УДК 517.5

А. И. Степанец, А. С. Сердюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

We find asymptotic equalities for upper bounds of the approximations by interpolation trigonometric polynomials on the classes of convolutions of periodic functions admitting the regular continuation too a fixed strip of the complex plane.

Знайдено асимптотичні рівності для верхніх меж наближень інтерполяційними тригонометричними многочленами на класах згорток періодичних функцій, що допускають регулярне продовження у фіксовану смугу комплексної площини.

Пусть C — пространство 2π-периодических непрерывных функций φ, в котором норма задается равенством $\|\varphi\|_C = \max\limits_t |\varphi(t)|$, L_∞ — пространство 2π-периодических измеримых и существенно ограниченных функций φ с нормой $\|\varphi\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_t |\varphi(t)|$, $L = L_1$ — пространство 2π-периодических суммируемых на периоде функций с нормой

$$\|\varphi\|_L = \|\varphi\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|\, dt.$$

Пусть, далее, $f(x)$ — 2π-периодическая функция из L,

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— ее ряд Фурье, $\psi(k)$ — произвольная функция натурального аргумента и β — произвольное фиксированное действительное число ($\beta \in R$). Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right)\right)$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции φ, то эту функцию называют (см., например, [1, с. 25]) (ψ, β)-производной функции $f(x)$ и обозначают через $f_\beta^\psi(x)$ ($\varphi(x) = f_\beta^\psi(x)$). Множество функций $f(x)$, удовлетворяющих такому условию, обозначают L_β^ψ. Если $f \in L_\beta^\psi$ и в то же время $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество функций из L, то полагаем $f \in L_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Если $F_\beta^\psi(x) = f(x)$, то функцию $F(\cdot)$ естественно назвать (ψ, β)-интегралом функции $f(\cdot)$. При этом будем писать $F(x) = \mathcal{J}_\beta^\psi(f; x)$.

Положим, далее, $L_\beta^\psi \cap C = C_\beta^\psi$, $L_\beta^\psi \mathfrak{N} \cap C = C_\beta^\psi \mathfrak{N}$. В дальнейшем в качестве множеств $\mathfrak{N}$ рассматриваются единичные шары U_∞^0 в пространстве L_∞,

$$U_\infty^0 = \{\varphi \in L_\infty : \|\varphi\|_\infty \le 1,\ \varphi \perp 1\},$$

либо классы H_ω,

$$H_\omega = \{\varphi \in C : \omega(\varphi, t) \le \omega(t)\},$$

где $\omega(\varphi; t)$ — модуль непрерывности функции φ из C, а $\omega(t)$ — заданная мажоранта модуля непрерывности. При этом полагаем $C^{\psi}_{\beta} U^0_{\infty} = C^{\psi}_{\beta,\infty}$.

При каждом фиксированном $q \in [0, 1)$ через $\mathfrak{D}_q$ обозначим множество последовательностей $\psi(k)$, $k \in N$, для которых

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q.$$

Основные результаты данной работы получены для классов $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, определяющихся последовательностями $\psi(k)$ из $\mathfrak{D}_q$ при некотором $q \in [0, 1)$. В этом случае, как хорошо известно, множества C^{ψ}_{β} состоят из 2π-периодических функций $f(x)$, допускающих регулярное продолжение в полосу $|\operatorname{Im} z| \leq \leq \ln \frac{1}{q}$, при этом в каждой точке x справедливо равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x-t)\, \Psi_{\beta}(t)\, dt = \frac{a_0}{2} + (f^{\psi}_{\beta} * \Psi_{\beta})(x), \tag{1}$$

где

$$\Psi_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$$

— ядро представления (1) (см., например, [1, с. 32, 35]).

Введем еще ряд обозначений. Пусть $f(x) \in C$. Через $\tilde{S}_n(f; x)$ будем обозначать тригонометрический многочлен порядка n, интерполирующий $f(x)$ в точках $x^{(n)}_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$, $k \in Z$, т. е. такой, что

$$\tilde{S}_n(f; x^{(n)}_k) = f(x^{(n)}_k), \qquad k \in Z.$$

Пространство тригонометрических многочленов t_{n-1}, порядок которых не превышает $n-1$, обозначим через $\mathcal{T}_{2n-1}$. Величина

$$E_n(f)_C = \inf_{t_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_C$$

есть наилучшее приближение f в метрике пространства C тригонометрическими полиномами порядка $n-1$.

