УДК 519.41/47

Н. С. Черников (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ГРУППАХ, ФАКТОРИЗУЕМЫХ ДВУМЯ ПОДГРУППАМИ С ЧЕРНИКОВСКИМИ КОММУТАНТАМИ *

We establish a number of results concerning the almost solvability and other properties of groups which are factorized by two subgroups with finite or the Cernikov derived subgroup.

Встановлено ряд результатів щодо майже розв'язності та інших властивостей груп, які розкладаються в добуток двох підгруп із скінченними або черніковськими комутантами.

В связи с известной теоремой автора [1] (см. также [2]) о почти разрешимости произвольной группы, факторизуемой двумя подгруппами, конечными над своими центрами, естественно возник следующий вопрос, не решенный пока в общей постановке (см., например, [3, с. 198], вопрос 14 (a)): будет ли почти разрешимой произвольная группа G, факторизуемая двумя подгруппами A и B с конечными коммутантами?

Используя известную теорему Кегеля – Виландта о разрешимости конечной группы, факторизуемой попарно перестановочными нильпотентными подгруппами (см., например, [3]), Л. С. Казарин [4, 5] установил теорему, в которой утверждается, что локально конечная группа G, факторизуемая двумя нильпотентными подгруппами A и B с конечными коммутантами, разрешима. Тем самым был дан положительный ответ на указанный вопрос при условии, что G локально конечна, а A и B нильпотентны. Далее, известная теорема Д.И.Зайцева [6] утверждает, что группа $G = AB$ почти разрешима в случае, когда A — абелева подгруппа и B — FC-подгруппа с черниковским коммутантом. В силу этой теоремы ответ на вопрос положителен в случае, когда $A' = 1$. Н. С. Черников [7] установил (теорема 1), в частности, что ответ на указанный вопрос положителен в случае, когда G имеет инвариантную систему с почти абелевыми факторами, и вместе с тем, например, в каждом из следующих случаев: G является RI-группой, G финитно аппроксимируема, G локально разрешима.

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы, связанные с отмеченными выше вопросом и теоремами.

Напомним [8], что группа, не содержащая истинных подгруп конечного индекса, называется квазиполной.

Теорема 1 [9]. *Пусть $G = AB$ — группа, A и B — ее подгруппы с конечными коммутантами, хотя бы одна из которых периодическая. Тогда если подгруппа $\langle A, B\rangle$ не имеет отличных от единицы квазиполных подгрупп конечного индекса, то группа G почти разрешима.*

Теорема 1 включает в себя следующее предложение, выделенное в качестве теоремы ввиду его важности.

Теорема 2. *Локально ступенчатая группа G, факторизуемая двумя подгруппами A и B с конечными коммутантами, хотя бы одна из которых периодическая, почти разрешима.*

Теорема 3. *Пусть $G = AB$ — группа, A и B — ее подгруппы с конечными коммутантами, хотя бы одна из которых периодическая. Пусть для некоторых конечных подгрупп $L \subseteq A$ и $M \subseteq B$ подгруппа $H = \langle L, M\rangle$ содержит A' и B' и не имеет отличных от единицы квазиполных подгрупп конечного индекса. Тогда группа G почти разрешима.*

Теорема 3 несколько усиливает теорему 1.

---

* Выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №99-01-00462).

Теорема 4 [10]. *Пусть группа G является произведением двух FC-подгрупп A и B, коммутанты которых порождают в ней почти разрешимую подгруппу с условием минимальности. Тогда группа G почти разрешима.*

Доказательствам теорем 3 и 4 предпошлем следующие два предложения.

Если конечная подгруппа Y локально конечной группы X субнормальна в каждой конечной подгруппе группы X, ее содержащей, то будем говорить, что Y локально субнормальна в X.

Предложение 1. *Пусть $G = AB$ — группа, A и B — ее подгруппы с конечными коммутантами, причем A периодическая; $D = \{g \in B \mid |g| < \infty\}$. Пусть для некоторых конечных подгрупп $L \subseteq A$ и $M \subseteq B$ подгруппа $H = \langle L, M\rangle$ не имеет отличных от единицы квазиполных подгрупп конечного индекса и содержит A' и B'. Тогда:*

1) *$F = AD$ — локально конечная подгруппа группы G и $\langle D^G \rangle \subseteq F$;*

2) *все конечные подгруппы K группы F такие, что $\langle A', B'\rangle \subseteq K = (K \cap A)(K \cap B)$, образуют ее локальную систему, и для каждой из них $[K \cap A, K \cap B]$ локально субнормален в F.*

Ниже, как обычно, $J(X)$ — пересечение всех подгрупп конечного индекса группы X.

