УДК 517.956

А. А. Ковалевский, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

УСРЕДНЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЙМАНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТЯХ КАРКАСНОГО ТИПА С ТОНКИМИ КАНАЛАМИ

The G-convergence of the operators for the Neumann problem in the regions with framework-type periodic structure with thin channels is established. The representation of the coefficients of the G-limiting operator is obtained.

Встановлена G-збіжність операторів задачі Неймана в областях періодичної структури каркасного типу з тонкими каналами. Одержані зображення для коефіцієнтів G-граничного оператора.

В настоящей работе изучается поведение последовательностей решений задач Неймана для нелинейных эллиптических уравнений в областях, представимых в виде объединения двух основных компонент (каркасов) и соединяющих их тонких каналов. Устанавливается G-сходимость соответствующих этим задачам операторов к оператору с эффективно вычисляемыми коэффициентами.

1. Области Ω_s и некоторые свойства их структурных составляющих. Введем обозначения: $Q = \{x \in \mathbb{R}^3\colon |x_i| < 1/2,\ i = 1, 2, 3\}$, если $y \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{N}$, то $Q_t(y) = y + t^{-1}Q$; если $j \in \{1, 2, 3\}$, то $K^j = \{x \in \mathbb{R}^3\colon \forall i \neq j\ |x_i| \leq 1/2\}$; $K = K^1 \cup K^2 \cup K^3$.

Положим $\Omega = 2Q$ и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$

$$Z_s = \{z \in \Omega\colon sz_i - 1/2 \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, 3\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что $\forall s \in \mathbb{N}\ \ Z_s \neq \varnothing$ и справедливы предложения

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \bigcup_{z \in Z_s} \overline{Q_s(z)} = \overline{\Omega},$$

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \forall z, y \in Z_s, \quad z \neq y, \quad Q_s(z) \cap Q_s(y) = \varnothing.$$

Пусть еще $0 < \alpha < \beta < 1$ и для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\Omega_s^{(1)} = \operatorname{int} \bigcup_{z \in Z_s} (z + s^{-1}(\alpha K \cap \overline{Q})), \qquad \Omega_s^{(2)} = \Omega \setminus \bigcup_{z \in Z_s} (z + s^{-1}(\beta K \cap \overline{Q})).$$

Множества $\Omega_s^{(1)}, \Omega_s^{(2)}$ являются областями в $\mathbb{R}^3$, имеющими периодическую структуру каркасного типа. Определим множества, с помощью которых соединим эти области. Пусть

$$\delta > 1, \quad 0 < \rho < \min\left(\alpha, \frac{1-\beta}{2}\right), \quad \frac{1}{2}(\beta + \rho) < \gamma < \frac{1}{2}(1 - \rho).$$

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\Lambda_s^1 = \{x \in \mathbb{R}^3\colon\ \alpha/2 \leq x_1 \leq \beta/2,\ |x_2| < \rho s^{1-\delta}/2,\ |x_3 - \gamma| < \rho s^{1-\delta}/2\},$$

$$\Lambda_s^2 = \{x \in \mathbb{R}^3\colon\ |x_1 - \gamma| < \rho s^{1-\delta}/2,\ \alpha/2 \leq x_2 \leq \beta/2,\ |x_3| < \rho s^{1-\delta}/2\},$$

$$\Lambda_s^3 = \{x \in \mathbb{R}^3\colon\ |x_1| < \rho s^{1-\delta}/2,\ |x_2 - \gamma| < \rho s^{1-\delta}/2,\ \alpha/2 \leq x_3 \leq \beta/2\},$$

$$\Lambda_s = \Lambda_s^1 \cup \Lambda_s^2 \cup \Lambda_s^3, \quad H_s = \bigcup_{z \in Z_s} (z + s^{-1}\Lambda_s).$$

Множества H_s представляют собой объединения каналов (параллелепипедов) $z + s^{-1} \Lambda_s^i$ $(z \in Z_s,\ i = 1, 2, 3)$, соединяющих области $\Omega_s^{(1)}$ и $\Omega_s^{(2)}$. Положим теперь для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\Omega_s = \Omega_s^{(1)} \cup H_s \cup \Omega_s^{(2)}. \tag{1}$$

Множества Ω_s являются областями в $\mathbb{R}^3$, содержащимися в Ω. Отметим ряд свойств структурных составляющих этих областей.

Прежде всего заметим, что для любого $m > 1$ существуют последовательности линейных непрерывных отображений продолжения $p_s^{(1)}: W^{1,m}(\Omega_s^{(1)}) \to \to W^{1,m}(\Omega)$, $p_s^{(2)}: W^{1,m}(\Omega_s^{(2)}) \to W^{1,m}(\Omega)$ такие, что $\sup\limits_s \| p_s^{(l)} \| < \infty$, $l = 1, 2$. Доказательство этого факта проводится с использованием рассуждений, аналогичных изложенным в доказательстве лемм 2.2 и 2.3 из [1].