В настоящей работе исследуются величины $\tilde{\rho}_n(f; x) = f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f; x)$ при $f \in C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — либо U^0_{∞}, либо H_{ω}, а также величины

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}; x) = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}} |\tilde{\rho}_n(f; x)|$$

с целью получения для них асимптотических равенств, когда $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 \leq \leq q < 1$, $\beta \in R$.

Основными результатами работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $q \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$ *и* $\beta \in R$. *Тогда если* $f \in \in C^{\psi}_{\beta} C$, *то для любых* $n \in N$ *и* $x \in R$

$$|\tilde{\rho}_n(f;x)| \le \psi(n)\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{16}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q) + \right.$$

$$\left. + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right)E_n(f_\beta^\psi)_C. \tag{2}$$

При этом для любых $x \in R$, $n \in N$ *и* $f \in C_\beta^\psi C$ *найдется функция* $F(t) = F(f;n;x;t)$ *такая, что* $E_n(F_\beta^\psi)_C = E_n(f_\beta^\psi)_C$, *и для нее выполняется равенство*

$$|\tilde{\rho}_n(F;x)| = \psi(n)\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{16}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q) + O(1)\frac{\varepsilon_n + 1/n}{(1-q)^2}\right)E_n(F_\beta^\psi)_C. \tag{3}$$

В формулах (2) *и* (3)

$$\varepsilon_n = \sup_{k\ge n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|, \qquad \boldsymbol{K}(q) = \int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}},$$

а $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по* x, n, q, β *и* $f \in C_\beta^\psi C$.

Теорема 1 показывает, в частности, что неравенство (2) является асимптотически точным при каждом $x \in R$ на всем пространстве $C_\beta^\psi C$. Это неравенство остается асимптотически точным и на некоторых важных подмножествах из $C_\beta^\psi C$. Так, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$, $\beta \in R$ *и* $\omega(t)$ — *произвольный модуль непрерывности. Тогда для любого* $x \in R$ *при* $n \to \infty$ *выполняются равенства*

$$\tilde{\mathscr{E}}_n(C_{\beta,\infty}^\psi;x) = \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\psi(n)\left(\frac{16}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q) + \right.$$

$$\left. + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \tag{4}$$

$$\tilde{\mathscr{E}}_n(C_\beta^\psi H_\omega;x) = \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}e_n(\omega)\boldsymbol{K}(q) + \right.$$

$$\left. + O(1)\frac{\omega(1/n)(\varepsilon_n + 1/n)}{(1-q)^2}\right), \tag{5}$$

где

$$e_n(\omega) = \theta_\omega\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt,$$

$\theta_\omega \in [1/2, 1]$, *причем* $\theta_\omega = 1$, *если* $\omega(t)$ — *выпуклый модуль непрерывности,* $\boldsymbol{K}(q)$ *и* ε_n — *те же, что и в теореме* 1, *а* $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по* x, n, q *и* β.

Отметим, что асимптотические равенства (4) и (5) для величин $\tilde{\mathscr{E}}_n(C_{\beta,\infty}^\psi;x)$ и $\tilde{\mathscr{E}}_n(C_\beta^\psi H_\omega;x)$ являются интерполяционными аналогами асимптотических равенств, содержащихся в теоремах 3 и 5 работы [2] (см. также [3]), для величин $\mathscr{E}_n(C_{\beta,\infty}^\psi)_C$ и $\mathscr{E}_n(C_\beta^\psi H_\omega)_C$ верхних граней приближений с помощью сумм

Фурье в пространстве C на классах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ и $C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}$. При этом справедливы равенства

$$\tilde{\mathcal{E}}_n (C^{\psi}_{\beta,\infty}; x) = 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\Bigg(\mathcal{E}_n (C^{\psi}_{\beta,\infty})_C + $$

$$+ O(1)\,\psi(n)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\Bigg),$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n (C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}; x) = 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\Bigg(\mathcal{E}_n (C^{\psi}_{\beta} H_{\omega})_C + $$

$$+ O(1)\frac{\psi(n)\,\omega(1/n)(\varepsilon_n + 1/n)}{(1-q)^2}\Bigg),$$

в которых величины ε_n и $O(1)$ имеют тот же смысл, что и в теореме 2.

Отметим также, что для известных классов W^r_{∞} асимптотическое равенство

$$\tilde{\mathcal{E}}_n (W^r_{\infty}; x) = \frac{2K_r}{\pi}\frac{\ln n}{n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| + O(1)\,n^{-r},$$

в котором K_r — константы Фавара,

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}, \qquad r = 0, 1, \ldots ,$$

а $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по x и n, получено еще в 1941 г. С. М. Никольским [4].