Предложение 2. *Пусть $G = AB$ — группа, A и B — ее подгруппы с черниковским пересечением; H — черниковская подгруппа, порожденная некоторыми инвариантными подгруппами групп G, A и B; $N = N_G(H)$ и $L = (N \cap A)H \cap (N \cap B)H$. Пусть $\mathcal{M}$ — совокупность всех подгрупп $K \subseteq G$, для которых $(A \cap B)H \subseteq K = (K \cap A)(K \cap B)$; $F = \bigcap_{K \in \mathcal{M}} K$. Тогда подгруппа L черниковская, и*

$$F = L = (L \cap A)(L \cap B) = (L \cap A)H = (L \cap B)H, \tag{1}$$

$$J(L) = J(L \cap A)J(L \cap B) = J(L \cap A)J(H) = J(L \cap B)J(H). \tag{2}$$

В случае, когда $A \cap B$ и H — полные, подгруппы L, $L \cap A$ и $L \cap B$ являются полными абелевыми.

***Доказательство предложения* 1.** Так как $H = \langle LA', MB'\rangle$, то можно считать, что $A' \subseteq L$ и $B' \subseteq M$. Покажем, что H конечна. В самом деле, пусть это не так, и для каждого $n \in \mathbb{N}$ H_n — пересечение всех ее подгрупп индекса $\leq n$. Ввиду леммы Неймана $|H : H_n| < \infty$ и, значит, в силу теоремы Шрейера H_n конечнопорождена. Поэтому, очевидно, индекс $|H : \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n|$ бесконечен. Далее, так как A периодическая, то ввиду леммы 1.6 [2] и леммы Сесекина (см., например, [2], лемма 1.9) $N_G(H) = N_A(H)N_B(H)$, $HN_A(H) \cap HN_B(H) = = (N_A(H) \cap HN_B(H))(N_B(H) \cap HN_A(H))$. Поскольку, очевидно, фактор-группа $(HN_A(H) \cap HN_B(H))/\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n$ имеет убывающий инвариантный ряд, первый фактор которого абелев, а остальные конечны, и коммутанты множителей $(N_A(H) \cap HN_B(H))\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n / \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n$ и $(N_B(H) \cap HN_A(H))\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n / \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n$ конечны, то в силу теоремы 1 [7] (упоминавшейся в начале статьи) она почти разрешима. Но тогда, так как подгруппа $H/\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n$ инвариантна в фактор-группе $(HN_A(H) \cap HN_B(H))/\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n$ и порождается конечными нормальными делителями $L\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n / \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n$ и $M\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n / \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n$ множителей, ввиду леммы 1.21 [2] она конечна. Противоречие.

Поскольку H конечна, то силу леммы 1.13 [2] найдется конечная подгруппа $T \in N_G(H)$ такая, что $H \subseteq T = (T \bigcap N_A(H))(T \bigcap N_B(H))$. Тогда $T = (T \bigcap \bigcap A)(T \bigcap B)$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех локально конечных групп. Покажем, что

$$[\langle (T \bigcap A)^G \rangle, \langle (T \bigcap B)^G \rangle] \in \mathfrak{X}. \tag{3}$$

Поскольку, очевидно, $A' \subseteq T \bigcap A$ и $B' \subseteq T \bigcap B$, то $T \bigcap A \trianglelefteq A$ и $T \bigcap B \trianglelefteq B$. Поэтому ввиду леммы 3 [11] для любого $g \in G$ $(T \bigcap A)(T \bigcap B)^g = (T \bigcap \bigcap B)^g (T \bigcap A)$. Следовательно, если (3) не выполняется, то согласно лемме 2 [11] найдется подгруппа $L \in \mathfrak{X}$, для которой $(T \bigcap A)L = L(T \bigcap A) \notin \mathfrak{X}$. Однако последнее в силу теоремы Пуанкаре и леммы Шмидта невозможно.

