned} \tag{30}$$

где $t_1$ — произвольное число из интервала $[-T, T]$.

Отсюда на основании неравенств (4), (21) можно получить оценку

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t \in R^1} \int\limits_{G_i^{(s)}} \left| v_i^{(s)}(x,\ t,\ q)\,\omega\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{\rho}\right)\zeta(t)\right|^2 dx\ +$$

$$+\int_{R^1}\int_{G_i^{(s)}}\left|\frac{\partial}{\partial x}v_i^{(s)}(x,\ t,\ q)\right|^2\omega^2\left(\frac{|x-x_i^{(s)}|}{\rho}\right)\zeta^2(t)\,dx\,dt\le c_1|q|^2h\,[d_i^{(s)}]^{n-2}. \tag{31}$$

Здесь и далее постоянные $c_j$, $j=1,\ldots,9$, зависят только от $n,\nu,\mu,T,L$. При получении (31) некоторые слагаемые в (30) оцениваются следующим образом:

$$\left|\int_{-T}^{t_1}\int_{G_i^{(s)}}|v_i^{(s)}(x,\ t,\ q)|^2\omega^2\left(\frac{|x-x_i^{(s)}|}{\rho}\right)\frac{d\zeta^2(t)}{dt}\,dx\,dt\right|\le$$

$$\le L\int_{B(x_i^{(s)},\rho)}\left|v_i^{(s)}(x,\ t,\ q)\right|^2dx\le$$

$$\le c_2|q|^2\left\{[d_i^{(s)}]^n+\int_{d_i^{(s)}\le|x-x_i^{(s)}|\le\rho}\left(\frac{d_i^{(s)}}{|x-x_i^{(s)}|}\right)^{n-1}dx\right\}\le c_3|q|^2[d_i^{(s)}]^{n-1}\rho. \tag{32}$$

Далее воспользуемся условием на $h$:

$$\left|\int_{-T}^{t_1}\int_{G_i^{(s)}}a_j\left(x,\ t,\ 0,\ \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right)v_i^{(s)}\frac{\partial}{\partial x_j}\omega^2\left(\frac{|x-x_i^{(s)}|}{\rho}\right)\zeta^2(t)\,dx\,dt\right|\le$$

$$\le\varepsilon\int_{-T}^{t_1}\int_{G_i^{(s)}}\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2\omega^2\zeta^2\,dx\,dt+\frac{c_3}{\varepsilon\rho^2}\int_{-T}^{t_1}\int_{\rho/2\le|x-x_i^{(s)}|\le\rho}\left|v_i^{(s)}(x,\ t,\ q)\right|^2\zeta^2(t)\,dx\,dt\le$$

$$\le\varepsilon\int_{-T}^{T}\int_{G_i^{(s)}}\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2\omega^2\zeta^2\,dx\,dt+\frac{c_4}{\varepsilon}|q|^2\left(\frac{d_i^{(s)}}{\rho}\right)^{n-2}[d_i^{(s)}]^{n-2}, \tag{33}$$

где $\varepsilon$ — достаточно малое положительное число. Оценив аналогичным образом слагаемые, содержащие $\omega^2\left(\frac{|x-x_i^{(s)}|}{2d_i^{(s)}}\right)$, и использовав первое неравенство в (4), докажем (31).

После получения (31) еще необходимо установить неравенство

$$\int_{R^1}\int_{G_i^{(s)}}|\alpha|\,|F[v_i^{(s)}\omega\zeta]|^2\,dx\,d\alpha\le c_5|q|^2h\,[d_i^{(s)}]^{n-2}, \tag{34}$$

чтобы закончить доказательство теоремы 4. В (34) $F$, как и ранее, — преобразование Фурье по $t$. Для получения (34) подставим в интегральное тождество вида (11), соответствующее задаче (13)–(15), пробную функцию

$$\psi=\sqrt{-1}\,F^{-1}\left\{\frac{\alpha}{|\alpha|}F[v_i^{(s)}\zeta]\right\}\omega^2\left(\frac{|x-x_i^{(s)}|}{\rho}\right),$$

где $F^{-1}$ — обратное преобразование Фурье. При этом содержащаяся в (11) функция $\eta(t)$ выбирается равной $\zeta(t)$. В итоге получим

$$\int_{R^1}\int_{G_i^{(s)}}|\alpha|\,|F[v_i^{(s)}\omega\zeta]|^2\,dx\,d\alpha=$$

$$= -\sqrt{-1} \int\limits_{R^1} \int\limits_{G_i^{(s)}} \left\{ v_i^{(s)}(x,\ t,\ q)\, F^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{|\alpha|} F\,[v_i^{(s)}\zeta] \right\} \omega^2 \left( \frac{|x - x_i^{(s)}|}{\rho} \right) \frac{d\zeta(t)}{dt} - \right.$$

$$- \sum_{j=1}^{n} a_j \left( x,\ t,\ 0,\ \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right) \zeta(t)\, \omega^2 \left( \frac{|x - x_i^{(s)}|}{\rho} \right) F^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{|\alpha|} F\,[\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x_j} \zeta] \right\} -$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{n} a_j \left( x,\ t,\ 0,\ \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right) \zeta(t) \frac{\partial}{\partial x_j}\, \omega^2 \left( \frac{|x - x_i^{(s)}|}{\rho} \right) F^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{|\alpha|} F\,[v_i^{(s)}\zeta] \right\} \right\} dx\, dt. \tag{35}$$

Оценим одно из слагаемых в правой части (35):

$$\left| \int\limits_{R^1} \int\limits_{G_i^{(s)}} v_i^{(s)}(x,\ t,\ q)\, F^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{|\alpha|} F\,[v_i^{(s)}\zeta] \right\} \omega^2 \left( \frac{|x - x_i^{(s)}|}{\rho} \right) \frac{d\zeta(t)}{dt}\, dx\, dt \right| \le$$

$$\le \int\limits_{G_i^{(s)}} \left\{ \int\limits_{R^1} \left| F^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{|\alpha|} F\,[v_i^{(s)}\zeta] \right\} \right|^2 dt \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{R^1} \left| v_i^{(s)}(x,\ t,\ q) \frac{d\zeta(t)}{dt} \right|^2 dt \right\}^{1/2} \omega^2 \left( \frac{|x - x_i^{(s)}|}{\rho} \right) dx \le$$

$$\le c_6 \int\limits_{G_i^{(s)}} \left\{ \int\limits_{R^1} \left| v_i^{(s)}(x,\ t,\ q) \zeta(t) \right|^2 dt \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{R^1} \left| v_i^{(s)}(x, t, q) \frac{d\zeta(t)}{dt} \right|^2 dt \right\}^{1/2} \omega^2 \left( \frac{|x - x_i^{(s)}|}{\rho} \right) dx \le$$

$$\le c_6 \left\{ \int\limits_{R^1} \int\limits_{G_i^{(s)}} \left| v_i^{(s)}(x,\ t,\ q) \zeta(t)\, \omega \left( \frac{|x - x_i^{(s)}|}{\rho} \right) \right|^2 dx\, dt \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{R^1} \int\limits_{G_i^{(s)}} \left| v_i^{(s)}(x,\ t,\ q) \frac{d\zeta(t)}{dt}\, \omega \right|^2 dx\, dt \right\}^{1/2}. \tag{36}$$

Далее применим оценку (31). При этом при получении второго неравенства в (36) воспользовались ограниченностью оператора Гильберта в $L_2(R^1)$.

Аналогичным образом с использованием (31) оцениваются остальные слагаемые правой части (35), что приводит в итоге к доказательству неравенства (34) а следовательно, и теоремы 4.

Определим функцию $\omega_1(r)$ при $r \in R^1$ равенством

$$\omega_1(r) = \omega(r/2)\,[1 - \omega(4r)], \tag{37}$$

где $\omega(r)$ — функция, выбранная при постановке задачи (13) – (15).