Важным примером ядер, коэффициенты $\psi(k)$ которых удовлетворяют условию $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, являются ядра Пуассона

$$P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad q \in (0, 1), \quad \beta \in R.$$

Классы $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ в случае, когда $\psi(k) = q^k$, будем обозначать через $C^{q}_{\beta}\mathfrak{N}$, а соответствующие (ψ, β)-производные и (ψ, β)-интегралы функции f — через $f^{q}_{\beta}(\cdot)$ и $\mathcal{J}^{q}_{\beta}(f;\cdot)$. Из теоремы 2 вытекает такое следствие.

***Следствие* 1.** *Пусть* $0 < q < 1$, $\beta \in R$, $\omega(t)$ — *произвольный модуль непрерывности. Тогда для любого* $x \in R$ *при* $n \to \infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$\tilde{\mathcal{E}}_n (C^{q}_{\beta,\infty}; x) = \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| q^n \left(\frac{16}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)}\right),$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n (C^{q}_{\beta} H_{\omega}; x) = \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| q^n \left(\frac{8}{\pi^2}e_n(\omega)\boldsymbol{K}(q) + O(1)\frac{\omega(1/n)}{n(1-q)^2}\right),$$

в которых величины $e_n(\omega)$ *и* $\boldsymbol{K}(q)$ *те же, что и в теореме* 2, *а* $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по* x, n, q *и* β.

Условиям теоремы 2 удовлетворяют также коэффициенты $\psi(k)$ бигармонического ядра Пуассона

$$B_{q,\beta}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1-q^2}{2}k\right) q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

$$0 < q < 1, \quad \beta \in R,$$

а также ядра Неймана

$$N_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad 0 < q < 1, \quad \beta \in R.$$

Для коэффициентов $\psi(k)$ ядер $B_{q,\beta}(t)$ и $N_{q,\beta}(t)$, как несложно проверить,

$$\varepsilon_n = \sup_{k \geq n} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right| = \left| \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} - q \right| \leq \frac{q}{n}, \quad n \in N.$$

Поэтому из теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть* $\psi(k) = \left(1 + \frac{1-q^2}{2} k\right) q^k$, $0 < q < 1$, $k \in N$, $\beta \in R$ *и* $\omega(t)$ — *произвольный модуль непрерывности. Тогда для любого* $x \in R$ *при* $n \to \infty$

$$\tilde{\mathscr{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}; x) = \left|\sin \frac{2n-1}{2} x\right| \left(1 + \frac{1-q^2}{2} n\right) q^n \left(\frac{16}{\pi^2} \boldsymbol{K}(q) + \right.$$
$$\left. + \ O(1) \frac{q}{n(1-q)^2}\right), \tag{6}$$

$$\tilde{\mathscr{E}}_n(C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}; x) = \left|\sin \frac{2n-1}{2} x\right| \left(1 + \frac{1-q^2}{2} n\right) q^n \left(\frac{8}{\pi^2} e_n(\omega) \boldsymbol{K}(q) + \right.$$
$$\left. + \ O(1) \frac{\omega(1/n)}{n(1-q)^2}\right), \tag{7}$$

если же $\psi(k) = \frac{q^k}{k}$, $0 < q < 1$, $k \in N$, $\beta \in R$, *то для любого* $x \in R$ *при* $n \to \to \infty$

$$\tilde{\mathscr{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}; x) = \left|\sin \frac{2n-1}{2} x\right| \frac{q^n}{n} \left(\frac{16}{\pi^2} \boldsymbol{K}(q) + O(1) \frac{q}{n(1-q)^2}\right), \tag{8}$$

$$\tilde{\mathscr{E}}_n(C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}; x) = \left|\sin \frac{2n-1}{2} x\right| \frac{q^n}{n} \left(\frac{8}{\pi^2} e_n(\omega) \boldsymbol{K}(q) + O(1) \frac{\omega(1/n)}{n(1-q)^2}\right). \tag{9}$$

В равенствах (6) – (9) *величины* $e_n(\omega)$ *и* $\boldsymbol{K}(q)$ *имеют тот же смысл, что и в теореме* 2, *а* $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по* x, n, q *и* β.