В силу определения областей $\Omega_s^{(1)}$, $\Omega_s^{(2)}$ для любого открытого множества $E \subset \Omega$

$$\lim_{s\to\infty} \operatorname{mes} (E \cap \Omega_s^{(1)}) = \kappa_1 \operatorname{mes} E, \quad \lim_{s\to\infty} \operatorname{mes} (E \cap \Omega_s^{(2)}) = \kappa_2 \operatorname{mes} E, \tag{2}$$

где $\kappa_1 = 3\alpha^2 - 2\alpha^3$, $\kappa_2 = 1 - 3\beta^2 + 2\beta^3$.

Из (2) вытекает, что для любой функции $u \in L^1(\Omega)$

$$\lim_{s\to\infty} \int\limits_{\Omega_s^{(1)}} u\,dx = \kappa_1 \int\limits_{\Omega} u\,dx, \quad \lim_{s\to\infty} \int\limits_{\Omega_s^{(2)}} u\,dx = \kappa_2 \int\limits_{\Omega} u\,dx. \tag{3}$$

Наконец, заметим, что в силу определения множеств H_s для любого $s \in \mathbb{N}$ $\operatorname{mes} H_s \le 3s^{2(1-\delta)}$ и, следовательно,

$$\lim_{s\to\infty} \operatorname{mes} H_s = 0. \tag{4}$$

2. Определения и примеры. Зафиксируем $m > 1$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ через q_s будем обозначать отображение сужения из $W^{1,m}(\Omega)$ в $W^{1,m}(\Omega_s)$. Положим еще $W = (W^{1,m}(\Omega))^2$. Норму элемента $u \in W$ определим по формуле

$$\| u \|_W = \| u^{(1)} \|_{W^{1,m}(\Omega)} + \| u^{(2)} \|_{W^{1,m}(\Omega)}.$$

Определение 1. *Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$, $u \in W$. Будем говорить, что последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u, если*

$$\sup_s \| u_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} < \infty, \tag{5}$$

$$\lim_{s\to\infty} \int\limits_{\Omega_s^{(1)}} | u_s - q_s u^{(1)} |^m dx = 0, \quad \lim_{s\to\infty} \int\limits_{\Omega_s^{(2)}} | u_s - q_s u^{(2)} |^m dx = 0. \tag{6}$$

***Пример* 1.** Пусть $u \in W$, причем $u^{(1)} = u^{(2)} = v$. Тогда последовательность $\{q_s v\}$ слабо сходится к u.

Определение 2. *Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, $f \in W^*$. Будем говорить, что последовательность $\{ f_s \}$ сильно сходится к f, если из того,* *что* $u \in W$, *для любого* $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ *и последовательность* $\{u_s\}$ *слабо сходится к* u, *вытекает, что*

$$\lim_{s\to\infty} \langle f_s, u_s \rangle = \langle f, u \rangle.$$

Пример 2. Пусть f_s и f — функционалы соответственно из пространств $(W^{1,m}(\Omega_s))^*$, W^*, определенные по формулам

$$\langle f_s, u \rangle = \int\limits_{\Omega_s} u\, dx, \quad \langle f, u \rangle = \int\limits_{\Omega} (\kappa_1 u^{(1)} + \kappa_2 u^{(2)})\, dx.$$

Тогда последовательность $\{f_s\}$ сильно сходится к f. Это легко проверить, используя равенства (3), (4).

Заметим, что для каждого $f \in W^*$ найдется последовательность $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, сильно сходящаяся к f. Это доказывается с помощью отображений $p_s^{(1)}, p_s^{(2)}$ из п. 1 и равенств (3).

Определение 3. *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ A_s — *обратимый оператор из* $W^{1,m}(\Omega_s)$ в $(W^{1,m}(\Omega_s))^*$, A — *обратимый оператор из* W в W^*. *Будем говорить, что последовательность* $\{A_s\}$ G*-сходится к оператору* A, *если из того, что* $f \in W^*$, *для любого* $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ *и последовательность* $\{f_s\}$ *сильно сходится к* f, *вытекает, что последовательность* $\{A_s^{-1} f_s\}$ *слабо сходится к* $A^{-1} f$.

Ясно, что установление G-сходимости последовательности операторов A_s: $W^{1,m}(\Omega_s) \to (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ дает ответ на вопрос о сходимости обобщенных решений задач Неймана для соответствующих этим операторам уравнений в областях Ω_s.

3. Операторы A_s и некоторые их свойства. Пусть $m' = m/(m-1)$, $1 < m_1 \le m$, $m_2 \ge m$, $c \ge 1$, и пусть для любого $i \in \{1, 2, 3\}$ a_i — каратеодориевская функция на $\Omega \times \mathbb{R}^3$, причем для любых $x \in \Omega$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^3$

$$\sum_{i=1}^{3} |a_i(x, \eta - \eta_i e^i)| = 0, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{3} |a_i(x,\eta) - a_i(x,\eta')|^{m'} \le c\,(1 + |\eta| + |\eta'|)^{m-m_1} |\eta - \eta'|^{m_1}, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{3} (a_i(x,\eta) - a_i(x,\eta'))(\eta_i - \eta_i') \ge c^{-1} (1 + |\eta| + |\eta'|)^{m-m_2} |\eta - \eta'|^{m_2}. \tag{9}$$