**Теорема 5.** *Предположим, что выполнены условия* $A_1$, $A_2$. *Пусть* $h$, $\rho$ — *произвольные положительные числа такие, что*

$$4d_i^{(s)} \le \rho, \qquad 8\rho^2 \le h \le 1/2. \tag{38}$$

*Тогда с некоторой зависящей лишь от* $n, \nu, \mu, T, L$ *постоянной* $K_3$ *выполнена* *оценка*

$$\left\| v_i^{(s)}(x,\ t,\ q)\ \omega_1\left(\frac{|x-x_i^{(s)}|}{\rho}\right)\zeta(t)\right\|^2_{W_2^{1,1/2}(Q)} \le K_3\,|q|^2 h\left(\frac{d_i^{(s)}}{\rho}\right)^{n-2}[d_i^{(s)}]^{n-2}, \tag{39}$$

*где* $\zeta(t)$ *— произвольная функция, удовлетворяющая условиям теоремы* 4.

***Доказательство.*** Подставим в интегральное тождество вида (10), соответствующее задаче (13) – (15), пробную функцию

$$\psi(x,t) = [v_i^{(s)}(x,t,q)]_{(h)}\,\zeta^2(t)\,\omega_1^2\left(\frac{|x-x_i^{(s)}|}{\rho}\right).$$

Как и при доказательстве предыдущей теоремы, получаем равенство вида (30), только со следующими изменениями: $\omega\left(\frac{|x-x_i^{(s)}|}{\rho}\right)$ заменено на $\omega_1\left(\frac{|x-x_i^{(s)}|}{\rho}\right)$, нет слагаемых, содержащих $\omega\left(\frac{|x-x_i^{(s)}|}{2d_i^{(s)}}\right)$. В так полученном равенстве оцениваем слагаемые аналогично тому, как это делалось при доказательстве неравенства (31). Так, в оценке (33) только изменяется $\omega$ на $\omega_1$. Вместо неравенства (32) имеем

$$\left|\int_T^{t_1}\int_{G_i^{(s)}}\left|v_i^{(s)}(x,\ t,\ q)\right|^2\omega_1^2\left(\frac{|x-x_i^{(s)}|}{\rho}\right)\frac{d\zeta^2(t)}{dt}\,dx\,dt\right| \le$$

$$\le L\int_{\rho/4\le|x-x_i^{(s)}|\le 2\rho}\left|v_i^{(s)}(x,\ t,\ q)\right|^2 dx \le$$

$$\le c_7\,|q|^2\rho^n\left[\frac{d_i^{(s)}}{\rho}\right]^{2(n-2)} \le c_7\,|q|^2\left(\frac{d_i^{(s)}}{\rho}\right)^{n-2}[d_i^{(s)}]^{n-2}\,h.$$

В итоге получаем оценку

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t\in R^1}\int_{G_i^{(s)}}\left|v_i^{(s)}(x,\ t,\ q)\,\omega_1\left(\frac{|x-x_i^{(s)}|}{\rho}\right)\zeta(t)\right|^2 dt\ +$$

$$+\int_{R^1}\int_{G_i^{(s)}}\left|\frac{\partial}{\partial x}v_i^{(s)}(x,\ t,\ q)\right|^2\omega_1^2\left(\frac{|x-x_i^{(s)}|}{\rho}\right)\zeta^2(t)\,dx\,dt \le$$

$$\le c_8\,h\,|q|^2\left(\frac{d_i^{(s)}}{\rho}\right)^{n-2}[d_i^{(s)}]^{n-2}. \tag{40}$$

Повторяя рассуждения, связанные с доказательством неравенства (34) (только с заменой функции $\omega$ на $\omega_1$), и используя (40), имеем

$$\int_{R^1}\int_{G_i^{(s)}}|\alpha|\,|F[v_i^{(s)}\omega_1\zeta]|^2\,dx\,d\alpha \le c_9\,|q|^2 h\left(\frac{d_i^{(s)}}{\rho}\right)^{n-2}[d_i^{(s)}]^{n-2},$$

что с учетом (40) завершает доказательство теоремы 5.

**4. Сходимость $r_s(x,t)$, $r_s^{(j)}(x,t)$.** Получим предварительные утверждения о поведении при $s\to\infty$ некоторых членов асимптотического разложения (19), которые позволят затем доказать теорему 2 и сделать заключение о характере сходимости последовательности $u_s(x, t)$. Напомним, что из способа построения разложения следовали неравенства

$$K(i, s)[\rho_i^{(s)}]^2 \le 2T', \qquad R(i, s)[d_i^{(s)}]^2 \le 2T'. \tag{41}$$

**Лемма 2.** *При выполнении условий* $B_1$, $B_2$ *справедливы равенства*

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i\in I'(s)} [d_i^{(s)}]^{n-2} = 0, \qquad \lim_{s\to\infty} \sum_{i\in I''(s)} [\rho_i^{(s)}]^{n} = 0. \tag{42}$$

***Доказательство.*** Используя определение множества $I'(s)$ и условие $B_2$, имеем

$$\sum_{i\in I'(s)} [d_i^{(s)}]^{n-2} \le \sum_{i\in I'(s)} [d_i^{(s)}]^{2(n-2)}[r_i^{(s)}]^{-n}\lambda_s^{n-2} \le c_0\lambda_s^{n-2},$$

что и доказывает первое равенство в (42).

Из (16) следует

$$\sum_{i\in I''(s)} [\rho_i^{(s)}]^n \le [r^{(s)}]^{2n/(n-2)}\left[\ln\frac{1}{r^{(s)}}\right]^{2n} \sum_{i\in I''(s)} [r_i^{(s)}]^n.$$

Последняя сумма не превышает $2^n \operatorname{mes}\Omega$. В силу определения $r_i^{(s)}$, используя условие $B_1$, получаем второе равенство в (42).

**Лемма 3.** *Пусть выполнены условия* $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ *и* F. *Тогда последовательности* $r_s^{(1)}(x, t)$, $r_s^{(2)}(x, t)$ *при* $s\to\infty$ *сильно сходятся к нулю в пространствах* $V_2(Q_T)$ *и* $W_2^{1,1/2}(Q)$.

***Доказательство.*** Используя оценку (31), при $t\in R^1$ имеем

$$\int_\Omega |r_s^{(1)}(x, t)|^2 dx \le 4\sum_{i\in I'(s)}\sum_{r=0}^{R(i,s)}\int_\Omega |v_i^{(s)}(x, t, \tilde f_{i,r}^{(s)} - \tilde u_{i,r}^{(s)})\,\tilde g_{i,r}^{(s)}(t)\,\varphi_i^{(s)}(x)|^2 dx \le$$

$$\le c_{10}\sum_{i\in I'(s)} [d_i^{(s)}]^n, \tag{43}$$

и правая часть стремится к нулю в силу (42). Здесь и далее постоянные $c_i$, $i = 10, \ldots$, зависят лишь от $n, \nu, \mu, T, N, M, c_0$. При получении первого неравенства также использовано то, что при любом значении $t\in R^1$ не более четырех слагаемых, которые входят в сумму, определяющую $r_s^{(1)}(x, t)$, могут быть отличными от нуля.

