УДК 517.9

Д. З. Аров, М. А. Нудельман (Южно-Укр. пед. ун-т, Одесса)

КРИТЕРИЙ УНИТАРНОГО ПОДОБИЯ МИНИМАЛЬНЫХ ПАССИВНЫХ СИСТЕМ РАССЕЯНИЯ С ЗАДАННОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ*

We find necessary and sufficient conditions under which all the minimal passive systems of scattering having a given transfer operator-function are unitary equivalent. These conditions can be essentially simplified in special cases important for applications, in particular, in the case where a transfer function is rational and in a more general case where this function is pseudocontinuable.

Знайдені необхідні та достатні умови, за якими всі мінімальні пасивні системи розсіяння, що мають задану передаточну оператор-функцію, унітарно еквівалентні. Ці умови помітно спрощуються в спеціальних, але важливих для застосувань випадках; зокрема, у випадку, коли передаточна функція є раціональною, та у більш загальному випадку, коли вона є псевдопродовжуваною.

Введение. Напомним некоторые известные определения. Пусть

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A x_k + B \xi_k, \\ \sigma_k &= C x_k + D \xi_k, \end{aligned} \qquad k \geq 0, \tag{1}$$

— линейная система с дискретным временем. Здесь $x_k \in X$, $\xi_k \in U$, $\sigma_k \in V$; X, U, V — конечномерные или сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства; A, B, C, D — ограниченные линейные операторы. Обозначим эту систему буквой α. Говорят, что X, U, V — соответственно пространства состояний, входов и выходов системы α. Пространство X называется также внутренним пространством системы α, а U и V — ее внешними пространствами.

Если Y и Z — гильбертовы пространства, то через $[Y, Z]$ будем обозначать пространство ограниченных линейных операторов, действующих из пространства Y в пространство Z.

Напомним, что оператор-функция

$$\theta_\alpha(z) = D + zC(I - zA)^{-1}B,$$

принимающая значения из пространства $[U, V]$, называется передаточной функцией системы α вида (1). В общем случае эта оператор-функция определена и голоморфна, по крайней мере, в некоторой окрестности точки $z = 0$.

Напомним, что коэффициенты системы α порождают ограниченный линейный оператор

$$H_\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in [X \oplus U, X \oplus V], \tag{2}$$

где $\oplus$ — знак ортогональной суммы.

* Частично поддержана грантом ИМ1-298 правительства Украины и Фонда гражданских исследований и развития (США).

Пусть X — сепарабельное гильбертово пространство, $X \subset \hat{X}$ и $\hat{\alpha}$ — некоторая линейная система с внутренним пространством $\hat{X}$ и внешними пространствами U и V. Система $\hat{\alpha}$ называется дилатацией системы α [1], если существует ортогональное разложение $\hat{X} = \mathfrak{D}_+ \oplus X \oplus \mathfrak{D}_-$, в котором оператор $H_{\hat{\alpha}}$ записывается в виде

$$H_{\hat{\alpha}} = \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & A & * & B \\ 0 & 0 & * & 0 \\ \hline 0 & C & * & D \end{array}\right); \tag{3}$$

звездочками обозначены блоки, конкретный вид которых не имеет значения для определения дилатации.

Легко показать, что $\theta_{\hat{\alpha}}(z) = \theta_\alpha(z)$ в некоторой окрестности точки $z = 0$.

Система α называется минимальной, если она не является дилатацией никакой другой системы [1].

Знаком $\vee$ будем обозначать замыкание линейной оболочки.

Подпространство

$$X_\alpha^c = \bigvee_{k=0}^{\infty} A^k BU \subset X$$

называется, как известно, пространством управления системы α, а подпространство

$$X_\alpha^o = \bigvee_{k=0}^{\infty} A^{*k} C^* V \subset X$$

— ее пространством наблюдений. Система α называется управляемой, если $X_\alpha^c = X$, и наблюдаемой, если $X_\alpha^o = X$.