Пусть еще $h \in L^m(\Omega)$, $h \ge 0$, и a_0 — каратеодориевская функция на $\Omega \times \mathbb{R}$ такая, что $a_0(\cdot, 0) \in L^{m'}(\Omega)$ и для любых $x \in \Omega$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$, $\xi \ne \xi'$,

$$|a_0(x,\xi) - a_0(x,\xi')|^{m'} \le c\,(h(x) + |\xi| + |\xi'|)^{m-m_1} |\xi - \xi'|^{m_1}, \tag{10}$$

$$a_0(x,\xi)\,\xi \ge c^{-1} |\xi|^m - h^m(x), \tag{11}$$

$$(a_0(x,\xi) - a_0(x,\xi'))(\xi - \xi') > 0. \tag{12}$$

Определим операторы A_s следующим образом: если $s \in \mathbb{N}$, то A_s — оператор из $W^{1,m}(\Omega_s)$ в $(W^{1,m}(\Omega_s))^*$ такой, что для любых $u, v \in W^{1,m}(\Omega_s)$

$$\langle A_s u, v\rangle = \int_{\Omega_s} \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i(x, \nabla u)\, \partial_i v + a_0(x, u)\, v \right\} dx.$$

Из условий на функции a_i, $i = 0, 1, 2, 3$, вытекает, что операторы A_s обратимы [2]. Приведем другие полезные в дальнейшем следствия из этих условий. Через c_i, $i = 1, 2, \ldots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от $\alpha, \beta, m, m_2\, c$, $\| h \|_{L^m(\Omega)}$, $\| a_0(\cdot, 0) \|_{L^{m'}(\Omega)}$. Из (7), (9) и (11) выводим, что для $s \in \mathbb{N}$ и $f \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$

$$\| A_s^{-1} f \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \le c_1 (1 + \| f \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*})^{1/(m-1)}. \tag{13}$$

Используя (9), для $s \in \mathbb{N}$, u, $v \in W^{1,m}(\Omega_s)$ получаем

$$\langle A_s u - A_s v,\ u - v\rangle \ge c_2 (1 + \| \nabla u \|_{L^m(\Omega_s)} + \| \nabla v \|_{L^m(\Omega_s)})^{m - m_2} \| \nabla u - \nabla v \|^{m_2}_{L^m(\Omega_s)}. \tag{14}$$

Далее относительно функций a_i, $i = 1, 2, 3$, будем предполагать выполненными следующие дополнительные условия:

1) для любых x, $x' \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^3$

$$\sum_{i=1}^{3} | a_i(x, \eta) - a_i(x', \eta) | \le \mu(| x - x' |)(1 + | \eta |)^{m-1},$$

где μ — неубывающая непрерывная в нуле функция на $[0, \infty)$, $\mu(0) = 0$;

2) для любых $i \in \{1, 2, 3\}$, $x \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^3$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{1-m} a_i(x, \lambda\eta) = b_i(x, \eta),$$

где b_i, $i = 1, 2, 3$ — некоторые функции на $\Omega \times \mathbb{R}^3$.

Из условий 1, 2 и (7) – (9) вытекает, что для любых x, $x' \in \Omega$, η, $\eta' \in \mathbb{R}^3$ $b_i(x, 0) = 0$,

$$\sum_{i=1}^{3} | b_i(x, \eta) - b_i(x', \eta) | \le \mu(| x - x' |) | \eta |^{m-1}, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{3} | b_i(x, \eta) - b_i(x, \eta') |^{m'} \le c(| \eta | + | \eta' |)^{m - m_1} | \eta - \eta' |^{m_1}, \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{3} (b_i(x, \eta) - b_i(x, \eta'))(\eta_i - \eta_i') \ge 0. \tag{17}$$

При определенном соотношении между числами δ и m ниже будет установлено, что последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к некоторому оператору A: $W \to W^*$, коэффициенты которого определяются специальным образом через функции a_i, $i = 0, 1, 2, 3$, и b_i, $i = 1, 2, 3$. Точное описание этого оператора дадим в следующем пункте.

4. Оператор A и его свойства. Пусть

$$\Pi^1 = \operatorname{int}(\alpha K \cap Q), \quad \Pi^2 = Q \setminus \beta K,$$

для $l \in \{1, 2\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\Pi^{l,i} = \{x \in \partial\Pi^l :\ x_i = -1/2\};$$

для $l \in \{1, 2\}$ $W^{1,m}_{\text{per}}(\Pi^l)$ — замыкание в $W^{1,m}(\Pi^l)$ множества всех функций $u \in \in C^1(\overline{\Pi^l})$, удовлетворяющих условию: для любых $i \in \{1, 2, 3\}$ и $x \in \Pi^{l,i}$ $u(x) = = u(x + e^i)$.