С учетом (3), очевидно, $\langle (T \bigcap A)^G \rangle \bigcap \langle (T \bigcap B)^G \rangle \in \mathfrak{X}\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп. Далее, ввиду отмеченной теоремы [6] фактор-группы $G / \langle (T \bigcap A)^G \rangle$ и $G / \langle (T \bigcap B)^G \rangle$ почти разрешимы. Следовательно, $G \in \mathfrak{X}\mathfrak{S}\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{F}$ — классы всех разрешимых и конечных групп. Значит, G локально ступенчатая.

Поэтому для произвольных конечных подгрупп $U \subseteq A$, $U \supseteq A'$ и $V \subseteq B$, $U \supseteq B'$ подгруппа $\langle U, V \rangle$ не имеет отличных от единицы квазиполных подгрупп конечного индекса. Следовательно, как было показано выше, найдется конечная подгруппа K, для которой $\langle U, V \rangle \subseteq K = (K \bigcap A)(K \bigcap B)$. Поэтому F — локально конечная группа, и подгруппы K, взятые по всем U и V, образуют ее локальную систему. В силу леммы 3 [11] и леммы 2.5.1 [3] $[K \bigcap A, K \bigcap \bigcap B]$ локально субнормален в F.

Поскольку $G = FB$, $D \trianglelefteq B$ и $D \subseteq F$, то ввиду леммы Чунихина (см., например, [2], лемма 1.36) $\langle D^G \rangle \subseteq F$. Предложение доказано.

Доказательство предложения 2. Пусть $R = \bigcap_{K \in \mathcal{M},\, K \subseteq N} K$; $\overline{L} = (N \bigcap \bigcap A)J(H) \bigcap (N \bigcap B)J(H)$; $\overline{\mathcal{M}}$ и $\overline{F}$, $\overline{R}$ определяются так же, как $\mathcal{M}$ и F, R соответственно с заменой H на $J(H)$ и $\mathcal{M}$ на $\overline{\mathcal{M}}$. Очевидно,

$$|L : \overline{L}| < \infty, \tag{4}$$

в силу чего

$$J(L \bigcap A) = J(\overline{L} \bigcap A), \quad J(L \bigcap B) = J(\overline{L} \bigcap B). \tag{5}$$

Поскольку $A \bigcap B \subseteq N$, то $A \bigcap B \subseteq L$ и $A \bigcap B \subseteq \overline{L}$. Далее, ввиду леммы 1.6 [2] $N = (N \bigcap A)(N \bigcap B)$. Следовательно, в силу соответственно лемм 1.27 [2] и 1.31 [2] $F = R$, $\overline{F} = \overline{R}$ и $R = L$, $\overline{R} = \overline{L}$; на основании леммы 1.32 [2] выполняются соотношения

$$F = (F \bigcap A)(F \bigcap B) = (F \bigcap A)H = (F \bigcap B)H \tag{6}$$

и соотношения, получаемые из (6) путем замены в них F на $\overline{F}$ и H на $J(H)$. Поэтому имеют место соотношения (1) и выполняются следующие соотношения:

$$A \bigcap B \subseteq \overline{F} = \overline{L} = (\overline{L} \bigcap A)(\overline{L} \bigcap B) = (\overline{L} \bigcap A)J(H) = (\overline{L} \bigcap B)J(H). \tag{7}$$

Поскольку подгруппа $(\overline{L} \bigcap A) \bigcap (\overline{L} \bigcap B)$ локально конечна, и подгруппа $J(H)$ порождается инвариантными в $\overline{L}$ конечными подгруппами, то с учетом (7) в силу леммы 1.34 [2] подгруппа $\overline{L}$ локально конечна. Поэтому ввиду предложения 1.13 [2] для подгрупп $U = C_{\overline{L} \bigcap A}(J(H))$ и $V = C_{\overline{L} \bigcap A}(J(H))$ $|\overline{L} \bigcap A : U| < \infty$ и $|\overline{L} \bigcap B : U| < \infty$. Следовательно, снова с учетом (7) фактор-группы

$\overline{L}/U$ и $\overline{L}/V$ черниковские и, значит, в силу теоремы Ремака фактор-группа $\overline{L}/(U \cap V)$ черниковская. Тогда с учетом (4), (5), (7) и черниковости $U \cap VL$ черниковская, и вследствие предложения 1.6 [13] выполняются (2).