Известно [1], что система α является минимальной тогда и только тогда, когда она управляема и наблюдаема.

Известен результат Р. Калмана [2], утверждающий, что в случае конечномерных пространств X, U, V все минимальные системы с одинаковой передаточной функцией подобны между собой. Более точно: если α_1 и α_2 — минимальные системы и

$$\theta_{\alpha_1}(z) = \theta_{\alpha_2}(z) \tag{4}$$

в некоторой окрестности точки $z = 0$, то существует обратимый линейный оператор S, действующий из X_1 в X_2, такой, что

$$A_2 = SA_1S^{-1}, \quad B_2 = SB_1, \quad C_2 = C_1S^{-1}, \quad D_2 = D_1. \tag{5}$$

В общем случае, следуя работе [1], назовем системы α_1 и α_2 подобными, если существует ограниченно обратимый оператор $S \in [X_1, X_2]$, удовлетворяющий равенствам (5), и унитарно подобными (унитарно эквивалентными), если этот оператор может быть выбран изометрическим и сюръективным.

Если пространство X_1 бесконечномерно, то для системы α_2, удовлетворяющей равенству (4) в окрестности точки $z = 0$, можно утверждать лишь слабое подобие системе α_1 [1]. Мы не приводим здесь определения слабого подобия (см. [1, 3]), которое, вообще говоря, не сохраняет динамические свойства системы и спектральные свойства ее основного оператора A.

Напомним определение пассивной системы рассеяния [1]: система α называется пассивной системой рассеяния, если из соотношений (1) следуют неравенства

$$\|x_{k+1}\|^2 - \|x_k\|^2 \leq \|\xi_k\|^2 - \|\sigma_k\|^2, \quad k \geq 0. \tag{6}$$

Легко видеть, что это определение равносильно тому, что оператор H_α, определенный формулой (2), является сжимающим: $\|H_\alpha\| \leq 1$.

Известно [1], что класс передаточных функций пассивных систем рассеяния совпадает с классом Шура $S(U, V)$ голоморфных в открытом единичном круге $K = \{z \mid |z| < 1\}$ сжимающих оператор-функций, значения которых принадлежат пространству $[U, V]$; здесь U, V — внешние пространства рассматриваемой системы. При этом любая оператор-функция $\theta(z) \in S(U, V)$ является передаточной функцией некоторой минимальной пассивной системы рассеяния [1].

Если ограничиться передаточными функциями, принадлежащими классу Шура $S(U, V)$, и линейными системами, удовлетворяющими неравенствам (6) (т. е. пассивными системами рассеяния), то в некоторых случаях имеет место аналог теоремы Калмана, а именно: все минимальные системы из рассматриваемого класса, имеющие заданную передаточную функцию, подобны между собой.

В данной работе рассматриваются некоторые из таких случаев, а именно: найдены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять оператор-функция $\theta(z) \in S(U, V)$, чтобы все минимальные пассивные системы рассеяния, для которых $\theta(z)$ является передаточной функцией, были унитарно эквивалентны между собой.

1. Общий случай. Определение [4]. *Пассивная система рассеяния α_0 называется оптимальной, если для любой другой пассивной системы рассеяния α с той же передаточной функцией $\theta(z)$ выполняется неравенство*

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} A_0^k B_0 \xi_k \right\| \leq \left\| \sum_{k=0}^{n} A^k B \xi_k \right\| \tag{7}$$

для произвольных ξ_k из U и $n \geq 0$.

Определение [5]. *Наблюдаемая пассивная система рассеяния α_0 называется $*$-оптимальной, если для любой наблюдаемой пассивной системы рассеяния α с той же передаточной функцией $\theta(z)$ выполняется неравенство*

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} A_{0*}^k B_{0*} \xi_k \right\| \geq \left\| \sum_{k=0}^{n} A^k B \xi_k \right\|$$

для произвольных $\xi_k \in U$ и $n \geq 0$.