Из результатов [2] о разрешимости уравнений с монотонными операторами вытекает, что для произвольных $l \in \{1, 2\}$ и $(y, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$ существует единственная функция $v^l_{y,\eta} \in W^{1,m}_{\text{per}}(\Pi^l)$ такая, что $\int\limits_{\Pi^l} v^l_{y,\eta}\, dx = 0$ и

$$\forall \varphi \in W^{1,m}_{\text{per}}(\Pi^l) \quad \int\limits_{\Pi^l} \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i(y, \eta + \nabla v^l_{y,\eta})\, \partial_i \varphi \right\} dx = 0. \tag{18}$$

Пусть для $l \in \{1, 2\}$ и $i \in \{1, 2, 3\}$ a^l_i — функция на $\Omega \times \mathbb{R}^3$ такая, что $\forall (y, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$

$$a^l_i(y, \eta) = \int\limits_{\Pi^l} a_i(y, \eta + \nabla v^l_{y,\eta})\, dx. \tag{19}$$

Установим некоторые свойства функций a^l_i. Положим

$$m_3 = \frac{m_1 m'}{m_2 m' - m_1}, \quad \mu_1 = \mu^{m'} + \mu^{m_1/m_2}.$$

Предложение 1. *Пусть* $l \in \{1, 2\}$, $y, y' \in \Omega$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^3$. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{3} |a^l_i(y, \eta) - a^l_i(y', \eta')|^{m'} \le c_3 \mu_1(|y - y'|)(1 + |\eta| + |\eta'|)^m +$$

$$+ c_3(1 + |\eta| + |\eta'|)^{m - m_3} |\eta - \eta'|^{m_3}, \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{3} (a^l_i(y, \eta) - a^l_i(y, \eta'))(\eta_i - \eta'_i) \ge 0. \tag{21}$$

Доказательство. Обозначим через $I_{y,\eta}$, $I_{y',\eta'}$ интегралы по Π^l соответственно от функций $|\eta + \nabla v^l_{y,\eta}|^m$ и $|\eta' + \nabla v^l_{y',\eta'}|^m$, а через I интеграл по Π^l от функции $|\eta - \eta' + \nabla v^l_{y,\eta} - \nabla v^l_{y',\eta'}|^m$. В силу (18) имеем

$$\int\limits_{\Pi^l} \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i(y, \eta + \nabla v^l_{y,\eta})(\eta_i + \partial_i v^l_{y,\eta}) \right\} dx = \int\limits_{\Pi^l} \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i(y, \eta + \nabla v^l_{y,\eta})\, \eta_i \right\} dx.$$

Из этого равенства, оценивая его левую часть с помощью (7), (9), а правую часть с помощью неравенства Гельдера и (7), (8), выводим

$$I_{y,\eta} \le 1 + c_4|\eta| + c_4|\eta| I^{(m-1)/m}_{y,\eta}.$$

Отсюда, используя неравенство Юнга, получаем

$$I_{y,\eta} \le c_5(1 + |\eta|)^m. \tag{22}$$

Аналогично имеем

$$I_{y',\eta'} \le c_5(1 + |\eta'|)^m. \tag{23}$$

Далее, в силу (18)

$$\int\limits_{\Pi^l} \left\{ \sum_{i=1}^{3} (a_i(y, \eta + \nabla v^{\,l}_{y,\eta}) - a_i(y, \eta' + \nabla v^{\,l}_{y',\eta'}))(\eta_i - \eta_i' + \partial_i v^l_{y,\eta} - \partial_i v^l_{y',\eta'}) \right\} dx =$$

$$= \int\limits_{\Pi^l} \left\{ \sum_{i=1}^{3} (a_i(y, \eta + \nabla v^{\,l}_{y,\eta}) - a_i(y, \eta' + \nabla v^{\,l}_{y',\eta'}))(\eta_i - \eta_i') \right\} dx +$$

$$+ \int\limits_{\Pi^l} \left\{ \sum_{i=1}^{3} (a_i(y', \eta' + \nabla v^{\,l}_{y',\eta'}) - a_i(y, \eta' + \nabla v^{\,l}_{y',\eta'}))(\partial_i v^l_{y,\eta} - \partial_i v^l_{y',\eta'}) \right\} dx.$$

Оценивая левую часть этого равенства с помощью (9) и неравенства Гельдера, а правую часть с помощью (8), условия 1 и неравенств (22), (23), получаем

$$I \le c_6 |\eta - \eta'|^{m/m_2} h^{m - m\theta} I^{\tau} + c_6 \mu^{m/m_2}(|y - y'|) h^m, \tag{24}$$

где

$$\tau = \frac{m_1}{m_2 m'}, \quad \theta = \tau + \frac{1}{m_2}, \quad h = 1 + |\eta| + |\eta'|.$$

Из (24), используя неравенство Юнга, выводим

$$I \le c_7 |\eta - \eta'|^{m m_3 / m_1} h^{m - m m_3 / m_1} + c_7 \mu^{m/m_2}(|y - y'|) h^m. \tag{25}$$

Заметим теперь, что в силу (19), условия 1, (8) и (22), (23)

$$\sum_{i=1}^{3} |a_i^l(y, \eta) - a_i^l(y', \eta')|^{m'} \le c_8 \mu^{m'}(|y - y'|) h^m + c_8 h^{m - m_1} I^{m_1/m}.$$

Отсюда и из (25) получаем (20).