Аналогично, используя оценку (31), получаем

$$\iint_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x} r_i^{(s)}(x, t)\right|^2 dx\,dt \le$$

$$\le c_{11}\sum_{i\in I'(s)}\sum_{r=0}^{R(i,s)}\left\{\iint_Q \left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}(x, t, \tilde f_{i,r}^{(s)} - \tilde u_{i,r}^{(s)})\right|^2 \left[\tilde g_{i,r}^{(s)}(t)\,\varphi_i^{(s)}(x)\right]^2 dx\,dt\, +\right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{d_i^{(s)}}\right]^2 \iint_Q \left| v_i^{(s)}(x, t, \tilde f_{i,r}^{(s)} - \tilde u_{i,r}^{(s)})\,\tilde g_{i,r}^{(s)}(t)\,\omega\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{4d_i^{(s)}}\right)\right|^2 dx\,dt\right\} \le$$

$$\le c_{12}\sum_{i\in I'(s)} R(i, s)[d_i^{(s)}]^n \le c_{13}\sum_{i\in I'(s)} [d_i^{(s)}]^{n-2}. \tag{44}$$

Тем самым из (43), (44) следует сильная сходимость к нулю $r_s^{(1)}(x, t)$ в $V_2(Q_T)$. Для доказательства сходимости в $W_2^{1,1/2}(Q)$ еще требуется проверить равенство

$$\lim_{s\to\infty} \int_{R^1}\int_{R^1}\int_{\Omega} \frac{|r_s^{(1)}(x, t) - r_s^{(1)}(x, \tau)|^2}{|t-\tau|^2}\, dx\, dt\, d\tau = 0. \tag{45}$$

Как и в предыдущих неравенствах, оценим

$$\int_{R^1}\int_{R^1}\int_{\Omega} \frac{|r_s^{(1)}(x, t) - r_s^{(1)}(x, \tau)|^2}{|t-\tau|^2}\, dx\, dt\, d\tau \le$$

$$\le c_{14} \sum_{i\in I'(s)} \sum_{r=0}^{R(i,s)} \int_{R^1}\int_{R^1}\int_{\Omega} \Big| v_i^{(s)}(x, t, \tilde f_{i,r}^{(s)} - \tilde u_{i,r}^{(s)})\, \tilde g_{i,r}^{(s)}(t) -$$

$$- v_i^{(s)}(x, \tau, \tilde f_{i,r}^{(s)} - \tilde u_{i,r}^{(s)})\, \tilde g_{i,r}^{(s)}(\tau) \Big| \frac{[\varphi_i^{(s)}(x)]^2}{|t-\tau|^2}\, dx\, dt\, d\tau \le$$

$$\le c_{15} \sum_{i\in I'(s)} \sum_{r=0}^{R(i,s)} \int_{R^1}\int_{\Omega} |\alpha|\, |F[v_i^{(s)} \tilde g_{i,r}^{(s)}]|^2 [\varphi_i^{(s)}(x)]\, dx\, d\alpha. \tag{46}$$

Последнее неравенство легко проверяется применением равенства Парсеваля. Продолжая далее неравенство (46), используя (34), получаем (45), что и завершает доказательство леммы 3 для $r_s^{(1)}(x, t)$. Доказательство для $r_s^{(2)}(x, t)$ проводится аналогично.

**Лемма 4.** *Предположим, что выполнены условия* $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ *и* F. *Тогда последовательность* $r_s(x, t)$ *ограничена в пространствах* $V_2(Q_T)$, $W_2^{1,1/2}(Q)$ *и при любом* $p \in (1, 2)$ *выполняется равенство*

$$\lim_{s\to\infty} \Bigg\{ \operatorname*{vrai\,max}_{t\in R^1} \int_{\Omega} |r_s(x, t)|^2\, dx + \iint_Q \left| \frac{\partial r_s(x, t)}{\partial x} \right|^p dx\, dt +$$

$$+ \operatorname*{vrai\,max}_{h>0} \iint_Q \left| \frac{r_s(x, t+h) - r_s(x, t)}{\sqrt{h}} \right|^p dx\, dt \Bigg\} = 0. \tag{47}$$

***Доказательство.*** Аналогично (43) имеем

$$\int_{\Omega} |r_s(x, t)|^2 dx \le c_{16} \sum_{i\in I''(s)} [\rho_i^{(s)}]^2 [d_i^{(s)}]^{n-2}, \tag{48}$$

и правая часть стремится к нулю в силу (42). Так же, подобно (44), (46), получаем оценки

$$\begin{gathered} \iint_Q \left| \frac{\partial r_s(x, t)}{\partial x} \right|^2 dx\, dt \le c_{17} \sum_{i\in I''(s)} [d_i^{(s)}]^{n-2}, \\ \int_{R^1}\int_{R^1}\int_{\Omega} \frac{|r_s(x, t) - r_s(x, \tau)|^2}{|t-\tau|^2}\, dx\, dt\, d\tau \le c_{18} \sum_{i\in I''(s)} [d_i^{(s)}]^{n-2}. \end{gathered} \tag{49}$$

Отсюда и из (12) следует ограниченность последовательности $r_s(x, t)$ в пространствах $V_2(Q_T)$, $W_2^{1,1/2}(Q)$.

Для проверки (47) достаточно вспомнить, что функции $\varphi_i^{(s)}(x)$ обращаются в нуль вне $B(x_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)})$ и, следовательно, в силу (42)

$$\operatorname{mes}\{(x,t)\in Q: |r_s(x,t)|>0\}\to 0 \quad \text{при } s\to\infty. \tag{50}$$

Теперь (47) следует из (48) – (50) и неравенства Гельдера.

При оценке $r_s^{(3)}(x,t)$ нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 5.** *Существует положительное число* $c'$, *зависящее только от* $n$, *такое, что при произвольных* $\rho, h>0$, $(x_0,t_0)\in Q$ *и произвольной функции* $v(x,t)\in W_2^{1,1/2}$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{t_0-h}^{t_0+h}\int\limits_{B(x_0,\rho)}|v(x,t)-v_0|^2\,dx\,dt\le c'\left\{\rho^2\int\limits_{t_0-h}^{t_0+h}\int\limits_{B(x_0,\rho)}\left|\frac{\partial}{\partial x}v(x,t)\right|^2dx\,dt+\right.$$

$$\left.+\;h\int\limits_{t_0-h}^{t_0+h}\int\limits_{t_0-h}^{t_0+h}\int\limits_{B(x_0,\rho)}\frac{|v(x,t)-v(x,\tau)|^2}{|t-\tau|^2}\,dx\,dt\,d\tau\right\}, \tag{51}$$

*как только* $B(x_0,\rho)\subset\Omega$. *Здесь* $v_0$ — *среднее значение* $v(x,t)$ *по цилиндру* $B(x_0,\rho)\times[t_0-h,\ t_0+h]$.

***Доказательство.*** Обозначим через $\kappa_n$ объем шара единичного радиуса в $R^n$. Непосредственно получаем

$$\int\limits_{t_0-h}^{t_0+h}\int\limits_{B(x_0,\rho)}|v(x,t)-v_0|^2\,dx\,dt=$$

$$=\frac{1}{[\kappa_n\rho^n 2h]^2}\int\limits_{t_0-h}^{t_0+h}\int\limits_{B(x_0,\rho)}\left|\int\limits_{t_0-h}^{t_0+h}\int\limits_{B(x_0,\rho)}[v(x,t)-v(y,\tau)]\,dy\,d\tau\right|^2dx\,dt\le$$

$$\le 3\left\{\int\limits_{t_0-h}^{t_0+h}\int\limits_{B(x_0,\rho)}|v(x,t)-v(t)|^2\,dx\,dt+\right.$$

$$\left.+\;\frac{1}{2h}\int\limits_{t_0-h}^{t_0+h}\int\limits_{t_0-h}^{t_0+h}\int\limits_{B(x_0,\rho)}|v(x,t)-v(x,\tau)|^2\,dx\,dt\,d\tau\right\}.$$

Здесь $v(t)$ — среднее значение $v(x,t)$ по шару $B(x_0,\rho)$. И далее (51) получается применением неравенства Пуанкаре.

**Лемма 6.** *Пусть выполнены условия* $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ *и* F. *Тогда последовательности* $r_s^{(3)}(x,t)$, $r_s^{(4)}(x,t)$ *и* $r_s^{(5)}(x,t)$ *при* $s\to\infty$ *сильно сходятся к нулю в пространствах* $V_2(Q_T)$ *и* $W_2^{1,1/2}(Q)$.

***Доказательство*** будем проводить только для $r_s^{(3)}(x,t)$, так как $r_s^{(4)}(x,t)$ и $r_s^{(5)}(x,t)$ оцениваются аналогично. Из ограниченности функции $u_0(x,t)$, $f(x,t)$ и наличия при каждом $t\in R^1$ в сумме, определяющей $r_s^{(3)}(x,t)$, не более четырех слагаемых, получаем

$$\int\limits_{\Omega}|r_s^{(3)}(x,t)|^2\,dx\le c_{19}\sum_{i\in I'(s)}[d_i^{(s)}]^n, \tag{52}$$

и правая часть стремится к нулю в силу (42).