Далее, в выделенном случае $H(A \cap B) \subseteq J(H)$. Поэтому с учетом (2) $J(L) \in \in \mathcal{M}$. Тогда $J(L) \supseteq F$ и, поскольку $F = L$ (соотношения (1)), то $J(L) = L$. Поэтому L — полная абелева. Так как $L = (L \cap A)(L \cap B) = J(L \cap A)J(L \cap B)$ и, очевидно, $(L \cap A) \cap (L \cap B) = J(L \cap A) \cap J(L \cap B) (= A \cap B)$, то $L \cap A = = J(L \cap A)$ и $L \cap B = J(L \cap B)$. Поэтому подгруппы $L \cap A$ и $L \cap B$ — полные абелевы. Предложение доказано.

***Доказательство теоремы* 3.** Пусть A — периодическая, а D — та же, что и в предложении 1. Так как $|(A\langle D^G\rangle/\langle D^G\rangle)'| < \infty$ и $|(B\langle D^G\rangle/\langle D^G\rangle)'| = 1$, то ввиду [6] $G/\langle D^G\rangle$ почти разрешима. С учетом этого и предложения 1 далее, не теряя общности рассуждений, можно считать, что $B = D$. Тогда G локально конечна.

Пусть подгруппа K такая, как в предложении 1, и $E = [K \cap A, K \cap B]$. Тогда E локально субнормальна в G.

Если $E = 1$, то в силу леммы 3 [11] $[\langle (K \cap A)^G\rangle, \langle (K \cap B)^G\rangle] = 1$ и, значит, подгруппа $\langle (K \cap A)^G\rangle \cap \langle (K \cap B)^G\rangle$ абелева. Таким образом, поскольку ввиду [6] фактор-группы $G/(K \cap A)^G$ и $G/(K \cap B)^G$ почти разрешимы, вследствие теоремы Ремака группа G почти разрешима.

Пусть $E \neq 1$. Будем считать, что произвольная локально конечная группа $G^* = A^*B^*$ с $|A^{*\prime}| < \infty$ и $|B^{*\prime}| < \infty$ почти разрешима, если она имеет конечную подгруппу K^* такую, что $\langle A^{*\prime}, B^{*\prime}\rangle \subseteq K^* = (K^* \cap A^*)(K^* \cap B^*)$ и $|[K^* \cap A^*, K^* \cap B^*]| < |E|$. Очевидно, общность рассуждений при этом не нарушается. Пусть R — субнормальная простая подгруппа группы E и $T = \langle R^G\rangle$. Тогда R локально субнормальна в G и G/T почти разрешима.

Если $|R| = p \in \mathbb{P}$, то для каждой конечной подгруппы $X \supseteq R$ группы G $\langle R^X\rangle$ — p-группа. Поэтому, очевидно T — p-группа. Следовательно, G почти локально разрешима и, значит, вследствие теоремы 1 [7] она почти разрешима.

Пусть R — неабелева. Тогда в силу теоремы Виландта (см., например, [14], теорема 13. 3. 1) в каждой конечной подгруппе $X \supseteq R$ для произвольного $g \in X$ либо $[R, R^g] = 1$, либо $R = R^g$. Поэтому T — прямое произведение всех подгрупп R^g, $g \in G$. Положим $\overline{G} = AT \cap BT$ и $\overline{A} = A \cap BT$, $\overline{B} = B \cap AT$. Тогда в силу леммы Сесекина

$$\overline{G} = \overline{A}\,\overline{B} = \overline{A}T = \overline{B}T. \tag{8}$$

Поскольку $T = T'$, то с учетом (8) $\overline{G}' = \overline{A}'T = \overline{B}'T$ и $\overline{G}' = [\overline{G}, \overline{G}] = [\overline{A}T, \overline{B}T] = [\overline{A}, \overline{B}]T$. Поэтому для некоторой конечной подгруппы $W \subseteq [\overline{A}, \overline{B}]$

$$\overline{A}'T = WT = \overline{B}'T. \tag{9}$$

Вследствие предложения 1 в $\overline{G}$ найдется конечная подгруппа X такая, что подгруппа $S = [X \cap \overline{A}, X \cap \overline{B}]$ локально субнормальна в $\overline{G}$ и $W \subseteq S$. Ввиду теоремы 13. 3. 1 [14] для каждого $g \in G$ либо $[S, R^g] = 1$, либо $R^g \subseteq S$. Поэтому $|T : C_T(S)| < \infty$, в силу чего подгруппа WT локально нормальна. Тогда с учетом (9) $|T : C_T(\overline{A}')| < \infty$, $|T : C_T(\overline{B}')| < \infty$. Следовательно, так как $|\overline{A} : C_{\overline{A}}(\overline{A}')| < \infty$ и $|\overline{B} : C_{\overline{B}}(\overline{B}')| < \infty$, то с учетом (8) $|\overline{G} : C_{\overline{G}}(\overline{A}')| < \infty$ и $|\overline{G} :$