Далее, в силу (19) и (18)

$$\sum_{i=1}^{3} (a_i^l(y, \eta) - a_i^l(y, \eta'))(\eta_i - \eta_i') =$$

$$= \int\limits_{\Pi^l} \left\{ \sum_{i=1}^{3} (a_i^l(y, \eta + \nabla v^{\,l}_{y,\eta}) - a_i(y, \eta' + \nabla v^{\,l}_{y,\eta'}))(\eta_i + \partial_i v^l_{y,\eta} - \eta_i' - \partial_i v^l_{y,\eta'}) \right\} dx.$$

Отсюда и из (9) вытекает неравенство (21). Предложение доказано.

Отметим еще, что в силу (7) для любых $l \in \{1, 2\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ и $y \in \Omega$ имеем $a_i^l(y, 0) = 0$. Определим теперь операторы A^l, B, A. Если $l \in \{1, 2\}$, то A^l — оператор из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$ такой, что для любых $u, v \in W^{1,m}(\Omega)$

$$\langle A^l u, v \rangle = \int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i^l(x, \nabla u) \partial_i v + \kappa_l a_0(x, u) v \right\} dx;$$

B — оператор из W в W^* такой, что для любых $u, v \in W$

$$\langle Bu, v \rangle = \rho^2 \left(\frac{2}{\beta - \alpha} \right)^{m-1} \int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{3} b_i(x, (u^{(2)} - u^{(1)}) e^i) \right\} (v^{(2)} - v^{(1)}) \, dx;$$

A — оператор из W в W^* такой, что для любых $u, v \in W$

$$\langle Au, v \rangle = \langle A^1 u^{(1)}, v^{(1)} \rangle + \langle A^2 u^{(2)}, v^{(2)} \rangle + \langle Bu, v \rangle.$$

В силу (12), (17) и (21) оператор A строго монотонен на W. А в силу (10),

(16) и (20) для любых $u, v \in W$

$$\| Au - Av \|_{W^*}^{m'} \leq c_9 (1 + \| u \|_W + \| v \|_W)^{m - m_3} \| u - v \|_W^{m_3}. \tag{26}$$

5. Вспомогательные результаты. Далее будем считать, что числа δ и m связаны соотношением

$$\delta - \frac{m}{2} = 1. \tag{27}$$

Введем функции χ_s. Если $s \in \mathbb{N}$, то χ_s — функция на Ω_s такая, что $\chi_s = 0$ на $\Omega_s^{(1)}$, $\chi_s = 1$ на $\Omega_s^{(2)}$,

$$\chi_s(x) = \frac{2s}{\beta - \alpha}\left(x_i - z_i - \frac{\alpha}{2s} \right),$$

для $x \in z + s^{-1}\Lambda'_s$, $z \in Z_s$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Нетрудно убедиться в том, что $\forall\, s \in \mathbb{N}$ $\chi_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$, $0 \leq \chi_s \leq 1$, $|\nabla \chi_s| \leq 2s/(\beta - \alpha)$ на Ω_s.

Предложение 2. *Для любого* $u \in W$ *существует последовательность* $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$, *слабо сходящаяся к* u *и такая, что*

$$\overline{\lim_{s \to \infty}} \| u_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \leq \frac{6}{\beta - \alpha} \| u \|_W. \tag{28}$$

Доказательство. Если $u \in W$, причем $u^{(1)}, u^{(2)} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, то в силу (27) последовательность $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$, определяемая формулой

$$u_s = (1 - \chi_s) q_s u^{(1)} + \chi_s q_s u^{(2)},$$

слабо сходится к u и удовлетворяет неравенству (28). Используя этот факт, несложно построить последовательность с нужными свойствами для произвольного $u \in W$.

Предложение 3. *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, $f \in W^*$ *и последовательность* $\{ f_s \}$ *сильно сходится к* f. *Тогда последовательность норм* $\| f_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*}$ *ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность норм $\| f_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*}$ не ограничена. Тогда найдутся возрастающая последовательность $\{s_t\} \subset \mathbb{N}$ и последовательность $w_t \in W^{1,m}(\Omega_{s_t})$ такие, что для любого $t \in \mathbb{N}$ $\| w_t \|_{W^{1,m}(\Omega_{s_t})} \leq 1$ и

$$\langle f_s, w_t \rangle \geq t. \tag{29}$$

Пусть $p_s^{(1)}, p_s^{(2)}$ — отображения из п. 1. Без ограничения общности можно считать, что $p_{s_t}^{(1)} w_t^{(1)} \to u^{(1)}$, $p_{s_t}^{(2)} w_t^{(2)} \to u^{(2)}$ слабо в $W^{1,m}(\Omega)$ ($w_t^{(1)}, w_t^{(2)}$ — сужения w_t соответственно на $\Omega_{s_t}^{(1)}$ и $\Omega_{s_t}^{(2)}$, $u \in W$). В силу предложения 2 существует последовательность $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$, слабо сходящаяся к u. Определим последовательность $\tilde{u}_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$, полагая $\tilde{u}_s = w_t$, если $s = s_t$ при некотором t, $\tilde{u}_s = u_s$, если $s \neq s_t$ ни при каком t. Так как последовательность $\{ \tilde{u}_s \}$ слабо сходится к u, то $\langle f_s, \tilde{u}_s \rangle \to \langle f, u \rangle$. Отсюда вытекает, что и $\langle f_{s_t}, w_t \rangle \to \langle f, u \rangle$. Но это противоречит (29). Полученное противоречие доказывает ограниченность последовательности норм $\| f_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*}$.

