УДК 517.947

**В. П. Бурский,** канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

# О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

The elliptic systems of two second-order equations, which can be written as a single equation with complex coefficients and a homogeneous operator, are studied. The necessary and sufficient conditions for the connection of traces of the solution are obtained for an arbitrary bounded region with a smooth boundary. These conditions are formulated in terms of a certain moment problem on the boundary of the region; they are applied to the study boundary-value problems. In particular, it is shown that the Dirichlet and Neumann problems are solvable only together. The above-mentioned moment problem is solved, together with the Dirichlet problem and the Neumann problem, in the case where the region is a disk. The third boundary-value problem on a disk is also investigated.

Вивчаються еліптичні системи двох рівнянь другого порядку, які можна записати у вигляді одного рівняння з комплексними коефіцієнтами та однорідним оператором. У довільній обмеженій області з гладкою межею одержані необхідні та достатні умови зв'язку слідів розв'язку, які записані у вигляді однієї проблеми моментів на межі області і застосовуються до вивчення крайових задач. Показано, зокрема, що задачі Діріхле і Неймана лише одночасно розв'язуються. У випадку кола розв'язується сформульована проблема моментів, а з нею і задачі Діріхле та Неймана. Розглянуто також третю крайову задачу в колі.

В настоящей работе изучаются граничные задачи для эллиптических систем двух уравнений второго порядка, которые можно записать в виде одного уравнения с комплексными коэффициентами. В качестве метода изучения граничных задач используется замена дифференциального уравнения в области эквивалентными условиями связи следов решения, записанными в виде одной проблемы моментов, которая изучается для случая круга. Рассмотрен случай простых (комплексных) характеристик, имеющих угол наклона. Это соответствует тому, что корни $\lambda_1$, $\lambda_2$ характеристического уравнения различны и не равны $\pm i$. Данная работа может рассматриваться как продолжение работы [1], в которой исследована первая граничная задача. Полученные результаты исследования краевых задач для эллиптического уравнения с комплексными коэффициентами в случае вещественного угла между бихарактеристиками указывают на их почти полную идентичность с результатами в случае гиперболического уравнения, изученного в работе [2]. Если же угол между бихарактеристиками не веществен, то свойства краевых задач такие же, как и для собственно эллиптического уравнения, даже если исходное уравнение не собственно эллиптично.

**1. Теоремы о следах решения.** Пусть $\Omega$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим задачу Коши

$$Lu = a u''_{x^1x^1} + b u''_{x^1x^2} + c u''_{x^2x^2} = 0, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \psi, \quad u'_\nu|_{\partial\Omega} = \chi \tag{2}$$

в соболевском пространстве $H^m(\Omega)$, $m \ge 2$, $\psi \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $\chi \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$, коэффициенты $a, b, c \in \mathbb{C}$ — постоянны, $\nu$ — единичный вектор внешней нормали. Уравнение (1) эквивалентно системе вида

$$\begin{pmatrix} L_1 & -L_2 \\ L_2 & L_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $L_1$ и $L_2$ — однородные дифференциальные операторы второго порядка с постоянными вещественными коэффициентами, $u_1 = \operatorname{Re} u$, $u_2 = \operatorname{Im} u$. Будем предполагать, что уравнение (1) эллиптично, т. е. $l(\xi) = a\xi_1^2 + b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2 \ne 0$

при $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, что равносильно эллиптичности по Петровскому системы (3). Уравнение (1) будем также записывать в виде $\langle \nabla, a^1 \rangle \langle \nabla, a^2 \rangle u = 0$, где $a^j = (a_1^j, a_2^j)$, $j = 1, 2$, — единичные комплексные векторы; $\langle a, b \rangle = a \cdot \overline{b} = a_1 \overline{b}_1 + a_2 \overline{b}_2$.

Из работы [1] следует справедливость следующих теорем.