В работе [5] доказано, что для каждой оператор-функции $\theta(z)$, принадлежащей классу Шура $S(U, V)$, существует как оптимальная и минимальная, так и $*$-оптимальная и минимальная пассивная система рассеяния, для которой $\theta(z)$ является передаточной функцией. Каждая из этих систем единственна с точностью до унитарного подобия. Другие доказательства существования оптимальной и минимальной пассивной системы рассеяния с заданной передаточной функцией см. в [4, 6].

Лемма. *Если оптимальная и минимальная пассивная система рассеяния α_0 и $*$-оптимальная и минимальная пассивная система рассеяния α_{0*}, имеющие одну и ту же передаточную функцию $\theta(z) \in S(U, V)$, унитарно подобны, то все минимальные пассивные системы рассеяния, имеющие передаточную функцию $\theta(z)$, унитарно подобны между собой.*

Доказательство. Пусть S_0 — сюръективный изометрический оператор, осуществляющий подобие между системами α_0 и α_{0*}. Пусть, далее, α —

произвольная минимальная пассивная система рассеяния, для которой оператор-функция $\theta(z)$ является передаточной функцией.

Следуя [1] (предложение 6), положим

$$SA_0^k B_0 \xi = A^k B \xi; \quad k \geq 0, \quad \xi \in U;$$

так же, как в [1], можно по линейности продолжить оператор S на линейную оболочку L векторов из пространства X_0 вида $A_0^k B_0 \xi$; $k \geq 0$, $\xi \in U$. Из определений оптимальной и $*$-оптимальной систем следует

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} A_0^k B_0 \xi_k \right\| \leq \left\| \sum_{k=0}^{n} A^k B \xi_k \right\| \leq \left\| \sum_{k=0}^{n} A_{0*}^k B_{0*} \xi_k \right\|, \quad n \geq 0, \quad \xi_k \in U.$$

Из унитарной эквивалентности систем α_0 и α_{0*} следует

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} A_0^k B_0 \xi_k \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} A_{0*}^k B_{0*} \xi_k \right\|, \quad n \geq 0, \quad \xi_k \in U.$$

Поэтому имеем

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} A_0^k B_0 \xi_k \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} A^k B \xi_k \right\|.$$

Отметим, что в силу управляемости системы α_0 замыкание линеала L есть пространство X_0. Продолжая оператор S по непрерывности, получаем изометрический оператор, действующий из X_0 на $X = X_\alpha^c$.

Воспроизведя рассуждения предложения 6 из [1], можно получить аналог равенств (5) для систем α_0 и α, что и доказывает лемму.

Пусть $\theta(z) \in S(U, V)$. Известно [7], что существует гильбертово пространство F_r и оператор-функция $\varphi_r(z) \in S(U, F_r)$ такие, что

$$\varphi_r(z)^* \varphi_r(z) \leq I_U - \theta(z)^* \theta(z), \quad |z| < 1,$$

и для любой функции $\varphi(z) \in S(U, G)$, где G — какое-нибудь гильбертово пространство, такой, что

$$\varphi(z)^* \varphi(z) \leq I_U - \theta(z)^* \theta(z), \quad |z| < 1, \tag{8}$$

выполняется неравенство

$$\varphi(z)^* \varphi(z) \leq \varphi_r(z)^* \varphi_r(z), \quad |z| < 1,$$

причем $\overline{\varphi_r(0) U} = F_r$. Здесь I_U — единичный оператор в пространстве U, неравенства понимаются в эрмитовом смысле, через $\overline{L}$ обозначено замыкание множества L в рассматриваемом пространстве. Известно [7], что $\dim F_r \leq \dim U$. Можно считать, что $F_r \subset U$; тогда функция $\varphi_r(z)$ может быть нормирована условием $\varphi_r(0) \,|\, F_r > 0$ и при этой нормировке она определяется однозначно.