Теорема 3. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{D}_0$, $\psi(k) > 0$, $\beta \in R$ *и* $\omega(t)$ — *произвольный модуль непрерывности. Тогда для любого* $x \in R$ *при* $n \to \infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$\tilde{\mathscr{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}; x) = \left|\sin \frac{2n-1}{2} x\right| \left(\frac{8}{\pi} \psi(n) + \right.$$
$$\left. + \ O(1) \left(\psi(n+1) \min\left\{\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}, \frac{1}{n}\right\} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \psi(k)\right)\right), \tag{10}$$

$$\tilde{\mathscr{E}}_n(C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}; x) = \left|\sin \frac{2n-1}{2} x\right| \left(\frac{4}{\pi} \psi(n) e_n(\omega) + \right.$$
$$\left. + \ O(1) \omega\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k)\right), \tag{11}$$

где

$$e_n(\omega) = \theta_\omega \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t\, dt,$$

$\theta_\omega \in [2/3, 1]$, *причем* $\theta_\omega = 1$, *если* $\omega(t)$ — *выпуклая функция, а* $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по всем рассматриваемым параметрам.*

Отметим, что условия $\psi \in \mathfrak{D}_0$, $\psi(k) > 0$ гарантируют выполнение соотношения

$$\psi(m) = o(1) \sum_{k=m+1}^{\infty} \psi(k).$$

Теорема 3, по существу, дополняет теорему 2 в случае, когда $q = 0$.

Доказательству теорем 1–3 предпошлем следующую лемму, в которой содержится интегральное представление величин $\tilde{\rho}_n(f; x)$ на классах C_β^ψ.

Лемма 1. *Пусть* $\psi(k) > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$, $\beta \in R$. *Тогда для любой функции* $f \in C_\beta^\psi$ *справедливо равенство*

$$\tilde{\rho}_n(f; x) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{2n-1}{2} x \int_{-\pi}^{\pi} \delta_n(t+x) \times$$

$$\times \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} \psi(\nu) \cos(\nu t + \gamma_n) + r_n(t) \right) dt \qquad \forall\, x \in R, \tag{12}$$

в котором $\delta_n(\tau) = f_\beta^\psi(\tau) - t_{n-1}(\tau)$, $t_{n-1}(\cdot)$ — *произвольный тригонометрический многочлен из* $\mathcal{T}_{2n-1}$, *а величины* $r_n(t)$ *и* γ_n *определены равенствами*

$$r_n(t) = r_n(\psi; \beta; x; t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \sin\left(\nu t + \left(k + \frac{1}{2}\right)(2n-1)x + \frac{\pi\beta}{2}\right), \tag{13}$$

$$\gamma_n = \gamma_n(\beta; x) = \frac{(2n-1)x + \pi(\beta - 1)}{2}. \tag{14}$$

Доказательство. Коэффициенты Фурье a_k и b_k функции $f \in C_\beta^\psi$ имеют вид

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\pi\beta}{2}\right) \varphi(t)\, dt, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(k) \sin\left(kt + \frac{\pi\beta}{2}\right) \varphi(t)\, dt, \end{aligned} \tag{15}$$

где $\varphi(t) = f_\beta^\psi(t)$. Как известно, коэффициенты $a_k^{(n)}$ и $b_k^{(n)}$ интерполяционного многочлена

$$\tilde{S}_n(f; x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx\right) \tag{16}$$

выражаются через коэффициенты Фурье a_k и b_k функции f с помощью следующих равенств [5, с. 28; 6, с. 213]:

$$a_k^{(n)} = a_k + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m(2n+1)+k} + a_{m(2n+1)-k}), \quad k = 0, 1, \ldots, n; \tag{17}$$

$$b_k^{(n)} = b_k + \sum_{m=1}^{\infty} (b_{m(2n+1)+k} - b_{m(2n+1)-k}), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{17$'$}$$

Объединяя формулы (15)–(17′) и полагая $\sigma_k = \sigma_k^{(n)} = (2k-1)n + k$, $\alpha_k = \alpha_k^{(n)}(\beta; x) = k(2n+1)x + \dfrac{\beta\pi}{2}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\forall f \in C_\beta^\psi$ получаем

$$f(x) - \tilde{S}_n(f; x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t+x) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=\sigma_k}^{\sigma_{k+1}-1} \psi(\nu)\left[\cos\left(\nu t + \frac{\pi\beta}{2}\right) - \cos(\nu t + \alpha_k)\right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t+x) \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=\sigma_k}^{\infty} \psi(\nu)\left[\cos\left(\nu t + \frac{\pi\beta}{2}\right) - \cos(\nu t + \alpha_k)\right] - \right.$$