**Теорема 1.** *Для того чтобы задача* (1), (2) *имела решение в пространстве* $H^m(\Omega)$, *необходимо, чтобы функции*

$$P = -l(\nu(x))\psi(x) \in H^{m-1/2}(\partial\Omega),$$

$$C = l(\nu(x))\chi(x) + [b(\nu_1^2 - \nu_2^2) - 2(a-c)\nu_1\nu_2]\psi'_s + \\ + k[(a-c)(\nu_1^2 - \nu_2^2) + 2b\nu_1\nu_2]\psi \in H^{m-3/2}(\partial\Omega) \tag{4}$$

*удовлетворяли условию*

$$\forall \xi \in \Lambda \quad \int\limits_{\partial\Omega} [P(x(s))(-i\langle \nu, \overline{\xi} \rangle) + C(x)] \exp(-i\langle x, \overline{\xi} \rangle)\, ds = 0, \tag{5}$$

*где* $s$ — *натуральный параметр, возрастающий в направлении вектора*

$$\tau = (-\nu_2, \nu_1), \quad \Lambda = \{\xi \in \mathbb{C}^2 \mid l(\xi) = 0\}, \quad \frac{d}{ds} = \frac{d}{d\tau}\Big|_{\partial\Omega}, \quad k = |\nu'_s| = |\tau'_s|$$

— *кривизна кривой* $\partial\Omega$.

Интеграл в условии (5) есть по сути правая часть равенства Грина

$$\int_\Omega Lu\overline{v}\,dx - \int_\Omega uL\overline{v}\,dx = \int_{\partial\Omega} [P\overline{v}'_\nu - C\overline{v}]\,ds \tag{6}$$

при $v = \exp(i\langle x, \xi \rangle)$.

**Теорема 2.** *Пусть функции* $P \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$ *и* $C \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$, $m \geq 2$, *удовлетворяют условию* (5). *Тогда существует единственное решение* $u \in H^m(\Omega)$ *задачи* (1), (2), *граничные данные* $\psi, \chi$ *из* (2) *которого связаны с функциями* $P$ *и* $C$ *равенствами* (4).

Введем векторы $\tilde{a}^1 = (-\overline{a}_2^1, \overline{a}_1^1)$, $\tilde{a}^2 = (-\overline{a}_2^2, \overline{a}_1^2)$ — направляющие векторы бихарактеристик $\Lambda^j = \{\lambda a^j \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$, $j = 1, 2$; $\Lambda = \Lambda^1 \cup \Lambda^2$, $\langle \tilde{a}^j, a^j \rangle = 0$. Тогда условие связи (5) можно записать (см. [1]) в эквивалентном виде

$$\forall Q \in \mathbb{C}[z],\ j = 1, 2, \quad \int\limits_{\partial\Omega} [P(x)\nu\tilde{a}^j Q'(x\tilde{a}^j) + C(x)Q(x\tilde{a}^j)]\,ds = 0, \tag{7}$$

где интеграл есть правая часть равенства (6) при $v = Q(x\tilde{a}^j)$, которую, как известно, можно представить в виде $\int_{\partial\Omega} (u'_{\nu_*}\overline{v} - u\overline{v}'_{\nu_*})\,ds$ с производными по конормали

$$\frac{\partial}{\partial\nu_*} = \left(a\nu_1 + \frac{b}{2}\nu_2\right)\frac{\partial}{\partial x^1} + \left(\frac{b}{2}\nu_1 + c\nu_2\right)\frac{\partial}{\partial x^2} =$$

$$= \left(a\nu_1 + \frac{b}{2}\nu_2\right)\left(\nu_1\frac{\partial}{\partial\nu} - \nu_2\frac{\partial}{\partial\tau}\right) + \left(\frac{b}{2}\nu_1 + c\nu_2\right)\left(\nu_2\frac{\partial}{\partial\nu} + \nu_1\frac{\partial}{\partial\tau}\right) =$$

$$= l(\nu)\frac{\partial}{\partial\nu} + \left[\frac{b}{2}(\nu_1^2 - \nu_2^2) - (a-c)\nu_1\nu_2\right]\frac{\partial}{\partial\tau} = l(\nu)\frac{\partial}{\partial\nu} - \frac{1}{k}[l(\nu(s))]'_s\,\frac{\partial}{\partial\tau}.$$