Аналогично определяется оператор-функция $\varphi_l(z) \in S(F_l, V)$, являющаяся оптимальной среди голоморфных оператор-функций, удовлетворяющих неравенству

$$\psi(z) \psi(z)^* \leq I_V - \theta(z) \theta(z)^*, \quad |z| < 1; \tag{9}$$

здесь I_V — единичный оператор в пространстве V. При этом $\dim F_l \leq \dim V$, и если $F_l \subset V$, то нормировка может быть осуществлена условием $\varphi_l^*(0) \,|\, F_l > 0$.

Известно [7], что функции $\varphi_r(z)$ и $\varphi_l(\overline{z})^*$ являются внешними.

В работе [8] доказано, что для любой оператор-функции $\theta(z) \in S(U, V)$ и нормированных функций $\varphi_r(z)$ и $\varphi_l(z)$, построенных, как и выше, существует такая функция $h_0(\zeta)$ из пространства $L^\infty(F_l, F_r)$ ограниченных измеримых оператор-функций, заданных на единичной окружности и принимающих значения из $[F_r, F_l]$, что блочный оператор

$$\Theta(\zeta) = \begin{pmatrix} \varphi_l(\zeta) & \theta(\zeta) \\ h_0(\zeta) & \varphi_r(\zeta) \end{pmatrix} \in L^\infty(F_l \oplus U, V \oplus F_r) \tag{10}$$

является сжимающим почти везде на единичной окружности; здесь $\theta(\zeta) \in \in L^\infty(U, V)$, $\varphi_r(\zeta) \in L^\infty(U, F_r)$ и $\varphi_l(\zeta) \in L^\infty(F_l, V)$ — граничные значения ограниченных аналитических в открытом единичном круге оператор-функций $\theta(z)$, $\varphi_r(z)$ и $\varphi_l(z)$ соответственно. Согласно [8], оператор-функция $h_0(\zeta)$, имеющая сформулированные выше свойства, единственна.

Теорема 1. *Пусть* $\theta \in S(U, V)$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *все минимальные пассивные системы рассеяния с передаточной функцией* $\theta(z)$ *унитарно эквивалентны;*

б) *рассматриваемая в формуле* (10) *функция* $\Theta(\zeta)$ *является граничным значением некоторой функции* $\Theta(z)$ *из класса Шура* $S(F_l \oplus U, V \oplus F_r)$;

в) *функция* $h_0(\zeta)$, *рассматриваемая в формуле* (10), *является граничным значением некоторой функции* $h_0(z)$ *из класса Шура* $S(F_l, F_r)$.

Доказательство. Напомним определение простой консервативной системы рассеяния.

Система α вида (1) называется консервативной системой рассеяния, если оператор H_α, определяемый по формуле (2), изометрически отображает пространство $X \oplus U$ на пространство $X \oplus V$. Напомним, что в теории операторов совокупность гильбертовых пространств X, U, V и ограниченных линейных операторов A, B, C, D, имеющая такие свойства, называется унитарным узлом [9].

Система α называется простой, если для нее выполняется равенство

$$X = X_\alpha^c \bigvee X_\alpha^o .$$

Из определения консервативной системы рассеяния вытекает, что ее основной оператор является сжимающим. Легко доказать, что консервативная система рассеяния α является простой тогда и только тогда, когда сжимающий оператор A не имеет унитарной части, что соответствует определению простого унитарного узла.

Поскольку для консервативной системы рассеяния $\| H_\alpha \| = 1$, то такая система является частным случаем пассивной системы рассеяния. Отсюда, в частности, следует, что ее передаточная функция принадлежит классу Шура $S(U, V)$. Известно [9], что для любой оператор-функции из класса Шура существует простая консервативная система рассеяния, для которой эта оператор-функция является передаточной функцией; эта система единственна с точностью до унитарного подобия.