Будем считать $s$ несколько большим, чтобы $d_i^{(s)}\le 1/2$. Используя неравенство (51), при

$$\tau_{i,r}^{(s)}(1) = \tilde{t}_{i,r}^{(s)} - [d_i^{(s)}]^2, \quad \tau_{i,r}^{(s)}(2) = \tilde{t}_{i,r}^{(s)} + [d_i^{(s)}]^2$$

имеем

$$\int_{R^1}\int_{\Omega} \left| \frac{\partial r_s^{(3)}(x,\ t)}{\partial x} \right|^2 dx\, dt \le$$

$$\le c_{20} \sum_{i \in I'(s)} \sum_{r=0}^{R(i,s)} \left\{ \int_{\tau_{i,r}^{(s)}(1)}^{\tau_{i,r}^{(s)}(2)} \int_{B(x_i^{(s)},\, 2d_i^{(s)})} \left[ \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \right]^2 dx\, dt \, + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau_{i,r}^{(s)}(1)}^{\tau_{i,r}^{(s)}(2)} \int_{\tau_{i,r}^{(s)}(1)}^{\tau_{i,r}^{(s)}(2)} \int_{B(x_i^{(s)},\, 2d_i^{(s)})} \left[ \frac{|u_0(x,\ t) - u_0(x,\ \tau)|^2}{|t-\tau|^2} + \frac{|f(x,\ t) - f(x,\ \tau)|^2}{|t-\tau|^2} \right] dx\, dt\, d\tau \right\} \le$$

$$\le c_{21} \int_0^T \int_{E_s} \left[ \left| \frac{\partial u_0(x,\ t)}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f(x,\ t)}{\partial x} \right|^2 \right] dx\, dt \, +$$

$$+ c_{21} \int_0^T \int_0^T \int_{E_s} \left[ \frac{|u_0(x,\ t) - u_0(x,\ \tau)|^2}{|t-\tau|^2} + \frac{|f(x,\ t) - f(x,\ \tau)|^2}{|t-\tau|^2} \right] dx\, dt\, d\tau, \tag{53}$$

где $E_s = \bigcup_{i=1}^{I'(s)} B(x_i^{(s)}, 2d_i^{(s)})$. На основании (42) $\operatorname{mes} E_s \to 0$ при $s \to \infty$. Поэтому правая часть (53) стремится к нулю при $s \to \infty$ в силу свойства абсолютной непрерывности интеграла.

Наконец, нужно получить для $r_s^{(3)}(x, t)$ равенство вида (45). Имеем

$$\int_{R^1}\int_{R^1}\int_{\Omega} \frac{|r_s^{(1)}(x,\ t) - r_s^{(3)}(x,\ \tau)|^2}{|t-\tau|^2}\, dx\, dt\, d\tau \le$$

$$\le c_{22} \sum_{i \in I'(s)} \sum_{r=0}^{R(i,s)} \int_{R^1}\int_{R^1}\int_{\Omega} \left\{ \left| \frac{\tilde{g}_{i,r}^{(s)}(t) - \tilde{g}_{i,r}^{(s)}(\tau)}{t-\tau} \right|^2 \left[\varphi_i^{(s)}(x)\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[ \left| \frac{u_0(x,\ t) - u_0(x,\ \tau)}{t-\tau} \right|^2 + \left| \frac{f(x,\ t) - f(x,\ \tau)}{t-\tau} \right|^2 \right] \left[\tilde{g}_{i,r}^{(s)}(\tau)\varphi_i^{(s)}(x)\right]^2 \right\} dx\, dt\, d\tau,$$

и правая часть стремится к нулю при $s \to \infty$. В этом убеждаемся аналогично (53) и используя оценку производной $\tilde{g}_{i,r}^{(s)}(t)$. Тем самым завершено доказательство леммы 6.

**5. Доказательство теоремы 2.** В интегральном тождестве (11) заменим $u_s(x, t)$ функцией $w_s(x, t)\eta(t)$, где $\eta(t)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция с носителем в интервале $(-T,\ T - 1/2)$. Принадлежность функции $\eta(t)\, w_s(x, t)$ пространству $W_2^{1,1/2}(Q^{(s)})$ следует из лемм 1, 3, 4, 6. Эта функция также принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1/2}(Q_T^{(s)})$, что следует из разложения (19), определения функций $v_i^{(s)}(x,\ t,\ q)$ и тождеств (17), (18), справедливых для $t \in [0, T'] = [0,\ T - 1/2]$. Так что указанную подстановку можно осуществить. В результате получим

$$\iint\limits_{Q_T^{(s)}} \sum_{j=1}^{n} \left[ a_j\left(x,\ t,\ u_s,\ \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) - a_j\left(x,\ t,\ u_s,\ \frac{\partial u_s}{\partial x} - \frac{\partial w_s}{\partial x}\right)\right] \eta^2(t)\, \frac{\partial w_s(x,\ t)}{\partial x_j}\, dx\, dt\, -$$

$$- \sqrt{-1} \int\limits_{R^1} \int\limits_{\Omega^{(s)}} \alpha\, [F(r_s\, \eta)]\, (x, \alpha)\, \overline{[F(w_s \eta)](x,\ \alpha)}\, dx\, d\alpha\, +$$

$$+ \iint\limits_{Q_T^{(s)}} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x,\ t,\ 0,\ \frac{\partial r_s(x,\ t)}{\partial x}\right) \frac{\partial w_s(x,\ t)}{\partial x_j}\, \eta^2(t)\, dx\, dt\, = \sum_{j=1}^{9} I_j^{(s)}, \tag{54}$$

где

$$I_1^{(s)} = \sqrt{-1} \int\limits_{R^1} \int\limits_{\Omega^{(s)}} \alpha\, [F(u_0 \eta)]\, (x, \alpha)\, \overline{[F(w_s \eta)](x,\ \alpha)}\, dx\, d\alpha,$$

$$I_2^{(s)} = \sqrt{-1} \sum_{j=1}^{5} \int\limits_{R^1} \int\limits_{\Omega^{(s)}} \alpha\, [F(r_s^{(j)} \eta)]\, (x, \alpha)\, \overline{[F(w_s \eta)](x,\ \alpha)}\, dx\, d\alpha,$$

$$I_3^{(s)} = \sqrt{-1} \int\limits_{R^1} \int\limits_{\Omega^{(s)}} \alpha\, [F(w_s \eta)]\, (x, \alpha)\, \overline{[F(w_s \eta)](x,\ \alpha)}\, dx\, d\alpha,$$

$$I_4^{(s)} = \iint\limits_{Q_T^{(s)}} u_s\, (x, t)\, w_s\, (x, t)\, \eta(t)\, \frac{d\eta(t)}{dt}\, dx\, dt,$$

$$I_5^{(s)} = - \iint\limits_{Q_T^{(s)}} \sum_{j=1}^{n} \left[ a_j\left(x,\ t,\ u_s,\ \frac{\partial u_s}{\partial x} - \frac{\partial w_s}{\partial x}\right) - \right.$$

$$\left. - a_j\left(x,\ t,\ u_s,\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial r_s}{\partial x}\right)\right] \eta^2(t)\, \frac{\partial w_s(x,\ t)}{\partial x_j}\, dx\, dt,$$

$$I_6^{(s)} = - \iint\limits_{Q_T^{(s)}} \sum_{j=1}^{n} \left[ a_j\left(x,\ t,\ u_s,\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial r_s}{\partial x}\right) - \right.$$

$$\left. - a_j\left(x,\ t,\ u_0 \chi(D_s),\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial r_s}{\partial x}\right)\right] \eta^2(t)\, \frac{\partial w_s}{\partial x_j}\, dx\, dt,$$

$$I_7^{(s)} = - \iint\limits_{Q_T^{(s)}} [1 - \chi(D_s)] \sum_{j=1}^{n} \left[ a_j\left(x,\ t,\ 0,\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial r_s}{\partial x}\right) - \right.$$

$$\left. - a_j\left(x,\ t,\ 0,\ \frac{\partial r_s}{\partial x}\right)\right] \eta^2(t)\, \frac{\partial w_s}{\partial x_j}\, dx\, dt,$$

$$I_8^{(s)} = - \iint\limits_{Q_T^{(s)}} \chi\, (D_s) \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x,\ t,\ u_0,\ \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) \eta^2(t)\, \frac{\partial w_s(x,\ t)}{\partial x_j}\, dx\, dt,$$

$$I_9^{(s)} = \iint\limits_{Q_T^{(s)}} a_0\left(x,\ t,\ u_s,\ \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) \eta^2(t)\, w_s\, (x, t)\, dx\, dt.$$

Здесь $\chi(D_s)$ — характеристическая функция множества $D_s = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{I(s)} B(x_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)})$.