Вычислим второй интегральный член при $j = 1$:

$$\int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial \nu_*} Q(x\,\tilde a^1)\,ds_x = \int\limits_{\partial\Omega} \langle \nu, a^1\rangle\langle \nu, \tilde a^1\rangle\langle \nu, a^2\rangle\, u(x(s))\, Q'(x\,\tilde a^1)\,ds\ +$$

$$+ \int\limits_{\partial\Omega} \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{2k}[l(\nu(s))]_s{}'\, u(x(s))\right\} Q(x\,\tilde a^1)\,ds =$$

$$= -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{d}{ds}\left\{\left[\nu^1 \tilde a^1 \left\langle \nu,\ a^2\right\rangle - \frac{1}{2k}(l(\nu(s)))_s{}'\right] u(x)\right\} Q(x\,\tilde a^1)\,ds.$$

При этом использовано то, что

$$\frac{d}{ds} Q(x\,\tilde a^1) = Q'(x\,\tilde a^1)(\tau\,\tilde a^1) = \langle \nu, a^1\rangle\, Q'(x\,\tilde a^1).$$

Вычислим теперь выражение в квадратных скобках:

$$\langle \nu,\ \tilde a^1\rangle\langle \nu, a^2\rangle - \frac{1}{2k}[\langle \nu, a^1\rangle\langle \nu, a^2\rangle]_s{}' = \frac{1}{2}[\langle \nu,\ \tilde a^1\rangle\langle \nu, a^2\rangle -$$

$$- \langle \nu,\ \tilde a^2\rangle\langle \nu, a^1\rangle] = \frac{1}{2}\{(-\nu_1 \overline{a}\,{}^1_2 + \nu_2 \overline{a}\,{}^1_1)(\nu_1 \overline{a}\,{}^2_1 + \nu_2 \overline{a}\,{}^2_2) -$$

$$- (-\nu_1 \overline{a}\,{}^2_2 + \nu_1 \overline{a}\,{}^2_1)(\nu_1 \overline{a}\,{}^1_1 + \nu_2 \overline{a}\,{}^1_2)\} = \frac{1}{2}[\overline{a}\,{}^1_1 \overline{a}\,{}^2_2 - \overline{a}\,{}^1_2 \overline{a}\,{}^2_1] = \frac{\overline{\Delta}}{2}.$$

Здесь через $\Delta$ обозначен определитель $\det(a^1 a^2)$, где $a^1$, $a^2$ — столбцы. Поэтому при $j = 1$ получаем равенство

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left[u'_{\nu_*} Q(x\,\tilde a^1) - u \frac{\partial}{\partial \nu_*} Q(x\,\tilde a^1)\right] ds = \int\limits_{\partial\Omega} \left[u'_{\nu_*} + \frac{\overline{\Delta}}{2} u'_\tau\right] Q(x\,\tilde a^1)\,ds.$$

Аналогично при $j = 2$ получаем

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left[u'_{\nu_*} Q(x\,\tilde a^2) - u \frac{\partial}{\partial \nu_*} Q(x\,\tilde a^2)\right] ds = \int\limits_{\partial\Omega} \left[u'_{\nu_*} - \frac{\overline{\Delta}}{2} u'_\tau\right] Q(x\,\tilde a^2)\,ds.$$

Таким образом, условие (7) эквивалентно паре условий:

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left[u'_{\nu_*} + \frac{\overline{\Delta}}{2} u'_\tau\right] Q(x\,\tilde a^1)\,ds = 0, \tag{8}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left[u'_{\nu_*} - \frac{\overline{\Delta}}{2} u'_\tau\right] Q(x\,\tilde a^2)\,ds = 0. \tag{9}$$

Итак, доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** *Пара условий* (8), (9) *эквивалентна условию* (5).

Рассмотрим задачу

$$u'_\tau\,|_{\partial\Omega} = \gamma, \tag{10}$$

$$u'_{\nu_*}\,|_{\partial\Omega} = \kappa. \tag{11}$$

Из теорем 1 – 3 получаем справедливость следующего утверждения.