Введем в рассмотрение ряд вспомогательных функций. Пусть для $s \in \mathbb{N}$ и $i \in \{1, 2, 3\}$ $\Lambda^i_{s,1}$ — параллелепипед в $\mathbb{R}^3$ такой, что $\Lambda^i_{s,1} \subset \Pi^1$, $\Lambda^i_{s,1}$ имеет общую грань с Λ^i_s, для $x \in \Lambda^i_{s,1}$ $0 < x_i < \alpha/2$; $\Lambda^i_{s,2}$ — параллелепипед в $\mathbb{R}^3$ такой, что $\Lambda^i_{s,2} \subset \Pi^2$, $\Lambda^i_{s,2}$ имеет общую грань с Λ^i_s, для $x \in \Lambda^i_{s,2}$ $\beta/2 < x_i < 1/2$. Положим для любого $s \in \mathbb{N}$ $P_s^1 = \bigcup_{i=1}^3 \Lambda^i_{s,1}$, $P_s^2 = \bigcup_{i=1}^3 \Lambda^i_{s,2}$. Ясно, что $P_s^l \subset \Pi^l$ и $\operatorname{mes} P_s^l \le s^{-m}$, $l = 1, 2$.

Положим еще для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\Pi_s = \Pi^1 \cup \Lambda_s \cup \Pi^2.$$

Можно показать, что для любых $y \in \Omega$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^3$, $s \in \mathbb{N}$ существует функция $v_{y,\eta,\eta',s} \in W^{1,m}(\Pi_s)$ такая, что $v_{y,\eta,\eta',s}(x) = v^1_{y,\eta}(x)$, если $x \in \Pi^1$, $v_{y,\eta,\eta',s}(x) = v^2_{y,\eta'}(x)$, если $x \in \Pi^2$;

$$\int_{\Lambda_s} \{ | v_{y,\eta,\eta',s} |^m + | \nabla v_{y,\eta,\eta',s} |^m \} dx \le$$

$$\le c_{10} \int_{P_s^1} \{ | v^1_{y,\eta} |^m + | \nabla v^1_{y,\eta} |^m \} dx + c_{10} \int_{P_s^2} \{ | v^2_{y,\eta'} |^m + | \nabla v^2_{y,\eta'} |^m \} dx. \quad (30)$$

Пусть теперь для $y \in \Omega$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^3$, $s \in \mathbb{N}$ $V_s[y, \eta, \eta']$ — функция на Ω_s такая, что

$$V_s[y, \eta, \eta'](x) = s^{-1} v_{y,\eta,\eta',s}(s(x - z)),$$

если $x \in z + s^{-1}\Pi_s$, $z \in Z_s$. В силу свойств функции $v_{y,\eta,\eta',s}$ имеем

$$V_s[y, \eta, \eta'] \in W^{1,m}(\Omega_s).$$

Зафиксируем для произвольных $t \in \mathbb{N}$ и $y \in Z_t$ функцию $\varphi_{t,y} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ такую, что $0 \le \varphi_{t,y} \le 1$ на Ω, $\varphi_{t,y} = 1$ на $Q_{t+1}(y)$, $\varphi_{t,y} = 0$ на $\Omega \setminus Q_t(y)$, $|\nabla \varphi_{t,y}| \le c_0 t^2$ на Ω.

Для $w \in W$ такого, что $w^{(1)}, w^{(2)} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, и $t, s \in \mathbb{N}$ положим

$$\psi_{w,t,s} = \sum_{y \in Z_t} V_s[y, \nabla w^{(1)}(y), \nabla w^{(2)}(y)] \varphi_{t,y}$$

Лемма 1. *Пусть* $w \in W$, *причем* $w^{(1)}, w^{(2)} \in C^\infty(\overline{\Omega})$. *Тогда*

а) *для любого* $t \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{s \to \infty} \| \psi_{w,t,s} \|_{L^m(\Omega_s)} = 0$;

б) *для любого* $t \in \mathbb{N}$, $t \ge t(w)$,

$$\overline{\lim_{s \to \infty}} \| \psi_{w,t,s} \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \le c_{11}(1 + \| w \|_W).$$

Доказательство леммы основано на использовании неравенств (22) и (30).

Теперь для $w \in W$ такого, что $w^{(1)}, w^{(2)} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, и $t, s \in \mathbb{N}$ положим

$$\tilde{\psi}_{w,t,s} = (1 - \chi_s) q_s w^{(1)} + \chi_s q_s w^{(2)} + \psi_{w,t,s}.$$

Лемма 2. *Пусть* $w \in W$, *причем* $w^{(1)}, w^{(2)} \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$. *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ $g_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$, *причем последовательность* $\{g_s\}$ *слабо сходится к* w. *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty}\overline{\lim_{s\to\infty}}\,|\langle A_s\tilde{\psi}_{w,t,s},\ g_s-\tilde{\psi}_{w,t,s}\rangle| = 0.$$

Лемма 3. *Пусть* $w, v \in W$, *причем* $w^{(1)}, w^{(2)}, v^{(1)}, v^{(2)} \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$. *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ $v_s = (1-\chi_s)q_s v^{(1)} + \chi_s q_s v^{(2)}$. *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty}\overline{\lim_{s\to\infty}}\,|\langle A_s\tilde{\psi}_{w,t,s},\ v_s\rangle - \langle Aw, v\rangle| = 0.$$

При доказательстве лемм 2 и 3 используются соотношения (3), (4), (7), (8), (10), (15), (18) – (20), (27), (30), условия 1, 2 и лемма 1.