$C_{\overline{G}}(\overline{B}')\,|<\infty$. Поэтому подгруппа $N = \langle(\overline{A}')^{\overline{G}}\rangle\langle(\overline{B}')^{\overline{G}}\rangle$ конечна. Далее, ввиду теоремы Н. Ито (см., например, [2]) фактор-группа $\overline{G}/N$ метабелева. Следовательно, группа $\overline{G}$ и, вместе с этим, группа G почти разрешимы. Теорема доказана.

***Доказательство теоремы* 4.** Можно считать, что $G \neq 1$. Положим $H = \langle A', B'\rangle$.

1^0. Сведем доказательство к случаю, когда $|B'| < \infty$. В силу теоремы С. Н. Черникова о разрешимых группах с условием минимальности (см., например, [12], теорема 1.2) H — черниковская. Поэтому $[J(A'), J(B')] = 1$. Следовательно, на основании леммы 3 [11] $[\langle J(A')^G\rangle, \langle J(B')^G\rangle] = 1$ и, значит, подгруппа $\langle J(A')^G\rangle \cap \langle J(B')^G\rangle$ абелева. Поэтому ввиду теоремы Ремака G почти разрешима тогда и только тогда, когда почти разрешимы фактор-группы $G/\langle J(A')^G\rangle$ и $G/\langle J(B')^G\rangle$. Пусть φ — гомоморфизм группы G на одну из этих фактор-групп. Тогда $G^\varphi = A^\varphi B^\varphi$, A^φ и B^φ — FC-группы, подгруппа $\langle (A^\varphi)', (B^\varphi)'\rangle$ черниковская и одна из подгрупп $(A^\varphi)'$, $(B^\varphi)'$ конечна. С учетом этого далее без ограничения общности рассуждений можно считать, что $|B'| < \infty$.

2^0. Покажем, что для любых подгрупп $D \trianglelefteq A$, $D \supseteq J(A')$ и $K \trianglelefteq B$, $K \subseteq N_G(D)$ подгруппы $N_G(D)$ и $\langle K^G\rangle$ почти разрешимы. Пусть $G^* = N_G(D)/D$, $A^* = AD/D$ и $B^* = (N_G(D) \cap B)D/D$. Тогда $G^* = A^*B^*$, $|\langle (A^*)', (B^*)'\rangle| < \infty$, и в силу теоремы 1 группа G^* и подгруппа $N_G(D)$ почти разрешимы. Так как $G = N_G(D)B$ то ввиду леммы Чунихина и $\langle K^G\rangle$ почти разрешима.

3^0. Покажем, что группа G почти разрешима в случае, когда $A \cap B = 1$. Пусть подгруппа L такая, как в предложении 2, и $D = J(L \cap A)$, $K = J(L \cap B)$. Тогда $[D, K] = 1$, $J(A') \subseteq D$ и $B' \subseteq N_G(DK)$. Поскольку A и B — FC-группы, то $D \trianglelefteq A$ и $K \trianglelefteq B$. Следовательно, подгруппа $\langle K^G\rangle$ почти разрешима (см. п. 2^0 доказательства).

Для произвольной подгруппы $X \subseteq G$ обозначим через $\overline{X}$ группу $X\langle K^G\rangle/\langle K^G\rangle$ Тогда $\overline{G} = \overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — FC-группы, $J(\overline{A}') \subseteq \overline{D} \trianglelefteq \overline{A}$ и $\overline{B}' \subseteq N_{\overline{G}}(\overline{D})$. Поэтому $\langle(\overline{B}')^{\overline{G}}\rangle$ почти разрешима (см. п. 2^0 доказательства). Пусть φ — гомоморфизм $\overline{G}$ на $\overline{G}/\langle(\overline{B}')^{\overline{G}}\rangle$. Тогда $\overline{G}^\varphi = \overline{A}^\varphi \overline{B}^\varphi$, $\overline{A}^\varphi$ — FC-группа, $(\overline{A}^\varphi)'$ — черниковская и $(\overline{B}^\varphi)' = 1$. Поэтому ввиду [6] группа $\overline{G}^\varphi$ и, вместе с ней, группы $\overline{G}$ и G почти разрешимы.