**Теорема 4.** *Для того чтобы функция* $u \in H^m(\Omega)$ *при* $m \geq 2$ *была решением задачи* (10), (11) *для уравнения* (1), *необходимо и достаточно, чтобы функции* $\gamma \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$, $\kappa \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$ *удовлетворяли условию*

$$\forall\, Q \in \mathbb{C}[z],\ j = 1, 2, \quad \int\limits_{\partial\Omega} \left[\gamma - (-1)^j \frac{\overline{\Delta}}{2}\kappa\right] Q(x\,\tilde{a}^j)\, ds = 0. \tag{12}$$

При этом функция $u$ восстанавливается однозначно с точностью до аддитивной постоянной, $l(\nu)\chi = \kappa + [\,l(\nu)\,]'_s\,/2k$, $\psi = \int \gamma(s)\,ds + \mathrm{const}$ — тригонометрический интеграл Лузина (см. [3]).

***Следствие.*** *Для каждого решения* $u \in H^m(\Omega)$, $m \geq 2$, *уравнения* (1) *выполняется равенство Жуковского*

$$\int\limits_{\partial\Omega} \kappa\, ds = 0. \tag{13}$$

Доказательство следует из условия (12) при $Q \equiv 1$.

**2. Проблема моментов и краевые задачи.** Рассмотрим следующую проблему моментов:

$$\int\limits_{\partial\Omega} \alpha(s)(x(s)\,\tilde{a}^j)^N\, ds = \mu_N^j, \quad j = 1, 2, \tag{14}$$

где среди множества задач, относящихся к этой проблеме, выделим следующую ниже.

Обозначим через $M_l^j$ подпространство в $H^l(\partial\Omega)$, $l \in \mathbb{R}$, состоящее из функций $\alpha(s)$ таких, что для всех $N \in \mathbb{Z}_+$

$$\int\limits_{\partial\Omega} \alpha(x)(x\,\tilde{a}^j)^N\, ds = 0, \quad j = 1, 2. \tag{15}$$

**Определение.** *Будем говорить, что векторы* $\tilde{a}^1 \in \mathbb{C}^2$ *и* $\tilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ *имеют* $H^k$–$H^l$*-свойство на* $\partial\Omega$, $k \geq l$, *если для каждой функции* $\alpha \in H^k(\partial\Omega)$ *существуют единственные функции* $\alpha^1 \in M_l^1$, $\alpha^2 \in M_l^2$ *такие, что* $\alpha = \alpha^1 + \alpha^2 + \mathrm{const}$.

*Задача* $H^k$–$H^l$ состоит в нахождении условий на векторы $\tilde{a}^1$ и $\tilde{a}^2$, необходимых и достаточных для $H^k$–$H^l$-свойства на кривой $\partial\Omega$.

**Теорема 5.** *Пусть* $m \geq p \geq 2$. *Следующие три утверждения равносильны:*

1. *Векторы* $\tilde{a}^1$, $\tilde{a}^2$ *имеют* $H^{m-3/2}$–$H^{p-3/2}$*-свойство на* $\partial\Omega$.

2. *Задача Дирихле* $u\,|_{\partial\Omega} = \psi \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$ *для уравнения* (1) *имеет единственное решение* $u \in H^p(\partial\Omega)$.

3. *Задача Неймана* $u'_\nu\,|_{\partial\Omega} = \kappa \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$ *со свойством* (13) *имеет единственное с точностью до аддитивной постоянной решение* $u \in H^p(\partial\Omega)$.

***Доказательство.*** 1) $\Rightarrow$ 2). Функция $2\gamma = 2\,\psi'_s \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$ раскладывается и единственным образом в сумму $2\gamma = v_1 + v_2$, где $v_1 \in M^1_{p-3/2}$, $v_2 \in M^2_{p-3/2}$. Пусть $\kappa = 2\Delta^{-1}(v_1 - \gamma) \in H^{p-3/2}(\partial\Omega)$. Тогда выполняется условие (12) и согласно теореме 4 существует решение $u \in H^p(\Omega)$ задачи Дирихле.

2) $\Rightarrow$ 1). Любая функция $\gamma \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$ порождает единственное решение $u \in H^p(\Omega)$ и единственную функцию $\kappa = u'_\nu \in H^{p-3/2}(\partial\Omega)$. Тогда согласно теореме 4 функции $v_1 \in M^1_{p-3/2}$, $v_2 \in M^2_{p-3/2}$, $v_1 = \gamma + \overline{\Delta}\kappa/2$, $v_2 = \gamma - \overline{\Delta}\kappa/2$ таковы, что $2\gamma = v_1 + v_2$. Неединственность выбора пары $v_1, v_2$ влекла бы неединственность функции $\kappa$.