6. Основной результат.

Теорема. *Оператор* A *обратим и последовательность* $\{A_s\}$ G*-сходится к оператору* A.

Доказательство. Пусть $f \in W^*$, для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ и последовательность $\{f_s\}$ сильно сходится к f. Положим для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s = A_s^{-1}f_s$. В силу (13) и предложения 3 последовательность $\{u_s\}$ удовлетворяет неравенству (5). Через k_0 обозначим какую-нибудь мажоранту последовательности чисел $1 + \|f_s\|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} + \|u_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}$.

Используя отображения $p_s^{(1)}, p_s^{(2)}$ из п. 1, устанавливаем: существуют возрастающая последовательность $\{s_i\} \subset \mathbb{N}$ и $u \in W$ такие, что

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\Omega_{s_i}^{(l)}} |u_{s_i} - q_{s_i}u^{(l)}|^m dx = 0, \quad l = 1, 2. \tag{31}$$

Покажем, что $Au = f$. Пусть $\tilde{v}$ — произвольный элемент из W. Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$ и возьмем $w, v \in W$ такие, что $w^{(1)}, w^{(2)}, v^{(1)}, v^{(2)} \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$,

$$\|w-u\|_W \le \frac{\beta-\alpha}{12k}, \tag{32}$$

$$\|v-\tilde{v}\|_W \le 1/k, \tag{33}$$

$$|\langle Aw, v\rangle - \langle Au, \tilde{v}\rangle| + |\langle f, v-\tilde{v}\rangle| \le 1/k. \tag{34}$$

Это возможно ввиду плотности $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ в $W^{1,m}(\Omega)$ и (26). В силу предложения 2 и (32) существует последовательность $h_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$, слабо сходящаяся к $u - w$ и такая, что

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\,\|h_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \le 1/2k. \tag{35}$$

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$ $v_s = (1-\chi_s)q_s v^{(1)} + \chi_s q_s v^{(2)}$. В силу (27) и (33)

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\,\|v_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \le \frac{6}{\beta-\alpha}(1 + \|\tilde{v}\|_W). \tag{36}$$

Кроме того,

$$\lim_{s\to\infty}\langle f_s, v_s\rangle = \langle f, v\rangle. \tag{37}$$

Это равенство является следствием сильной сходимости $\{f_s\}$ к f и слабой сходимости $\{v_s\}$ к v.

Из лемм 1 – 3, (4), (5), (27), (31), (32), (35) – (37), сильной сходимости $\{f_s\}$ к f и слабой сходимости $\{h_s\}$ к $u - w$ вытекает, что найдутся $t, s \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\| \psi_{w,t,s} \|_{L^m(\Omega_s)} \le 1/k, \tag{38}$$

$$\| \tilde{\psi}_{w,t,s} \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \le c_{12}(1 + \| u \|_W), \tag{39}$$

$$| \langle A_s \tilde{\psi}_{w,t,s} - f_s,\ u_s - h_s - \tilde{\psi}_{w,t,s} \rangle | \le 1/k, \tag{40}$$

$$| \langle A_s \tilde{\psi}_{w,t,s},\ v_s \rangle - \langle Aw, v \rangle | \le 1/k, \tag{41}$$

$$\| h_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \le 1/k, \tag{42}$$

$$\| v_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} \le 12/(\beta - \alpha)(1 + \| \tilde{v} \|_W), \tag{43}$$

$$| \langle f_s, v_s \rangle - \langle f, v \rangle | \le 1/k, \tag{44}$$

$$\sum_{l=1}^{2} \int_{\Omega_s^{(l)}} | u_s - q_s u^{(l)} |^m dx + \int_{H_s} (| v^{(1)} | + | v^{(2)} |)^m dx \le 1/k^m. \tag{45}$$

Заметим, что в силу (7), (8), (10) и (39)

$$\| A_s \tilde{\psi}_{w,t,s} \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} \le c_{13}(1 + \| u \|_W)^{m-1}.$$

Используя это неравенство и неравенства (40), (42), получаем

$$\langle A_s u_s - A_s \tilde{\psi}_{w,t,s},\ u_s - \tilde{\psi}_{w,t,s} \rangle = \langle f_s - A_s \tilde{\psi}_{w,t,s},\ u_s - h_s - \tilde{\psi}_{w,t,s} \rangle +$$

$$+ \langle f_s - A_s \tilde{\psi}_{w,t,s},\ h_s \rangle \le c_{14} k_0 k^{-1} (1 + \| u \|_W)^{m-1}.$$