$$\left. - \sum_{\nu=\sigma_{k+1}}^{\infty} \psi(\nu)\left[\cos\left(\nu t + \frac{\pi\beta}{2}\right) - \cos(\nu t + \alpha_k)\right]\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t+x) \left(\sum_{\nu=\sigma_1}^{\infty} \psi(\nu)\left[\cos\left(\nu t + \frac{\pi\beta}{2}\right) - \cos(\nu t + \alpha_1)\right] + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=\sigma_{k+1}}^{\infty} \psi(\nu)\left[\cos\left(\nu t + \frac{\pi\beta}{2}\right) - \cos(\nu t + \alpha_{k+1})\right] - \right.$$

$$\left.\left. - \sum_{\nu=\sigma_{k+1}}^{\infty} \psi(\nu)\left[\cos\left(\nu t + \frac{\pi\beta}{2}\right) - \cos(\nu t + \alpha_k)\right]\right\}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t+x) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=\sigma_{k+1}}^{\infty} \psi(\nu)\left[\cos(\nu t + \alpha_k) - \cos(\nu t + \alpha_{k+1})\right] dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sin\frac{2n+1}{2}x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t+x) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=\sigma_{k+1}}^{\infty} \psi(\nu) \sin\left(\nu t + \right.$$

$$\left. + \left(k + \frac{1}{2}\right)(2n+1)x + \frac{\pi\beta}{2}\right) dt. \tag{18}$$

Заменяя в (18) $n-1$ на n и учитывая, что $\sigma_{k+1}^{(n-1)} = (2k+1)n - k$, находим

$$\tilde{\rho}_n(f; x) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{2n-1}{2}x \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t+x) \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} \psi(\nu)\cos(\nu t + \gamma_n) + r_n(t) \right) dt, \tag{19}$$

где $r_n(t)$ и γ_n определены равенствами (13) и (14). Функции $\sum_{\nu=n}^{\infty} \psi(\nu)\cos(\nu t + \gamma_n)$ и $r_n(t)$ ортогональны любому тригонометрическому полиному $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$, поэтому в (19) $f_\beta^\psi(u)$ можно заменить величиной $\delta_n(u)$ и тогда из (19) следует (12) для любой функции $f \in C_\beta^\psi$.

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$. Тогда в силу (13)

$$r_n(t) \le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \tag{20}$$

и

$$\sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) = \psi(n) \prod_{i=0}^{(2n-1)k-1} \frac{\psi(n+i+1)}{\psi(n+i)} \Bigg(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{m-1} \frac{\psi((2k+1)n-k+j+1)}{\psi((2k+1)n-k+j)} \Bigg) \le$$

$$\le \psi(n) \prod_{i=0}^{(2n-1)k-1} (q+\varepsilon_{n+i}) \Bigg(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{m-1} (q+\varepsilon_{(2k+1)n-k+j}) \Bigg) \le$$

$$\le \psi(n) \frac{(q+\varepsilon_n)^{(2n-1)k}}{1-q-\varepsilon_{3n-1}}.$$

Поэтому

$$|r_n(t)| \le \frac{\psi(n)}{1-q-\varepsilon_{3n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} (q+\varepsilon_n)^{(2n-1)k} =$$

$$= \frac{\psi(n)(q+\varepsilon_n)^{2n-1}}{(1-q-\varepsilon_{3n-1})(1-(q+\varepsilon_n)^{2n-1})} = o(1)\frac{q\,\psi(n)}{(1-q)n}. \tag{21}$$

В силу леммы 1 работы [3]

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \psi(\nu)\cos(\nu t+\gamma_n) = \psi(n)\Bigg(q^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos(kt+\gamma_n) + \bar{r}_n(t) \Bigg), \tag{22}$$

где

$$\bar{r}_n(t) = \bar{r}_n(\psi,\gamma_n,t) \overset{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \Bigg(\prod_{l=0}^{i-1} \frac{\psi(n+l+1)}{\psi(n+l)} - q^i \Bigg) \cos((n+i)t+\gamma_n);$$

при этом для величины $\bar{r}_n(t)$, начиная с некоторого номера n_0, выполняется неравенство

$$|\bar{r}_n(t)| \le \frac{\varepsilon_n}{(1-q-\varepsilon_n)(1-q)}, \qquad \varepsilon_n = \sup_{k\ge n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|. \tag{23}$$

Объединяя соотношения (12) и (22), а также (21) и (23), получаем

$$\tilde{\rho}_n(f;x) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{2n-1}{2}x\,\psi(n)\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t+x)\Bigg(q^{-n}\sum_{\nu=n}^{\infty} q^{\nu}\cos(\nu t+\gamma_n) + O(1)\Bigg(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{q}{n(1-q)}\Bigg)\Bigg)dt. \tag{24}$$