Импликации 1) $\Rightarrow$ 3) и 3) $\Rightarrow$ 1) доказываются аналогично.

***Замечание* 1.** Из доказательства теоремы 2 следует, что соответствие $(\psi, \chi) \to u$ непрерывно в фигурирующих там пространствах. Отсюда будет следовать непрерывность соответствия $(\gamma, \kappa) \to u$ из теоремы 4, что в свою очередь влечет непрерывность оператора $A$: $H^{m-3/2}(\partial\Omega) \to H^{p-3/2}(\partial\Omega)$, $A\kappa = \gamma$ (фактически $v_1 - v_2 \to v_1 + v_2$). Соответствующее $H^k$–$H^l$-свойство при этом заменяется усиленным $H^k$–$H^l$-свойством, которое отличается от первоначального непрерывностью „проекторов" $\alpha \to \alpha^1$, $\alpha \to \alpha^2$.

**Теорема 6.** *Пусть* $m \geq 2$. *Следующие три утверждения равносильны:*

1. *Однородная проблема моментов* (15) *имеет нетривиальное решение* $\alpha \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$.

2. *Задача Дирихле* $u|_{\partial\Omega} = 0$ *для уравнения* (1) *имеет нетривиальное решение* $u \in H^m(\Omega)$.

3. *Задача Неймана* $u'_{\nu_*}|_{\partial\Omega} = 0$ *для уравнения* (1) *имеет непостоянное решение* $u \in H^m(\Omega)$.

***Доказательство.*** 1) $\Rightarrow$ 2). По паре $\gamma = 0$, $\kappa = 2\alpha/\overline{\Delta}$ с помощью теоремы 4 строим решение $u \in H^m(\Omega)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Положим $\alpha = \kappa$ и применим теорему 4.

Импликации 1) $\Rightarrow$ 3) и 3) $\Rightarrow$ 1) аналогичны.

***Замечания.* 2.** Те же свойства, что и задача Неймана, имеет задача $B_1 u'_{\nu_*} + B_2 u'_\tau = \sigma(s)$ с постоянными $B_1$, $B_2$. Доказательство аналогично доказательствам теорем 5 и 6. Можно также считать, что $B_1$, $B_2$ — обратимые операторы блочного типа, т. е. $B_i\, \alpha^j \in M^j$, $i = 1, 2$; $j = 1, 2$.

**3.** Для случая вещественных векторов $\tilde{a}^1$ и $\tilde{a}^2$ уравнение (1) гиперболично и для задачи Коши справедливы те же теоремы 1 и 2, однако с другими показателями гладкости (см. [2, 4]). Поэтому теоремы типа 5 и 6 имеются и в гиперболическом случае. Изучение проблемы моментов (14) в этом случае может быть сведено к изучению свойств диффеоморфизма кривой $\partial\Omega$, осуществляющего характеристический биллиард и исследуемого, например, в работах [5 – 7].

**3. Случай круга.** Пусть область $\Omega = K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$ — единичный круг. Обозначим через $\lambda_1$, $\lambda_2$ корни уравнения $l(1, \lambda) = 0$. Углом наклона бихарактеристик, отвечающих корню $\lambda_j$, назовем любое решение $\varphi_j$ уравнения $\operatorname{tg} \varphi_j = \lambda_j$, $j = 1, 2$. Пусть $\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2$. Будем предполагать, что $\lambda_j \neq \pm i$, $j = 1, 2$, поскольку решение уравнения $\operatorname{tg} \varphi = \pm i$ не существует. (В исключенных случаях следует несколько видоизменить подход (см. [8]).) Нетрудно показать, что

$$\operatorname{tg}^2\varphi_0 = (b^2 - 4ac)/(a+c)^2 = [(\lambda_1 - \lambda_2)/(1 + \lambda_1\lambda_2)]^2,$$

$$\tilde{a}_1^j = -\cos\varphi_j, \quad \tilde{a}_2^j = -\sin\varphi_j.$$

Рассматривая проблему моментов (14) для $\partial K$, запишем условие (14) в виде

$$\int\limits_{\partial K} \alpha(s)\, \tilde{T}_n(-x(s)\, \tilde{a}^j)\, ds = \mu_n^j, \quad j = 1, 2; \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{16}$$