Пусть $\tilde{\alpha}$ — простая консервативная система рассеяния, имеющая передаточную функцию $\theta(z)$. Введем обозначения:

$$\mathfrak{D}_- = \tilde{X} \ominus X_{\tilde{\alpha}}^c, \quad \mathfrak{D}_+ = \tilde{X} \ominus X_{\tilde{\alpha}}^o;$$

знак $\ominus$ означает ортогональное дополнение. Пусть

$$X_0 = \overline{P_{X_{\tilde{\alpha}}^o} X_{\tilde{\alpha}}^c}, \quad X_{0*} = \overline{P_{X_{\tilde{\alpha}}^c} X_{\tilde{\alpha}}^o},$$

где $P_{\mathfrak{L}}$ — ортопроектор на подпространство $\mathfrak{L}$. Пусть, далее,

$$\mathring{\mathfrak{D}}_- = X^o_{\tilde{\alpha}} \ominus X_0, \qquad \mathring{\mathfrak{D}}_+ = X^c_{\tilde{\alpha}} \ominus X_{0*}.$$

Ясно, что

$$\mathring{\mathfrak{D}}_- = \mathfrak{D}_- \cap (\tilde{X} \ominus \mathfrak{D}_+), \qquad \mathring{\mathfrak{D}}_+ = \mathfrak{D}_+ \cap (\tilde{X} \ominus \mathfrak{D}_-). \tag{11}$$

Рассмотрим ортогональные разбиения:

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \mathring{\mathfrak{D}}_- \oplus X_0 \oplus \mathfrak{D}_+, \\ \tilde{X} &= \mathfrak{D}_- \oplus X_{0*} \oplus \mathring{\mathfrak{D}}_+. \end{aligned} \tag{12}$$

Нетрудно убедиться, что каждое из этих разбиений порождает блочное разбиение оператора $H_{\tilde{\alpha}}$ вида (3) (подробнее см. в [5]). В соответствии с этими разбиениями можно рассмотреть системы α_0 и α_{0*} с внутренними пространствами X_0 и X_{0*} соответственно и внешними пространствами U, V, для которых α является дилатацией.

В статье [5] показано, что системы α_0 и α_{0*} — соответственно оптимальная и минимальная и $*$-оптимальная и минимальная пассивные системы рассеяния, имеющие передаточную функцию $\theta(z)$.

Легко доказать (ср. с доказательством леммы), что для унитарного подобия систем α_0 и α_{0*} необходимо и достаточно, чтобы при всех $n \geq 0$, $\xi_k \in U$ выполнялось равенство

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} A_0^k B_0 \xi_k \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} A_{0*}^k B_{0*} \xi_k \right\|$$

(необходимость этого утверждения очевидна, а для доказательства достаточности следует построить оператор подобия, как в лемме; он оказывается сюръективным и изометрическим).

Согласно свойствам дилатации (см. формулу (3)) последнее равенство можно переписать так:

$$\left\| P_{X_0} \sum_{k=0}^{n} \tilde{A}^k \tilde{B} \xi_k \right\| = \left\| P_{X_{0*}} \sum_{k=0}^{n} \tilde{A}^k \tilde{B} \xi_k \right\|.$$

Отсюда, из ортогональных разложений (12) и из леммы следует такая переформулировка утверждения об унитарном подобии минимальных пассивных систем рассеяния с передаточной функцией $\theta(z)$:

$$\left\| P_{\mathring{\mathfrak{D}}_-} \sum_{k=0}^{n} \tilde{A}^k \tilde{B} \xi_k \right\|^2 + \left\| P_{\mathfrak{D}_+} \sum_{k=0}^{n} \tilde{A}^k \tilde{B} \xi_k \right\|^2 = \left\| P_{\mathfrak{D}_-} \sum_{k=0}^{n} \tilde{A}^k \tilde{B} \xi_k \right\|^2 + \left\| P_{\mathring{\mathfrak{D}}_+} \sum_{k=0}^{n} \tilde{A}^k \tilde{B} \xi_k \right\|^2,$$
$$n \geq 0, \quad \xi_k \in U.$$