Рассмотрим поведение слагаемых в (54) при $s \to \infty$ и начнем с правой части.

**Лемма 7.** *Предположим, что выполнены условия* $A_1, A_2, B_1, B_2$ *и* F. *Тогда*

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{j=1}^{9} |I_j^{(s)}| = 0. \tag{55}$$

***Доказательство.*** Из лемм 1, 3, 4, 6 следует ограниченность последовательности $w_s(x, t)\eta(t)$ в $W_2^{1,1/2}(Q)$, ее слабая сходимость к нулю в этом пространстве и сильная сходимость в $L_2(Q_T)$. Используя доказанную в предыдущих леммах сильную сходимость $r_s^{(j)}(x, t)$, непосредственно получаем

$$\lim_{s\to\infty} |I_s^{(l)}| = 0, \quad l = 1, 2, 4, 8, 9. \tag{56}$$

Покажем, что $I_s^{(3)} = 0$. Вводя усреднение по $t$ и используя равенство Парсеваля, имеем

$$I_s^{(3)} = \lim_{h\to\infty} \left\{ \sqrt{-1} \int_{R^1} \int_{\Omega^{(s)}} \alpha [F(w_s\eta)_{(h)}](x, \alpha) \overline{[F(w_s\eta)_{(h)}](x, \alpha)}\, dx\, d\alpha \right\} =$$

$$= \lim_{h\to\infty} \int_{R^1} \int_{\Omega^{(s)}} \frac{\partial}{\partial t} [w_s\eta]_{(h)} [w_s\eta]_{(h)}\, dx\, dt = 0. \tag{57}$$

Из сильной сходимости $r_s^{(j)}(x, t)$ и второго неравенства в (4) следует $I_s^{(5)} \to \to 0$. Также доказывается стремление к нулю $I_s^{(6)}$. Для этого нужно только заметить, что

$$\| u_s(x, t) - u_0(x, t)\chi(D_s)\|_{L_2(Q_T^{(s)})} \le \|u_s - u_0\|_{L_2(Q_T^{(s)})} + M \left\{ \sum_{i=1}^{I(s)} \kappa_n [2\rho_i^{(s)}]^n \right\}^{1/2}$$

и предел правой части при $s \to \infty$ равен нулю. Наконец, $I_s^{(7)} \to 0$ в силу (4) и свойства абсолютной непрерывности интеграла. Тем самым равенство (55) доказано.

Первый интеграл в (54) будем оценивать с использованием условия $A_2$:

$$\iint_{Q_T^{(s)}} \sum_{j=1}^{n} \left[ a_j\!\left(x, t, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) - a_j\!\left(x, t, \frac{\partial u_s}{\partial x} - \frac{\partial w_s}{\partial x}\right) \right] \eta^2(t) \frac{\partial w_s(x, t)}{\partial x_j}\, dx\, dt \ge$$

$$\ge \nu \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial w_s(x, t)}{\partial x} \right|^2 \eta^2(t)\, dx\, dt. \tag{58}$$

Осталось изучить поведение при $s \to \infty$ суммы второго и третьего слагаемых в левой части (54). Вначале отметим, что в силу того, что носители функций $g_{i,k}^{(s)}(t)\, \varphi_i^{(s)}(x)$ при различных парах значений $i, s$ не пересекаются, и из условия $a_j(x, t, 0, 0) \equiv 0$, $j = 1, \dots, n$, следует равенство

$$-\sqrt{-1} \int_{R^1} \int_{\Omega^{(s)}} \alpha [F(r_s\eta)](x, \alpha) \overline{[F(w_s\eta)](x, \alpha)}\, dx\, d\alpha +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \iint_{Q_T^{(s)}} a_j\!\left(x, t, 0, \frac{\partial r_s(x, t)}{\partial x}\right) \frac{\partial w_s(x, t)}{\partial x_j} \eta^2(t)\, dx\, dt =$$

$$= \sum_{i \in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,\, s)} \left\{ I_{i,k}^{(s,1)} + I_{i,k}^{(s,2)} \right\}, \tag{59}$$

где

$$I_{i,k}^{(s,1)} = -\sqrt{-1} \int_{R^1} \int_{\Omega^{(s)}} \alpha F[v_{i,k}^{(s)} g_{i,k}^{(s)} \varphi_i^{(s)} \eta] \; \overline{[F(w_s \eta)]} \, dx \, d\alpha,$$

$$I_{i,k}^{(s,2)} = \sum_{j=1}^{n} \iint_{Q_T^{(s)}} a_j \left( x,\ t,\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x} (v_{i,k}^{(s)} \; g_{i,k}^{(s)} \; \varphi_i^{(s)}) \right) \frac{\partial w_s(x,\ t)}{\partial x_j} \, \eta^2(t) \, dx \, dt,$$

$$v_{i,k}^{(s)} \equiv v_{i,k}^{(s)}(x, t) \equiv v_i^{(s)}(x, t, f_{i,k}^{(s)} - u_{i,k}^{(s)}).$$

Обозначим через $Q_{i,k}^{(s)}$ цилиндр $B(x_i^{(s)},\ 2\rho_i^{(s)}) \times [t_{i,k-1}^{(s)},\ t_{i,k}^{(s)}]$ и пусть

$$A_{i,k}^{(s)} = M[w_s \eta,\ Q_{i,k}^{(s)}] \tag{60}$$

— среднее значение функции $w_s(x, t)\eta(t)$ по этому цилиндру. Используя усреднение по $t$ и равенство Парсеваля, преобразуем $I_{i,k}^{(s,1)}$ следующим образом:

$$-\sqrt{-1} \int_{R^1} \int_{\Omega^{(s)}} \alpha F \, [v_{i,k}^{(s)} \; g_{i,k}^{(s)} \; \varphi_i^{(s)} \eta] \; \overline{F[w_s \eta]} \, dx \, d\alpha =$$

$$= \lim_{h \to \infty} \int_{R^1} \int_{\Omega^{(s)}} v_{i,k}^{(s)}(x,\ t) \, g_{i,k}^{(s)}(t) \, \varphi_i^{(s)}(x) \, \eta(t) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [w_s \eta]_h - A_{i,k}^{(s)} \right\} dx \, dt =$$

$$= -\int_{R^1} \int_{\Omega^{(s)}} v_{i,k}^{(s)}(x,\ t) \, \varphi_i^{(s)}(x) \, \eta(t) \left\{ w_s(x,\ t)\eta(t) - A_{i,k}^{(s)} \right\} \frac{dg_{i,k}^{(s)}(t)}{dt} \, dx \, dt -$$

$$-\sqrt{-1} \int_{R^1} \int_{\Omega^{(s)}} \alpha F[v_{i,k}^{(s)} \eta] \; \overline{F[(w_s \eta - A_{i,k}^{(s)}) g_{i,k}^{(s)} \varphi_i^{(s)}]} \, dx \, d\alpha.$$

Заменим последний интеграл его значением из тождества вида (11), соответствующего граничной задаче (13) – (15). Получим

$$I_{i,k}^{(s,1)} = J_{i,k}^{(s,1)} + J_{i,k}^{(s,2)} + J_{i,k}^{(s,3)} + J_{i,k}^{(s,4)}, \tag{61}$$