где $\tilde{T}_n$ — полином Чебышева первого рода: $\tilde{T}_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$. Заметим, что $\tilde{x}(s)\, \tilde{a}^j = -\cos(s + \varphi_j)$, $x = (\cos s, \sin s)$. Поэтому (16) можно представить в виде

$$\int\limits_{\partial K} \alpha(s) \cos n\,(s+\varphi_j)\,ds = \mu_n^j, \quad j = 1, 2. \tag{17}$$

Система функций $\{T_n, U_n\}$, где $T_n(s) = \pi^{-1/2}\cos n(s+\varphi_1)$, $U_n(s) = \pi^{-1/2}\sin n(s + \varphi_1)$, при $n \in \mathbb{N}$, $T_0(s) = (2\pi)^{-1/2}$ ортонормирована в $L_2(\partial K)$ и полна, причем $\alpha \in H^p(\partial K)$ тогда и только тогда, когда коэффициенты разложения

$$\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^T T_n(s) + \alpha_n^U U_n(s) \tag{18}$$

удовлетворяют условию [9] $\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2)\, n^{2p} < \infty$.

Из условий (17) для коэффициентов разложения (18) получаем соотношения

$$\alpha_n^T = \mu_n^1, \quad \alpha_n^U \sin n\varphi_0 = \mu_n^1 \cos n\varphi_0 - \mu_n^2. \tag{19}$$

Из последних соотношений видно, что пространство $M_l^1$ задается равенствами $\alpha_n^T = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n^U|^2 n^{2l} < \infty$, а пространство $M_l^2$ — соотношениями

$$\alpha_n^T \cos n\varphi_0 + \alpha_n^U \sin n\varphi_0 = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n^T|^2 + |\alpha_n^U|^2)\, n^{2l} < \infty.$$

Рассмотрим теперь задачу $H^k$–$H^l$ на окружности $\partial K$. Векторы $\tilde{a}^1$ и $\tilde{a}^2$ задают $\operatorname{tg}\varphi_0 = \Delta/(a+c)$. Пусть $\alpha \in H^k(\partial K)$ — произвольная функция с разложением (18). Спроектировав вектор $(\alpha_n^T, \alpha_n^U) \in \mathbb{C}^2$ на прямую $\alpha_n^T = 0$ вдоль прямой $\alpha_n^T \cos n\varphi_0 + \alpha_n^U \sin n\varphi_0 = 0$, получим вектор $(0, \alpha_n^U + \operatorname{ctg} n\varphi_0 \alpha_n^T)$. Отсюда найдем, что его прямым дополнением в $\mathbb{C}^2$ является вектор $(\alpha_n^T, -\operatorname{ctg} n\varphi_0 \alpha_n^T)$. Тогда получим

$$\alpha^1 = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^U + \operatorname{ctg} n\varphi_0\, \alpha_n^T)\, U_n(s) \in M_l^1,$$

$$\alpha^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^T T_n(s) - \alpha_n^T \operatorname{ctg} n\,\varphi_0\, U_n(s)) \in M_l^2,$$

если для угла $\varphi_0$ выполнено неравенство

$$\exists\, C > 0, \quad \forall\, n, \quad |\sin n\varphi_0| > C n^{-(k-l)}. \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что неравенство (20) эквивалентно неравенству

$$\exists\, q > 0, \quad \exists\, C_1 > 0, \quad \forall\, \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \quad \left| \frac{\varphi_0}{\pi} - \frac{m}{n} \right| > \frac{C_1}{n^q}, \tag{21}$$

где $q = k - l + 1$. Таким образом, $\alpha \in H^{l+q-1}(\partial K)$, и, следовательно, при выполнении неравенства (21) $\alpha^i \in H^l(\partial K)$, $i = 1, 2$. Доказано следующее утверждение.

**Теорема 7.** *Векторы* $\tilde{a}^1$ *и* $\tilde{a}^2$ *имеют* $H^{l+q-1}$–$H^l$*-свойство на* $\partial K$ *для любого* $l$, *если число* $\varphi_0 = \operatorname{arctg}\sqrt{b^2 - 4ac}\,/\,(a+c)$ *удовлетворяет неравенству* (21).