Выбирая в (24) в качестве $t_{n-1}(\cdot)$ полином наилучшего приближения в пространстве C функции $f_\beta^\psi(\cdot)$, находим

$$|\tilde{\rho}_n(f;x)| \le \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\psi(n)\Bigg(q^{-n}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} q^{\nu}\cos(\nu t+\gamma_n)\right|dt + O(1)\Bigg(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{q}{n(1-q)}\Bigg)\Bigg)E_n(f_\beta^\psi)_C. \tag{25}$$

В работе [7] (§ 3) показано, что для любых $0<q<1$ и $\alpha \in R$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{\nu=n}^{\infty} q^{\nu} \cos(\nu t+\alpha) \right| dt = q^{n} \left(\frac{8}{\pi} \boldsymbol{K}(q) + O(1) \frac{q}{n(1-q)} \right), \tag{26}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по n, q и α. Подставляя это равенство в (25) при $\alpha = \gamma_n$, получаем соотношение (2).

Докажем теперь вторую часть теоремы 1. В силу (19), (21)–(23), а также ортогональности функции $r_n(t)$ любому полиному $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ $\forall f \in C_{\beta}^{\psi}$ справедливо равенство

$$\tilde{\rho}_n(f;x) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{2n-1}{2} x\, \psi(n) \left(q^{-n} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(t+x) \sum_{\nu=n}^{\infty} q^{\nu} \cos(\nu t+\gamma_n)\, dt + \right.$$

$$\left. + O(1) \left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{q}{n(1-q)} \right) E_n(f_{\beta}^{\psi})_C \right). \tag{27}$$

Заметим, что для каждого $x \in R$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(t+x) \sum_{\nu=n}^{\infty} q^{\nu} \cos(\nu t+\gamma_n)\, dt = \rho_n(g_x; x),$$

где $\rho_n(f) = \rho_n(f;x) \overset{\text{df}}{=} f(x) - S_{n-1}(f;x)$, $S_n(f) = S_n(f;x)$ — частные суммы Фурье порядка n функции f из L, а

$$g_x(\cdot) \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(t+\cdot) \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi(\nu) \cos(\nu t+\gamma_n)\, dt.$$

Кроме того, согласно теореме 2 работы [2] при каждом $n \in N$ для функции $g_x(\cdot)$ найдется функция $\overline{\varphi}(t) = \overline{\varphi}(n;x;t)$ такая, что $E_n(\overline{\varphi})_C = E_n(f_{\beta}^{\psi})_C$, и для нее выполняется равенство

$$\| \rho_n(G) \|_C = \left(\frac{8q^n}{\pi^2} \boldsymbol{K}(q) + O(1) \frac{q^n}{(1-q)^2 n} \right) E_n(f_{\beta}^{\psi})_C, \tag{28}$$

где

$$G(\tau) \overset{\text{df}}{=} \mathcal{J}_{2\gamma_n/\pi}^{q}(\overline{\varphi};\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi}(\tau+t) \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu} \cos(\nu t+\gamma_n)\, dt,$$

а $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по n, q и γ_n.

Пусть точка x_0 такова, что

$$| \rho_n(G; x_0) | = \| \rho_n(G) \|_C. \tag{29}$$

Тогда функция $F(t) \overset{\text{df}}{=} \mathcal{J}_{\beta}^{\psi}(\overline{\varphi}(t-x+x_0))$ будет искомой. Действительно, поскольку $F_{\beta}^{\psi}(t) = \overline{\varphi}(t-x+x_0)$, то $E_n(F_{\beta}^{\psi})_C = E_n(f_{\beta}^{\psi})_C$ и на основании формул (27)–(29) для заданных x и n имеем

$$|\tilde{\rho}_n(F;x)| = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \psi(n) \left(q^{-n} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi}(t+x_0) \sum_{\nu=n}^{\infty} q^{\nu} \cos(\nu t+\gamma_n)\, dt \right| + \right.$$

$$+ \; O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{q}{n(1-q)}\right) E_n(F_\beta^\psi)_C \Bigg) =$$

$$= \; 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\psi(n)\left(q^{-n}\|\rho_n(G)\|_C + O(1)\frac{\varepsilon_n + 1/n}{(1-q)^2}E_n(f_\beta^\psi)_C\right) =$$