Отсюда, а также из неравенства (14), примененного к u_s, $\tilde{\psi}_{w,t,s}$, и (39) выводим

$$\| \nabla u_s - \nabla \tilde{\psi}_{w,t,s} \|_{L^m(\Omega_s)} \le c_{15} k_0 k^{-1/m_2} (1 + \| u \|_W). \tag{46}$$

Положим

$$\sigma = | \langle A_s u_s - A_s \tilde{\psi}_{w,t,s}, v_s \rangle |$$

и получим для σ оценку сверху. Используя неравенства (8), (39), (43), (46), находим

$$\sigma \le c_{16} k_0^m k^{-\tau} (1 + \| u \|_W + \| \tilde{v} \|_W)^m + \sigma_1, \tag{47}$$

где

$$\tau = \frac{m_1}{m_2 m'}, \quad \sigma_1 = \int_{\Omega_s} | a_0(x, u_s) - a_0(x, \tilde{\psi}_{w,t,s}) | \, | v_s | \, dx.$$

Ясно, что

$$\sigma_1 \le \sum_{l=1}^{2} \int_{\Omega_s^{(l)}} | a_0(x, u_s) - a_0(x, q_s w^{(l)} + \psi_{w,t,s}) | \, | v_s | \, dx +$$

$$+ \int_{H_s} | a_0(x, u_s) - a_0(x, \tilde{\psi}_{w,t,s}) | \, | v_s | \, dx.$$

Оценивая интегралы в правой части этого неравенства с помощью (10), (32), (38), (39), (43), (45), получаем

$$\sigma_1 \le c_{17} k_0^m k^{-\tau} (1 + \| u \|_W + \| \tilde{v} \|_W)^m. \tag{48}$$

Отсюда и из (47) вытекает оценка σ через k.

Далее, в силу (34)

$$| \langle Au, \tilde{v} \rangle - \langle f, \tilde{v} \rangle | \le | \langle Aw, v \rangle - \langle f, v \rangle | + 1/k, \tag{49}$$

а в силу (41), (44)

$$| \langle Aw, v \rangle - \langle f, v \rangle | \le \sigma + 2/k. \tag{50}$$

Из неравенств (49), (50), (47), (48) выводим

$$| \langle Au, \tilde{v} \rangle - \langle f, \tilde{v} \rangle | \le c_{18} k_0^m k^{-\tau} (1 + \| u \|_W + \| \tilde{v} \|_W)^m.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получаем $\langle Au, \tilde{v} \rangle = \langle f, \tilde{v} \rangle$. Отсюда ввиду произвольности $\tilde{v}$ заключаем, что $Au = f$.

Полученный результат, (5) и свойство строгой монотонности оператора A позволяют установить, что последовательность $\{u_s\}$ удовлетворяет равенствам (6). Теперь ясно, что последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u.

Итак, из того, что $f \in W^*$, для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ и последовательность $\{f_s\}$ сильно сходится к f, получили: существует $u \in W$ такое, что $Au = f$ и последовательность $\{A_s^{-1} f_s\}$ слабо сходится к u. Установленный факт с учетом строгой монотонности оператора A приводит к выводу об обратимости оператора A и G-сходимости последовательности $\{A_s\}$ к этому оператору. Теорема доказана.

В заключение отметим, что последовательность пространств $W^{1,m}(\Omega_s)$ слабо связана с пространством $W^{1,m}(\Omega)$, т. е. не существует последовательности линейных непрерывных отображений продолжения $p_s : W^{1,m}(\Omega_s) \to W^{1,m}(\Omega)$, для которой $\sup_s \| p_s \| < \infty$. Это легко установить, используя (27) и (3). Пространства $W^{1,m}(\Omega_s)$ являются модельным примером банаховых пространств W_s, для которых в [3] рассмотрены общие вопросы G-сходимости операторов, действующих из W_s в W_s^*. Для интегральных функционалов, определенных на слабо связанных пространствах $W^{1,m}(\mathfrak{D}_s)$, где $\mathfrak{D}_s$ — области аналогичного (1) вида, но не обязательно с периодической структурой, сходимость решений вариационных задач Неймана изучалась в [4–6]. G-сходимость операторов задачи Неймана, определенных на не слабо связанных пространствах, подробно исследована в [1].

1. *Ковалевский А. А.* G-сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов с различными областями определения. – Донецк, 1990. – 60 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т прикл. математики и механики; 90.01)
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– М.: Мир, 1972.– 587 с.
3. *Ковалевский А. А.* G-сходимость абстрактных операторов, определенных на слабо связанных пространствах // Докл. АН УССР. – 1991. – № 9. – С. 27 – 30.
4. *Хруслов Е. Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сб. – 1978. – **106**, № 4. – С. 604 – 621.
5. *Хруслов Е. Я.* О сходимости решений второй краевой задачи в слабо связанных областях // Теория операторов в функцион. пространствах и ее прил.– Киев: Наук. думка, 1981.– С. 129 – 173.
6. *Панкратов Л. С.* О сходимости решений вариационных задач в слабо связанных областях. – Харьков, 1988. – 25 с. – (Препринт / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низких температур; 53-88).

Получено 16.04.93