Заметим, что при невещественном $\varphi_0$ неравенство (20) выполняется при

$k = l$, т. е. имеется $H^k$–$H^k$-свойство, означающее разложение $H^k(\partial K) = M_k^1 \dot{+} M_k^2$ в прямую сумму.

Рассмотрим теперь вопрос о единственности решения проблемы моментов (14) на $\partial K$. Пространства $M_l^1$ и $M_l^2$ имеют непустое пересечение, если $\sin n\varphi_0 = 0$ хотя бы при одном $n$. Это означает рациональность числа $\varphi_0/\pi$. Если это так, то $\alpha_n^U$ можно выбирать любыми, поэтому доказано следующее утверждение.

**Теорема 8.** *Однородная проблема моментов* (15) *на* $\partial K$ *имеет счетное число линейно независимых нетривиальных решений в каждом пространстве* $H^k(\partial K)$, $k \in \mathbb{R}$, *тогда и только тогда, когда число* $\varphi_0$ *вещественно и* $\pi$ *рационально.*

Из теоремы Хинчина [10] (теорема 32) следует справедливость такого утверждения.

**Теорема 9.** *Для любого* $q > 2$ *множество* $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, *для которых не выполняется неравенство* (21), *имеет лебегову меру нуль, т. е. почти все вещественные* $\varphi_0$ *имеют* $H^{l+1+\varepsilon}$–$H^l$*-свойство с любым* $\varepsilon > 0$.

Из теорем 5 – 9 и замечания 2 получим сводку результатов по краевым задачам в круге $K$.

Рассмотрим краевую задачу

$$B_1 u'_{\nu_*}(s) + B_2 u'_\tau(s) = \kappa(s) \in H^{m-3/2}(\partial K) \tag{22}$$

с произвольными комплексными постоянными $B_1, B_2$, не равными нулю одновременно.

**Теорема 10.** *Пусть* $m \geq p \geq 2$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Задача* (1), (22) *в круге с условием* (13) *имеет единственное решение* $u \in H^p(K)/\{\mathrm{const}\}$, *где* $p = m$, *если* $\varphi_0$ *невещественно;* $p = m - q$, *если иррациональное* $\varphi_0/\pi$ *удовлетворяет неравенству* (21).

2. *Однородная задача* (1), (22) *имеет счетное число линейно независимых решений в каждом пространстве* $H^p(K)$, *если число* $\varphi_0/\pi$ *рационально.*

3. *Почти для каждого* $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, *для каждого* $p \geq 2$, *для каждой* $\kappa \in H^{p+1/2+\varepsilon}(\partial K)$, $\forall \varepsilon > 0$ *существует единственное непостоянное решение* $u \in H^p(K)$ *задачи* (1), (22).

***Замечания.*** **4.** Из теоремы 10 при $B_1 = 0$ непосредственно следуют результаты по задаче Дирихле, доказанные в [1].

**5.** Проекторы $\alpha \to \alpha^1$, $\alpha \to \alpha^2$ непрерывны как действующие из $H^k(\partial K)$ в $H^l(\partial K)$, поэтому в соответствии с замечанием 1 решение $u \in H^p(K)$ из п. 1 теоремы 10 задачи (1), (22) непрерывно зависит от $\kappa \in H^{m-3/2}(\partial K)$.

**4. Третья краевая задача в круге.** Рассмотрим задачу

$$(u'_{\nu_*} - gu)\big|_{\partial K} = \rho, \quad \rho \in H^k(\partial K) \tag{23}$$

для уравнения (1), где $g \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. В предыдущих обозначениях имеем равенство $\kappa(= u'_{\nu_*}) = \rho + g\psi$. Из соотношений (12) для коэффициентов разложения, аналогичных (18), при $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\gamma_0 = \kappa_0 = 0, \quad \kappa_n^T + \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma_n^T = 0,$$

$$\left(\kappa_n^T - \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma_n^T\right)\cos n\varphi_0 + \left(\kappa_n^U - \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma_n^U\right)\sin n\varphi_0 = 0,$$