где

$$J_{i,k}^{(s,1)} = -\sum_{j=1}^{n} \iint_{Q_T^{(s)}} a_j \left( x,\ t,\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x} v_{i,k}^{(s)} \right) \eta(t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ w_s(x,\ t)\eta(t) - g_{i,k}^{(s)}(t) \, \varphi_i^{(s)}(x) \right\} dx \, dt,$$

$$J_{i,k}^{(s,2)} = \iint_{Q_T^{(s)}} v_{i,k}^{(s)}(x,\ t) \, \varphi_i^{(s)}(x) \, \eta(t) \left\{ w_s(x,\ t)\eta(t) - A_{i,k}^{(s)} \right\} \frac{dg_{i,k}^{(s)}(t)}{dt} \, dx \, dt,$$

$$J_{i,k}^{(s,3)} = \iint_{Q_T^{(s)}} v_{i,k}^{(s)}(x,\ t) \left\{ w_s(x,\ t)\eta(t) - A_{i,k}^{(s)} \right\} g_{i,k}^{(s)}(t) \, \varphi_i^{(s)}(x) \frac{d\eta(t)}{dt} \, dx \, dt,$$

$$J_{i,k}^{(s,4)} = A_{i,k}^{(s)} \sum_{j=1}^{n} \iint_{Q_T^{(s)}} a_j \left( x,\ t,\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x} v_{i,k}^{(s)}(x,\ t) \right) \eta(t) g_{i,k}^{(s)}(t) \frac{\partial \varphi_i^{(s)}(x)}{\partial x_j} \, dx \, dt.$$

Покажем сейчас, что сумма слагаемых $I_{i,k}^{(s,2)} + J_{i,k}^{(s,1)}$ стремится к нулю при $s \to \infty$. Введем дополнительно функции $h_{i,k}^{(s)}(t)$, $i \in I''(s)$, $k = 1, \ldots, K(i, s)$, так, чтобы их носители содержались в интервалах $(t_{i,k-1}^{(s)} + 2\lambda_s [\rho_i^{(s)}]^2,\ t_{i,k}^{(s)} - 2\lambda_s [\rho_i^{(s)}]^2)$, эти функции равнялись единице при

$$t \in [\,t_{i,k-1}^{(s)} + 3\lambda_s [\rho_i^{(s)}]^2,\ t_{i,k}^{(s)} - 3\lambda_s [\rho_i^{(s)}]^2]$$

и чтобы

$$0 \le h_{i,k}^{(s)}(t) \le 1, \quad | d h_{i,k}^{(s)}(t)/dt | \le 2\lambda_s^{-1}[\rho_i^{(s)}]^{-2}.$$

Пусть еще $\chi_i^{(s)}(x) = \omega(|x - x_i^{(s)}|/\rho_i^{(s)})$. Так что справедливы тождества

$$h_{i,k}^{(s)}(t)\, g_{i,k}^{(s)}(t) \equiv h_{i,k}^{(s)}(t), \quad \chi_i^{(s)}(x)\,\varphi_i^{(s)}(x) \equiv \chi_i^{(s)}(x). \tag{62}$$

Используя (62), получаем

$$I_{i,k}^{(s,2)} + J_{i,k}^{(s,1)} = \sum_{j=1}^{n} x \left\{ \iint\limits_{Q_T^{(s)}} a_j\!\left(x,\ t,\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x}(v_{i,k}^{(s)}\, g_{i,k}^{(s)}\, \varphi_i^{(s)})\right) \times \right.$$

$$\times\ \frac{\partial}{\partial x_j}[(1 - h_{i,k}^{(s)}\,\chi_i^{(s)})\, w_s]\,\eta^2(t)\,dx\,dt - \iint\limits_{Q_T^{(s)}} a_j\!\left(x,\ t,\ 0,\ \frac{\partial v_{i,k}^{(s)}}{\partial x}\right) \times$$

$$\left. \times\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big[w_s\Big(g_{i,k}^{(s)}(t)\varphi_i^{(s)}(x) - h_{i,k}^{(s)}(t)\chi_i^{(s)}(x)\Big)\Big]\eta^2(t)\,dx\,dt \right\}. \tag{63}$$

Оба интеграла в правой части (63) оцениваются аналогично, поэтому оценим только первый из них. Представляя

$$1 - h_{i,k}^{(s)}(t)\,\chi_i^{(s)}(x) = [1 - h_{i,k}^{(s)}(t)]\,\chi_i^{(s)}(x) + [1 - \chi_i^{(s)}(x)]$$

и замечая, что

$$\varphi_i^{(s)}(x)\,[1 - \chi_i^{(s)}(x)] = \omega_1(|x - x_i^{(s)}|/(2\rho_i^{(s)}))\,[1 - \chi_i^{(s)}(x)],$$

где функция $\omega_1(r)$ определена равенством (37), имеем

$$\tilde J_{ik}^{(s)} = \sum_{j=1}^{n} \left| \iint\limits_{Q_T^{(s)}} a_j\!\left(x,\ t,\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x}(v_{i,k}^{(s)}\, g_{i,k}^{(s)}\, \varphi_i^{(s)})\right) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big[\Big(1 - h_{i,k}^{(s)}\,\chi_i^{(s)}\Big) w_s\Big]\eta^2(t)\,dx\,dt \right| \le$$

$$\le c_{23} \left\{ \iint\limits_{Q_T^{(s)}} \left|\Big(1 - h_{i,k}^{(s)}(t)\Big)\, g_{i,k}^{(s)}(t)\,\eta(t)\right|^2 \left|\frac{\partial}{\partial x}\Big(v_{i,k}^{(s)}(x,t)\,\varphi_i^{(s)}(x)\Big)\right|^2 dx\,dt \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \iint\limits_{Q_T^{(s)}} \left|\frac{\partial w_s(x,\ t)}{\partial x}\right|^2 |\chi_i^{(s)}(x)|^2 dx\,dt \right\}^{1/2} +$$

$$+\ c_{23} \left\{ \iint\limits_{Q_T^{(s)}} |g_{i,k}^{(s)}(t)\,\eta(t)|^2 \left|\frac{\partial}{\partial x}\left[v_{i,k}^{(s)}(x,\ t)\,\omega_1\!\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{2\rho_i^{(s)}}\right)\right]\right|^2 dx\,dt \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{t_{i,k-1}^{(s)}}^{t_{i,k}^{(s)}} \int\limits_{B(x_i^{(s)},\, 2\rho_i^{(s)})} \left[ \left| \frac{\partial w_s(x,\ t)}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{[\rho_i^{(s)}]^2} \,|\, w_s(x,\ t)\,|^2 \right] dx\, dt \right\}^{1/2}. \tag{64}$$

Интегралы, содержащие $v_{i,k}^{(s)}(x,t)$, оцениваются соответственно по теоремам 4, 5. При оценке последнего интеграла воспользуемся еще неравенством

$$\int\limits_{B(x_0,\rho)} |\,u(x)\,|^2\,dx \le c(n) \left\{ \rho^2 \int\limits_{B(x_0,r)} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|^2 dx + \frac{\rho^n}{r^n} \int\limits_{B(x_0,r)} |\,u(x)\,|^2 dx \right\}, \tag{65}$$

справедливым с постоянной $c(n)$, зависящей лишь от $n$, для любой функции $u(x) \in W_2^1(B(x_0, r))$ и произвольных чисел $\rho, r$ таких, что $0 < \rho \le r$ (см. [4], гл. 8, § 1).