$$= \; 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q) + O(1)\frac{\varepsilon_n + 1/n}{(1-q)^2}\right)E_n(f_\beta^\psi)_C.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассматривая верхние грани модулей обеих частей равенства (24) при заданном x и $t_{n-1} \equiv 0$ по классу $C^\psi_{\beta,\infty}$ и учитывая инвариантность множества U^0_∞ относительно сдвига аргумента, получаем

$$\tilde{\mathscr{E}}_n(C^\psi_{\beta,\infty}; x) =$$

$$= \; \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\psi(n)\left(q^{-n}\sup_{\varphi\in U^0_\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sum_{\nu=n}^{\infty}q^\nu\cos(\nu t+\gamma_n)\,dt \; + \right.$$

$$\left. + \; O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right). \tag{30}$$

Учитывая, что

$$\sup_{\varphi\in U^0_\infty}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sum_{\nu=n}^{\infty}q^\nu\cos(\nu t+\gamma_n)\,dt\right| =$$

$$= \; \int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{\nu=n}^{\infty}q^\nu\cos(\nu t+\gamma_n)\right|dt \; + \; O(1)\frac{q}{n(1-q)}$$

(см., например, [7, с. 137 – 141]), и подставляя это равенство в формулу (30), на основании соотношения (26) (при $\alpha = \gamma_n$) имеем

$$\tilde{\mathscr{E}}_n(C^\psi_{\beta,\infty}; x) \; = \; \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\psi(n)\left(q^{-n}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{\nu=n}^{\infty}q^\nu\cos(\nu t+\gamma_n)\right|dt \; + \right.$$

$$\left. + \; O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right) =$$

$$= \; \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\psi(n)\left(\frac{16}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right).$$

Соотношение (4) доказано.

Аналогично, рассматривая верхние грани модулей обеих частей равенства (12) по классу $C^\psi_\beta H_\omega$ для любого фиксированного x, учитывая инвариантность множества H_ω относительно сдвига аргумента, равенство (22) и оценку (23), получаем

$$\tilde{\mathscr{E}}_n(C_\beta^\psi H_\omega; x) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \times$$
$$\times \sup_{\varphi\in H_\omega}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,\psi(n)\,q^{-n}\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(kt+\gamma_n)\,dt + R_n(\varphi)\right|, \tag{31}$$

где

$$R_n(\varphi) = R_n(\varphi; x) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{-\pi}^{\pi}\delta^*(t)\left(\psi(n)\,\bar{r}_n(t) + r_n(t)\right)dt,$$

$$\delta_n^*(\tau) = \varphi(\tau) - t_{n-1}^*(\tau),$$

$t_{n-1}^*(\cdot)$ — полином наилучшего приближения в пространстве C функции φ. Поэтому, применяя оценки (21) и (23), находим

$$|R_n(\varphi)| \le 2\pi\|\delta_n^*(\cdot)\|_C\,\|\psi(n)\,\bar{r}_n(\cdot) + r_n(\cdot))\|_C =$$
$$= O(1)\,\psi(n)\left(\frac{q}{(1-q)\,n} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)E_n(\varphi)_C. \tag{32}$$

Неравенство Джексона в пространстве C:

$$E_n(\varphi)_C \le K\omega\left(\varphi; \frac{1}{n}\right) \quad \forall\,\varphi\in C, \quad \forall\,n\in N, \tag{33}$$

где K — некоторая абсолютная константа (см., например, [1, с. 227]), и оценка (32) позволяют записать

$$\sup_{\varphi\in H_\omega}|R_n(\varphi)| = O(1)\,\psi(n)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{q}{(1-q)n} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right). \tag{34}$$

Из (31) и (34) вытекает равенство

$$\tilde{\mathscr{E}}_n(C_\beta^\psi H_\omega; x) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\psi(n)\left(q^{-n}\sup_{\varphi\in H_\omega}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(kt+\gamma_n)\,dt\right| +\right.$$
$$\left. + O(1)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{q}{(1-q)n} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right). \tag{35}$$

В теореме 1 работы [9] для любых $q\in(0,1)$, $\beta\in R$ и любого модуля непрерывности $\omega(t)$ было установлено следующее асимптотическое равенство:

$$\sup_{\varphi\in H_\omega}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt\right| =$$
$$= \frac{4}{\pi}q^n\boldsymbol{K}(q)\,e_n(\omega) + O(1)\frac{q^n\,\omega(1/n)}{(1-q)^2\,n}, \tag{36}$$

в котором

$$e_n(\omega) = \theta_\omega\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt,$$