Поскольку

$$\sum_{k=0}^{n} \tilde{A}^k \tilde{B} \xi_k \in X^c_{\tilde{\alpha}},$$

то в каждой из частей последнего равенства первое слагаемое равно нулю и получаем равенство

$$\left\| P_{\mathfrak{D}_+} \sum_{k=0}^{n} \tilde{A}^k \tilde{B} \xi_k \right\| = \left\| P_{\mathring{\mathfrak{D}}_+} \sum_{k=0}^{n} \tilde{A}^k \tilde{B} \xi_k \right\|, \qquad n \geq 0, \quad \xi_k \in U.$$

В силу включения $\mathring{\mathfrak{D}}_+ \subset \mathfrak{D}_+$, последнее равенство равносильно соотношению

$$P_{\mathfrak{D}_+} X^c_{\tilde{\alpha}} \subset \mathring{\mathfrak{D}}_+. \tag{13}$$

Поскольку система $\tilde{\alpha}$ простая, а $P_{\mathfrak{D}_+} X^o_{\tilde{\alpha}} = 0$, имеем

$$\overline{P_{\mathfrak{D}_+} X^c_{\tilde{\alpha}}} = \mathfrak{D}_+,$$

откуда видно, что включение (13) равносильно равенству

$$\mathfrak{D}_+ = \mathring{\mathfrak{D}}_+.$$

С учетом соотношения $\mathring{\mathfrak{D}}_+ = \mathfrak{D}_+ \bigcap (\tilde{X} \ominus \mathfrak{D}_-)$ (см. (11)) переписываем последнее равенство в виде

$$\mathfrak{D}_+ \perp \mathfrak{D}_-. \tag{14}$$

Из соотношения (14), в частности, следует, что $\mathfrak{D}_- = \mathring{\mathfrak{D}}_-$ и, таким образом, соотношения (12) влекут равенство

$$X_0 = X_{0*},$$

т. е. в рассматриваемом случае α_0 и α_{0*} совпадают.

Согласно работе [10] (теоремы 1.5.1 и 3.5.1; см. также [11 – 13]), соотношение (14) равносильно утверждению теоремы, что и требовалось доказать.

2. Некоторые частные случаи. Рассмотрим сначала крайний случай, когда факторизационные задачи (8) и (9) имеют лишь нулевые решения, т. е. когда $F_r = \{0\}$ и $F_l = \{0\}$. Это тот случай, когда простая консервативная система рассеяния $\tilde{\alpha}$ с передаточной функцией $\theta(z)$ является минимальной. Это вытекает, например, из результатов статьи [11] (см. также [4]).

В этом случае системы α_0 и α_{0*} совпадают с $\tilde{\alpha}$ и потому все минимальные пассивные системы рассеяния с передаточной функцией $\theta(z)$ являются консервативными и унитарно подобны между собой.

Рассмотрим случай, когда в классе Шура разрешимы факторизационные задачи

$$\begin{aligned} I - \theta^*(\zeta)\theta(\zeta) &= \varphi^*(\zeta)\varphi(\zeta) \quad \text{п. в.} \quad (\varphi \in S(U, G)), \\ I - \theta(\zeta)\theta^*(\zeta) &= \psi(\zeta)\psi^*(\zeta) \quad \text{п. в.} \quad (\psi \in S(G, V)). \end{aligned} \tag{15}$$

Тогда $\varphi_r(z)$ и $\varphi_l(z)$ являются решениями факторизационных задач (15).

В этом случае рассматриваемая в формуле (10) функция $\Theta(\zeta)$ является унитарнозначной и функция $h_0(\zeta)$ может быть определена каждым из эквивалентных соотношений

$$\begin{aligned} h_0(\zeta)\varphi_l^*(\zeta) &= -\varphi_r(\zeta)\theta^*(\zeta) \quad \text{п. в.}, \\ \varphi_r^*(\zeta)h_0(\zeta) &= -\theta^*(\zeta)\varphi_l(\zeta) \quad \text{п. в.} \end{aligned} \tag{16}$$

Этот факт содержится в доказательстве теоремы 2 работы [4]. В связи с этим для рассматриваемого случая из теоремы 1 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть $\theta \in S(U, V)$ и для θ разрешимы факторизационные задачи* (15). *Тогда для того чтобы все минимальные системы рассеяния с передаточной функцией $\theta(z)$ были унитарно подобны, необходимо и достаточ-*

но, чтобы рассматриваемая в формуле (10) *функция* $\Theta(\zeta)$ *была граничным значением некоторой двусторонне внутренней функции* $\Theta(z)$.