Получаем

$$\tilde{J}_{ik}^{(s)} \le c_{24} \left\{ \left( \lambda_s + \left[ \frac{d_i^{(s)}}{\rho_i^{(s)}} \right]^{n-2} \right) [\rho_i^{(s)}]^2\, [d_i^{(s)}]^{n-2} \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{t_{i,k-1}^{(s)}}^{t_{i,k}^{(s)}} \int\limits_{B(x_i^{(s)},\, r_i^{(s)}/2)} \left| \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right|^2 dx\, dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ c_{24} \{ [\rho_i^{(s)}]^2\, [d_i^{(s)}]^{2(n-2)} [r_i^{(s)}]^{-n} \}^{1/2} \left\{ \int\limits_{t_{i,k-1}^{(s)}}^{t_{i,k}^{(s)}} \int\limits_{B(x_i^{(s)},\, r_i^{(s)}/2)} |\, w_s(x,\ t)\,|^2\, dx\, dt \right\}^{1/2}.$$

Отсюда и из (41) непосредственно следует

$$\sum_{i \in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} \tilde{J}_{ik}^{(s)} \le c_{25} \lambda_s \left\{ \sum_{i \in I''(s)} [d_i^{(s)}]^{n-2} \right\}^{1/2} \left\{ \iint\limits_{Q_T^{(s)}} \left| \frac{\partial w_s(x,\ t)}{\partial x} \right|^2 dx\, dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ c_{25} \left\{ \sum_{i \in I''(s)} [d_i^{(s)}]^{2(n-2)}\, [r_i^{(s)}]^{-n} \right\}^{1/2} \left\{ \iint\limits_{Q_T^{(s)}} |\, w_s(x,\ t)\,|^2\, dx\, dt \right\}^{1/2}.$$

Правая часть стремится к нулю в силу условий $B_1$, $B_2$, выбора $\lambda_s$ и отмеченных выше свойств последовательности $w_s(x,t)$. Таким образом, доказано равенство

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i \in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} |\ I_{ik}^{(s,2)} + J_{ik}^{(s,1)}\ | = 0. \tag{66}$$

Переходя к оценке $J_{ik}^{(s,2)}$, отметим, что $\dfrac{dg_{i,k}^{(s)}(t)}{dt} \varphi_i^{(s)}(t)$ обращается в нуль вне цилиндров

$$Q_{ik}^{(s,1)} = B(x_i^{(s)},\ 2\rho_i^{(s)}) \times [t_{i,k-1}^{(s)} + \lambda_s [\rho_i^{(s)}]^2,\ [t_{i,k-1}^{(s)} + 2\lambda_s [\rho_i^{(s)}]^2\},$$

$$Q_{ik}^{(s,2)} = B(x_i^{(s)},\ 2\rho_i^{(s)}) \times [t_{ik}^{(s)} - 2\lambda_s [\rho_i^{(s)}]^2,\ t_{ik}^{(s)} - \lambda_s [\rho_i^{(s)}]^2\}.$$

Имеем

$$|J_{ik}^{(s,2)}| \le c_{26} \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\lambda_s [\rho_i^{(s)}]^2} \left\{ \iint\limits_{Q_{ik}^{(s,j)}} \left| v_{ik}^{(s)}(x, t) \right| dx\, dt \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \iint\limits_{Q_{ik}^{(s,j)}} \left| w_s(x, t)\, \eta(t) - A_{ik}^{(s)} \right|^2 dx\, dt \right\}^{1/2}. \qquad (67)$$

Оценивая первый интеграл аналогично (32), получаем

$$\iint\limits_{Q_{ik}^{(s,j)}} |v_{ik}^{(s)}(x, t)|^2\, dx\, dt \le c_{27} \lambda_s [\rho_i^{(s)}]^3 [d_i^{(s)}]^{n-1} \le c_{27} \lambda_s^2 [\rho_i^{(s)}]^4 [d_i^{(s)}]^{n-2}. \qquad (68)$$

При оценке второго интеграла в (67) применим еще легко проверяемое неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\lambda\rho^2} h^2(t)\, dt \le 2\sqrt{\lambda}\, \rho^2 \int\limits_{t_0}^{t_0+\sqrt{\lambda}\rho^2} \int\limits_{t_0}^{t_0+\sqrt{\lambda}\rho^2} \left| \frac{h(t) - h(\tau)}{|t-\tau|} \right|^2 dt\, d\tau + \sqrt{\lambda} \int\limits_{t_0}^{t_0+\sqrt{\lambda}\rho^2} h^2(t)\, dt, \qquad (69)$$

справедливое при произвольных положительных числах $\lambda, \rho, \lambda < 1$, и любой функции $h(t)$, для которой конечна правая часть (69).

Используя (69), имеем

$$\iint\limits_{Q_{ik}^{(s,j)}} | w_s(x, t)\, \eta(t) - A_{ik}^{(s)} |^2\, dx\, dt \le 2\sqrt{\lambda_s} \iint\limits_{Q_{ik}^{(s)}} | w_s(x, t)\, \eta(t) - A_{ik}^{(s)} |^2\, dx\, dt +$$

$$+ 2\sqrt{\lambda_s}\, [\rho_i^{(s)}]^2 \int\limits_{t_{i,k-1}^{(s)}}^{t_{ik}^{(s)}} \left\{ \iint\limits_{Q_{ik}^{(s)}} \frac{| w_s(x, t)\, \eta(t) - w_s(x, \tau)\, \eta(\tau) |^2}{|t-\tau|^2}\, dx\, dt \right\}^{1/2} d\tau. \qquad (70)$$

И далее оцениваем первый интеграл правой части, применяя лемму 5:

$$\iint\limits_{Q_{ik}^{(s)}} | w_s(x, t)\, \eta(t) - A_{ik}^{(s)} |^2\, dx\, dt \le c_{28} [\rho_i^{(s)}]^2 \iint\limits_{Q_{ik}^{(s)}} \left| \frac{\partial w_s(x, t)}{\partial x} \right|^2 \eta^2(t)\, dx\, dt +$$

$$+ [\rho_i^{(s)}]^2 \int\limits_{t_{i,k-1}^{(s)}}^{t_{ik}^{(s)}} \left\{ \iint\limits_{Q_{ik}^{(s)}} \frac{| w_s(x,t)\, \eta(t) - w_s(x,\tau)\, \eta(\tau) |^2}{|t-\tau|^2}\, dx\, dt \right\} d\tau. \qquad (71)$$

Теперь из неравенств (67), (68), (70), (71) и (41) имеем

$$\sum_{i \in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} | J_{ik}^{(s,2)} | \le c_{29}\, \lambda_s^{1/4} \left\{ \sum_{i \in I''(s)} [d_i^{(s)}]^{n-2} \right\}^{1/2} \left\{ \iint\limits_{Q_T^{(s)}} \left| \frac{\partial w_s(x, t)}{\partial x} \right|^2 \eta^2(t)\, dx\, dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{R^1} \int\limits_{R^1} \int\limits_{\Omega^{(s)}} \frac{| w_s(x, t)\, \eta(t) - w_s(x, \tau)\, \eta(\tau) |^2}{|t-\tau|^2}\, dx\, dt\, d\tau \right\}^{1/2},$$

и, следовательно,

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i \in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} | J_{ik}^{(s,2)} | = 0. \qquad (72)$$

Аналогично, только без применения оценки (69), проверяется равенство

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i\in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} | J_{ik}^{(s,3)} | = 0. \tag{73}$$

Осталось рассмотреть поведение суммы $J_{ik}^{(s,4)}$. Замечая, что

$$\frac{\partial \varphi_i^{(s)}(x)}{\partial x} \equiv \frac{\partial \varphi_i^{(s)}(x)}{\partial x} \omega_1\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{2\rho_i^{(s)}}\right)$$

с функцией $\omega_1(r)$, определенной равенством (37), имеем

$$| J_{ik}^{(s,4)} | \le c_{30} [\rho_i^{(s)}]^{-n-3} \iint_{Q_{ik}^{(s)}} | w_s(x,t)\eta(t) | \, dx\,dt \times$$

$$\times \iint_{Q_T^{(s)}} \left| \frac{\partial}{\partial x}\left[ v_{ik}^{(s)}(x,\ t)\,\omega_1\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{2\rho_i^{(s)}}\right)\right]\right| \eta(t)\, g_{i,k}^{(s)}(t)\, dx\,dt \le$$

$$\le c_{31} [\rho_i^{(s)}]^{-1} \left\{ \iint_{Q_{ik}^{(s)}} | w_s(x,\ t)\,\eta(t)|^2 \, dx\,dt \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \iint_{Q_T^{(s)}} \left| \frac{\partial}{\partial x}\left[ v_{ik}^{(s)}(x,\ t)\,\omega_1\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{2\rho_i^{(s)}}\right)\right]\right|^2 \left[\eta(t)\, g_{ik}^{(s)}(t)\right]^2 dx\,dt \right\}^{1/2}. \tag{74}$$