откуда получаем систему

$$\rho_n^T + g\psi_n^T + \frac{\overline{\Delta}}{2}n\psi_n^U = 0, \quad -\rho_n^T \cos n\varphi_0 + \rho_n^U \sin n\varphi_0 =$$

$$= \left(g\cos n\varphi_0 + \frac{\overline{\Delta}}{2}n\sin n\varphi_0\right)\psi_n^T + \left(g\sin n\varphi_0 - \frac{\overline{\Delta}}{2}n\cos n\varphi_0\right)\psi_n^U. \qquad (24)$$

При неизвестных $\psi_n^T$ и $\psi_n^U$ имеем $\Delta_n = -\overline{\Delta}ng\cos n\varphi_0 + (g^2 - \overline{\Delta}^2n^2/4)\sin n\varphi_0$. Определитель $\Delta_n$ равен нулю тогда и только тогда, когда $g = g_n^+$ или $g = g_n^-$, где

$$g_n^{\pm} = \frac{\overline{\Delta}}{2}n\frac{\cos n\varphi_0 \pm 1}{\sin n\varphi_0} = \frac{\overline{\Delta}}{2}n\begin{cases}\operatorname{ctg}(n\varphi_0/2),\\ \operatorname{tg}(n\varphi_0/2).\end{cases}$$

Отсюда следует справедливость следующей теоремы.

**Теорема 11.** *Однородная задача* (1), (23) *имеет нетривиальное решение* $u \in H^m(K)$, $\forall\, m \geq 2$ *при тех и только тех* $g$, *которые принадлежат счетному набору* $\{g_n^{\pm}\}_{n=1}^{\infty}$.

Если предположить теперь, что числа $\Delta_n$ квалифицированно отделены от нуля как степень $n$, т. е. $|\Delta_n| > c/n^l$, то из системы (24) и $\rho \in H^k(\partial K)$ получим $\psi \in H^{k-l}(\partial K)$, откуда $\kappa \in H^{k-l}(\partial K)$, что по теореме 4 означает принадлежность $u \in H^{k-l+3/2}(K)$ при $k - l + 3/2 \geq 2$. Получаем следующий результат.

**Теорема 12.** *Пусть числа* $\varphi_0$ *и* $g$ *таковы, что* $\exists\, l > 0$, $\exists\, c > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|\Delta_n| > Cn^{-l}$, *и пусть* $\rho \in H^k(\partial K)$, $k \geq l + 1/2$. *Тогда решение задачи* (1), (23) *существует, единственно и принадлежит пространству* $H^{k-l+3/2}(K)$.

***Замечания.*** **6.** С помощью методов, изложенных в работе [11], можно показать, что лебегова мера тех пар $(\varphi_0, g) \in \mathbb{C}^2$, для которых не выполняется неравенство $|\Delta_n| > Cn^{-l}$ с большим $l$, равна нулю.

**7.** В соответствии с замечанием 1 решение $u \in H^{k-l+3/2}(K)$ из теоремы 12 непрерывно зависит от $\rho \in H^k(\partial K)$.


1. *Бурский В. П.* О решениях задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 10. – С. 1307 – 1313.
2. *Бурский В. П.* Краевые задачи для гиперболического уравнения второго порядка в круге // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 2. – С. 22 – 29.
3. *Лузин Н. Н.* Интеграл и тригонометрический ряд. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1951. – 550 с.
4. *Бурский В. П.* Теоремы о следах решения уравнения колебания струны в круге. – Киев, 1985. – 35 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.23).
5. *John F.* The Dirichlet problem for a hyperbolic equation // Amer. J. Math.– 1941. – **63**, № 1. – P. 141 – 154.
6. *Александрян Р. А.* Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа Соболева // Тр. Моск. мат. о-ва. –1960. – **9**. – С. 455 – 505.
7. *Овсепян С. Г.* Об эргодичности непрерывных автоморфизмов и о единственности решения задачи Дирихле для уравнения струны. II // Изв. АН АрмССР. – 1967. – **2**, № 3. – С. 195 – 209.
8. *Бурский В. П.* О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 3. – С. 32– 37.
9. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1974. – 296 с.
10. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1961. – 112 с.
11. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.


Получено 26.04.93