4^0. Пусть $M \subseteq A \cap B$ и $|M| < \infty$. Тогда $|A : C_A(M)| < \infty$, $|B : C_B(M)| < \infty$. Поэтому ввиду леммы 1.17 [2] (принадлежащей Б. Амбергу) $|G : C_G(M)| < \infty$. Следовательно, $|\langle M^G\rangle : Z(\langle M^G\rangle)| < \infty$.

Далее, с учетом [6], не теряя общности рассуждений, можно считать, что $B' \neq 1$ и произвольная группа $G^* = A^*B^*$ с подгруппами A^*, B^* и $\langle A^{*\prime}, B^{*\prime}\rangle$ такими же, как соответственно A, B и $\langle A', B'\rangle$, и с $|B^{*\prime}| < |B'|$ почти разрешима.

5^0. Покажем, что группа G почти разрешима, если она имеет почти разрешимую подгруппу $N \trianglelefteq G$, для которой $AN \cap B' \neq 1$. Для произвольной подгруппы $X \subseteq G$ группу XN/N будем обозначать через $\overline{X}$. В соответствии с п. 4^0

доказательства подгруппа $\langle(\overline{A}\cap\overline{B}')^{\overline{G}}\rangle$ почти разрешима. Пусть φ — гомоморфизм $\overline{G}$ на $\overline{G}/\langle(\overline{A}\cap\overline{B}')^{\overline{G}}\rangle$. Тогда $\overline{G}^{\varphi}=\overline{A}^{\varphi}\overline{B}^{\varphi}$, $\overline{A}^{\varphi}$ и $\overline{B}^{\varphi}$ — FC-группы, $(\overline{A}^{\varphi})'$ — черниковская и, как легко видеть, $|(\overline{B}^{\varphi})'|<|B'|$. Поэтому группа $\overline{G}^{\varphi}$ и, вместе с этим, группы $\overline{G}$ и G почти разрешимы.

6^0. Рассмотрим случай, когда для любой почти разрешимой подгруппы $N \trianglelefteq \trianglelefteq G A N \cap B' = 1$. В этом случае, как легко видеть, для подгруппы L, порожденной всеми такими N, $AL\cap B'=1$ и, значит, $(AL\cap B)'=1$. Тогда, поскольку на основании леммы Сесекина $AL\cap BL=(A\cap BL)(B\cap AL)$, в силу [6] $AL\cap BL$ почти разрешима. Поэтому G/L не содержит отличных от единицы почти разрешимых нормальных делителей. Следовательно, в соответствии с п. 4^0 $AL/L\cap BL/L=L/L$ и, значит, с учетом п. 3^0 $G/L=L/L$, т. е. $G=1$. Противоречие. Теорема доказана.

Используя теорему 4 и рассуждения из доказательства предложения 1, нетрудно доказать следующее предложение.

Предложение 3. *Пусть группа G является произведением двух FC-подгрупп A и B, коммутанты которых порождают в ней почти разрешимую подгруппу с условием минимальности, причем A периодическая: $D=\{g\in B \mid |g|<\infty\}$ и $F=AD$. Тогда F — локально конечная подгруппа, F имеет локальную систему конечных подгрупп, каждая из которых факторизуется своими пересечениями с A и D, и $\langle D^G\rangle\subseteq F$.*

Из теоремы 4 непосредственно вытекает следующее предложение.

***Следствие* 1** [9, 10]. *Пусть группа G является произведением двух подгрупп A и B, коммутанты которых порождают в ней конечную подгруппу. Тогда группа G почти разрешима.*

Из теорем 3, 4 и теоремы Кегеля – Виландта непосредственно вытекает следующее предложение.

***Следствие* 2.** *Если при условиях любой из теорем 1 — 4 или следствия 1 подгруппы A и B нильпотентны, то группа G разрешима.*

Из следствия 2 вытекает отмеченная выше теорема Л.С. Казарина [4, 5].

Из предложений 1 — 3 непосредственно вытекает такое предложение.

***Следствие* 3.** *Если при условиях любой из теорем 1 – 4 или следствия 1 подгруппы A и B периодические, то группа G является локально конечной π-группой для $\pi=\pi(A)\cup\pi(B)$.*

Из следствия 2 вытекает известная теорема Кегеля (см. [15]), утверждающая, что группа G, факторизуемая двумя периодическими абелевыми подгруппами A и B, является периодической, и при этом $\pi(G)=\pi(A)\cup\pi(B)$.