$\theta_\omega\in[1/2, 1]$, причем $\theta_\omega = 1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности,

$O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по n, q и β. Положим в равенстве (36) γ_n вместо $\beta\pi/2$ (правомерность такой замены вытекает из равномерной ограниченности величины $O(1)$ в (36) относительно параметров n и β). Сопоставляя полученное равенство с представлением (35), получаем равенство (5). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы **3.** Пусть $\psi \in \mathfrak{D}_0$, $\psi(k) > 0$, $\beta \in R$. Рассматривая верхние грани модулей обеих частей равенства (12) по классам $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ и $C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}$, а также учитывая оценку (20), имеем

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}; x) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \left(\sup_{\varphi \in U^0_{\infty}} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos(kt+\gamma_n)\,dt \right| + \right.$$

$$\left. + \; O(1) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \right), \tag{37}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}; x) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \times$$

$$\times \sup_{\varphi \in H_{\omega}} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos(kt+\gamma_n)\,dt + R^*_n(\varphi) \right|, \tag{38}$$

где

$$R^*_n(\varphi) = R^*_n(\varphi; x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta^*_n(t)\, r_n(t)\,dt, \qquad \delta^*_n(\tau) = \varphi(\tau) - t^*_{n-1}(\tau),$$

$t^*_{n-1}(\cdot)$ — полином наилучшего приближения в пространстве C функции φ, а $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно всех рассматриваемых параметров. На основании теорем 2 и 3 работы [10, с. 512–513] можно записать равенство

$$\sup_{\varphi \in U^0_{\infty}} \frac{1}{\pi} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos(kt+\alpha_k)\,dt \right| =$$

$$= \frac{4}{\pi}\psi(n) + O(1)\left(\psi(n+1)\min\left\{ \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}; \frac{1}{n} \right\} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \psi(k) \right), \tag{39}$$

в котором $\{\alpha_k\}$ — произвольная последовательность действительных чисел, а величина $O(1)$ имеет тот же смысл, что и в равенстве (37). Полагая в (39) $\alpha_k = \gamma_n$, $k = n, n+1, \ldots$, сопоставляя полученное равенство с представлением (37) и учитывая, что для любой $\psi \in \mathfrak{D}_0$ при достаточно больших n

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \le \frac{1}{1-\varepsilon_{3n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \psi((2k+1)n - k), \tag{40}$$

где $\varepsilon_n = \sup\limits_{k \ge n} \left| \dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} \right|$, получаем формулу (10).

Применяя оценки (20), (33), а также неравенство (40), имеем

$$|R_n^*(\varphi)| \leq 2\pi \|\delta_n^*\|_C \|r_n\|_C = O(1) \sum_{k=3n-1}^{\infty} \psi(k) E_n(\varphi)_C =$$

$$= O(1)\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=3n-1}^{\infty} \psi(k). \tag{41}$$

В силу теоремы 7 работы [11]

$$\sup_{\varphi \in H_\omega} \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \beta_k)\, dt \right| =$$

$$= \frac{2\theta_\omega}{\pi} \psi(n) \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t\, dt + O(1)\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k), \tag{42}$$

где β_k — произвольная последовательность действительных чисел, $\theta_\omega \in [2/3, 1]$, причем $\theta_\omega = 1$, если $\omega(t)$ — выпуклая функция, а $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по всем рассматриваемым параметрам.

Полагая в (42) $\beta_k = \gamma_k$, $k = n, n+1, \ldots$, и сопоставляя полученное равенство с представлением (38) и оценкой (41), получаем равенство (11). Теорема 3 доказана.

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Приближение аналитических периодических функций. – Киев, 2000. – С. 60–92. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2000.1).
3. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 3. – С. 375–395.
4. *Никольский С. М.* Асимптотическая оценка остатка при приближении интерполяционными тригонометрическими полиномами // Докл. АН СССР. – 1941. – **31**, № 3. – С. 215–218.
5. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 538 с.
6. *Никольский С. М.* Оценки остатка суммы Фейера для периодических функций, имеющих ограниченную производную // Докл. АН СССР. – 1941. – **31**, № 3. – С. 210–214.
7. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 126–151.
8. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Неравенства Лебега для интегралов Пуассона // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 6. – С. 798–808.
9. *Степанец А. И.* Решение задачи Колмогорова–Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Приближение аналитических периодических функций. – Киев, 2000. – С. 1–42. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2000.1).
10. *Теляковский С. А.* О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 4. – С. 510–518.
11. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$-интегралов // Там же. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1069–1113.

Получено 18.04.2000