Далее оценим первый интеграл в правой части (73), используя неравенство (65), а второй интеграл оценим по теореме 5. В итоге получим

$$\sum_{i\in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} | J_{ik}^{(s,4)} | \le c_{32} \left\{ \sum_{i\in I''(s)} \left[\frac{d_i^{(s)}}{\rho_i^{(s)}}\right]^{n-2} [d_i^{(s)}]^{n-2} \right\}^{1/2} \left\{ \iint_{Q_T^{(s)}} \left| \frac{\partial(w_s\eta)}{\partial x}\right|^2 dx\,dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ \left\{ \sum_{i\in I''(s)} [d_i^{(s)}]^{2(n-2)} [r_i^{(s)}]^{-n} \right\}^{1/2} \left\{ \iint_{Q_T^{(s)}} | w_s(x,\ t)\,\eta(t)|^2 \, dx\,dt \right\}^{1/2},$$

и, следовательно,

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i\in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} | J_{ik}^{(s,4)} | = 0. \tag{75}$$

Окончательно, из (54), (55), (58), (59), (61), (66), (72), (73), (75) вытекает следующая лемма.

**Лемма 8.** *Предположим, что выполнены условия* $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ *и* F. *Тогда*

$$\lim_{s\to\infty} \iint_{Q_T} \left| \frac{\partial w_s(x,\ t)}{\partial x} \right|^2 \eta^2(t)\, dx\,dt = 0. \tag{76}$$

Для завершения доказательства теоремы 1 необходима следующая лемма.

**Лемма 9.** *Предположим, что выполнены условия* $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ *и* F. *Тогда*

$$\lim_{s\to\infty} \int_{R^1} \int_{\Omega^{(s)}} |\alpha| \, |[F(\omega_s\eta)](x,\alpha)|^2 \, dx\,d\alpha = 0. \tag{77}$$

***Доказательство.*** Пусть $\psi_s(x,t) = \psi_s^{(1)}(x,t) + \psi_s^{(2)}(x,t)$, где

$$\psi_s^{(1)}(x,t) = \sqrt{-1}\,F^{-1}\left[\frac{\alpha}{|\alpha|}F(w_s\eta)\right], \qquad \psi_s^{(2)}(x,t) = \sqrt{-1}\sum_{j=1}^{5}F^{-1}\left[\frac{\alpha}{|\alpha|}F(r_s^{(j)}\eta)\right].$$

Легко проверяется, что

$$\psi_s(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1/2}(Q^{(s)}).$$

Подставляя $\psi_s(x,t)$ в качестве пробной функции в интегральное тождество (11), получаем

$$\int\limits_{R^1}\int\limits_{\Omega^{(s)}} |\alpha|\,|[F(w_s\eta)](x,\alpha)|^2\,dx\,d\alpha = -\sqrt{-1}\int\limits_{R^1}\int\limits_{\Omega^{(s)}}\alpha F(r_s\eta)\overline{F(\psi_s^{(1)})}\,dx\,d\alpha -$$

$$-\sqrt{-1}\int\limits_{R^1}\int\limits_{\Omega^{(s)}}\alpha F\left[\left(u_0+\sum_{j=1}^{5}r_s^{(j)}\right)\eta\right]\overline{[F\psi_s^{(1)}](x,\alpha)}\,dx\,d\alpha -$$

$$-\sqrt{-1}\int\limits_{R^1}\int\limits_{\Omega^{(s)}}\alpha\,[F(u_s\eta)](x,\alpha)\,\overline{[F\psi_s^{(2)}](x,\alpha)}\,dx\,d\alpha -$$

$$-\iint\limits_{Q_T^{(s)}}\left\{u_s\psi_s\frac{d\eta}{dt} - \sum_{j=1}^{n}a_j\left(x,t,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\eta\frac{\partial\psi_s}{\partial x_j} + a_0\left(x,t,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\eta\,\psi_s\right\}^{1/2}dx\,dt. \tag{78}$$

Покажем, что правая часть (78) стремится к нулю при $s\to\infty$. Используя равенство Парсеваля и леммы 3, 6, 7, имеем

$$\lim_{s\to\infty}\iint\limits_{Q_T^{(s)}}\left|\frac{\partial\psi_s^{(1)}(x,t)}{\partial x}\right|^2dx\,dt = \lim_{s\to\infty}\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial\psi_s(x,t)}{\partial x}\right|^2dx\,dt = 0. \tag{79}$$

Отсюда следует, что последний интеграл правой части (68) стремится к нулю. Проверяется, что $\psi_s^{(1)}(x,t)$ слабо сходится к нулю, а $\psi_s^{(2)}(x,t)$ сильно сходится к нулю в $W_2^{1,1/2}(Q)$. Поэтому при $s\to\infty$ пределы второго и третьего слагаемых правой части (78) равны нулю.

Наконец, использовав интегральное тождество вида (11) для функции $v_{ik}^{(s)}(x,t)$, представим первый интеграл правой части (78) в виде

$$\sqrt{-1}\int\limits_{R^1}\int\limits_{\Omega^{(s)}}\alpha F(r_s\eta)\overline{F(\psi_s^{(1)})}\,dx\,d\alpha =$$

$$= \left\{\sqrt{-1}\int\limits_{R^1}\int\limits_{\Omega^{(s)}}\alpha F(r_s\eta)\overline{F(\psi_s^{(1)})}\,dx\,d\alpha -\right.$$

$$\left.-\iint\limits_{Q_T^{(s)}}\sum_{j=1}^{n}a_j\left(x,t,0,\frac{\partial r_s}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\psi_s^{(1)}(x,t)\eta(t)\,dx\,dt\right\} +$$

$$+\iint\limits_{Q_T^{(s)}}\sum_{j=1}^{n}a_j\left(x,t,0,\frac{\partial r_s}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\psi_s^{(1)}(x,t)\eta(t)\,dx\,dt. \tag{80}$$

Здесь выражение в фигурных скобках полностью аналогично левой части в (59). Поэтому, как и при доказательстве леммы 7, убеждаемся, что разность двух первых интегралов в правой части (80) стремится к нулю. Последний интеграл в (80) стремится к нулю в силу (79).

Тем самым закончена проверка стремления к нулю правой части (78) при $s \to \infty$, что и завершает доказательство леммы 8, а следовательно, и теоремы 2.

**6. Заключительные замечания. 1.** Из асимптотического представления (19), лемм 3, 4, 6 и теоремы 1 можно сделать заключение о сильной сходимости последовательности $u_s(x, t)$ в некоторых нормах. В частности, при любом $p < 2$ последовательность $\partial u_s(x, t) / \partial x$ сильно сходится в $L_p(Q_T)$.

**2.** Можно ослабить условия $A_2$. В частности, вместо второго неравенства в (4) можно предполагать выполнение неравенства

$$| a_j(x, t, u, p) - a_j(x, t, u, q) | \le \mu | p - q |, \quad j = 1, \ldots, n,$$

справедливого при

$$a_j(x, t, u, q) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x, t, u) p_k.$$

Для этого достаточно только заменить уравнение (13) при построении функций $v_i^{(s)}(x, t, q)$ следующим:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j \left( x, t, u_s, \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0, \qquad (x, t) \in G_i^{(s)}.$$

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
2. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – Киев: Наук. думка, 1974. – 278 с.
3. *Skrypnik I. V.* Nonlinear elliptic boundary value problems. – Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1986. – 232 p.
4. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990. – 442 с.
5. *Ламонов С. А.* О сходимости решений первой краевой задачи для квазилинейных параболических уравнений в областях с мелкозернистой границей // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1984. – Вып. 2. – С. 60 – 63.
6. *Скрыпник И. В.* Поточечные оценки решения модельной нелинейной параболической задачи // Нелинейные граничные задачи. – 1991. – Вып. 3. – С. 72 – 86.

Получено 22. 10. 93