Замечания. **1.** Следствия 2 и 3 частично анонсированы автором в [10].

2. В соответствии с утверждением следствия 2, относящимся к теореме 1, *произвольная группа $G=AB$ разрешима, если подгруппа A периодическая и* $|A'|\le 2$, $|B'|\le 2$.

3. В соответствии с леммой 3 [7] (принадлежащей М. Томкинсону), если группа $G=AB$ почти разрешима и $|A'|<\infty$, $|B'|<\infty$, то ступень разрешимости разрешимого радикала группы G не превышает числа $(m+3)(n+3)-7$, где m и n — суммы показателей простых чисел в каноническом разложении соответственно $|A'|$ и $|B'|$.

Докажем еще следующее предложение.

Предложение 4. *Финитно аппроксимируемая группа G, факторизуемая двумя подгруппами A и B с конечными коммутантами, имеет инвариантную* *подгруппу H конечного индекса, второй коммутант которой конечен и лежит в $Z(H)$.*

Доказательство. Проводя индукцию по величине $|A'| + |B'|$ и при этом используя теорему Н. Ито в качестве ее базиса, а также учитывая, что ввиду леммы Сесекина для любой $N \trianglelefteq G$ $AN \cap BN = (A \cap BN)(B \cap AN)$, сводим доказательство к следующему случаю: для произвольной подгруппы $N \trianglelefteq G$ с $|G : N| < \infty$ $A', B' \subseteq AN \cap BN$. Для произвольной подгруппы $X \subseteq G$ обозначим через $\overline{X}$ группу XN/N. Тогда $\overline{G} = \overline{A}\,\overline{B}$ и $\overline{A}', \overline{B}' \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Используя лемму Чунихина, легко убедиться в том, что $\langle(\overline{A}')^{\overline{G}}\rangle\langle(\overline{B}')^{\overline{G}}\rangle = \overline{A}'\,\overline{B}'$. Поэтому с учетом произвольности N в силу теоремы Н. Ито $|G''| \leq |A'||B'| < \infty$ и, значит, можно положить $H = C_G\,|G''|$.

1. *Черников Н. С.* О произведении почти абелевых групп // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 1. – С.136–138.
2. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. – Киев : Наук. думка, 1987. – 206 с.
3. *Amberg B., Franciosi S., De Giovanni F.* Products of groups. – Oxford : Clarendon Press, 1992. – 220 p.
4. *Казарин Д. С.* О группах с факторизацией // Докл. АН СССР. – 1981 – **256**, № 1. – С.26–29.
5. *Казарин Д. С.* О произведении двух нильпотентных групп // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. – Ярославль : Изд. Ярослав. ун-та, 1981. – С. 62–66.
6. *Зайцев Д. И* Теорема Ито и произведения групп // Мат. заметки. – 1983. – **33**, № 6. – С. 807–818.
7. *Черников Н. С.* Факторизация групп почти BFC-подгруппами // Группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев : Ин-т математики НАН Украины, 1993. – С. 367–387.
8. *Половицкий Я. Д.* Слойно экстремальные группы // Мат. сб. – 1962. – **56**, № 1. – С. 95–106.
9. *Черников Н. С.* Разрешимость и почти разрешимость некоторых факторизуемых бесконечных групп // Исследования по теоретическим и прикладным вопросам математики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 48.
10. *Черников Н. С.* Факторизация бесконечных групп при условиях конечности // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1985. – № 5. – С. 26–29.
11. *Черников Н. С.* Периодические локально разрешимые группы, факторизуемые двумя локально нильпотентными подгруппами // Вопросы алгебры (Гомель). – 1997. – № 11. – С. 90–115.
12. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М. : Наука, 1980. – 384 с.
13. *Kegel O. H.* On the solvability of some factorized linear groups // Ill. J. Math. – 1965. – **9**, № 3. – P. 535–547.
14. *Robinson D J. S.* A course in the theory of groups. – New York etc. : Springer, 1982. – 482 p.
15. *Brisley W., Mac Donald J. D.* Two classes of metabelian p-groups // Math. Z. – 1969. – **112**, № 1. – S. 5–12.

Получено 02.11.98