Напомним, что оператор-функция $A(z)$ из класса Шура $S(X, Y)$ называется двусторонне внутренней, если ее граничные значения почти всюду на единичной окружности являются сюръективными изометрическими операторами.

Пусть выполнены условия теоремы 2, т. е. рассматриваемая в формуле (10) функция $\Theta(\zeta)$ является граничным значением двусторонне внутренней функции $\Theta(z)$. Тогда $\Theta(z)$ является минимальным $\mathfrak{D}$-представлением функции $\theta(z)$ в смысле, определенном в работе [4]. Это имеет место тогда и только тогда, когда все минимальные системы рассеяния с передаточной функцией $\theta(z)$ унитарно подобны и их основные операторы A являются сжатиями класса C_{00}, т. е. для них выполняются условия

$$s-\lim_{k\to\infty} A^k = 0, \qquad s-\lim_{k\to\infty} (A^*)^k = 0,$$

где $s-\lim$ — сильный предел последовательности операторов.

В работе [4] показано, что с помощью минимального $\mathfrak{D}$-представления $\Theta(z)$ функции $\theta(z)$ может быть построена функциональная модель минимальной пассивной системы рассеяния с матрицей рассеяния $\theta(z)$ следующим образом. Пространством состояний в этой модели является пространство

$$\mathcal{H}(\Theta) = H^2(V \oplus F_r) \ominus \Theta\, H^2(F_l \oplus U).$$

Коэффициенты A, B, C, D в этой модели определяются по формулам

$$(Ax)(z) = z^{-1}(x(z) - x(0)), \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{H}(\Theta),$$

$$Bu = z^{-1}\begin{bmatrix} \theta(z) - \theta(0) \\ \varphi_r(z) - \varphi_r(0) \end{bmatrix} u,$$

$$Cx = x_1(0), \qquad x \in \mathcal{H}(\Theta),$$

$$Du = \theta(0)\,u, \qquad u \in U.$$

Сохраняя предположение о разрешимости задач (15), рассмотрим случай, когда внешние пространства U и V конечномерны. Если в каждом из этих пространств зафиксирован ортонормированный базис, то $\theta(z)$ можно рассматривать как матрицу-функцию.

Напомним, что ограниченная голоморфная в открытом единичном круге скалярная функция $f(z)$ называется псевдопродолжимой, если ее граничные значения почти всюду совпадают с граничными значениями некоторой функции ограниченного вида (т. е. отношения двух ограниченных голоморфных функций) во внешности единичного круга. Матрица-функция с ограниченными голоморфными в открытом единичном круге элементами называется псевдопродолжимой, если все ее элементы псевдопродолжимы.

Поскольку двусторонне внутренняя матрица-функция $\Theta(z)$ имеет псевдопродолжение, определяемое по принципу симметрии

$$\Theta(z) = \left[\Theta^*(1/\bar{z})\right]^{-1},$$

то из теоремы 2 вытекает справедливость следующего утверждения.

Предложение 1. *Пусть* $\Theta \in S(U, V)$, $\dim U < \infty$, $\dim V < \infty$ *и разрешимы факторизационные задачи* (15). *Тогда если все минимальные пассивные системы рассеяния с передаточной функцией* $\theta(z)$ *унитарно подобны, то* $\theta(z)$ *имеет псевдопродолжение.*

Заметим, что если $\dim U < \infty$, $\dim V < \infty$ и

$$I - \theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta) > 0 \quad \text{п. в.}, \tag{17}$$

то, как известно [14], задачи (13) и (14) разрешимы тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \det\left(I - \theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta)\right)|d\zeta| > -\infty. \tag{18}$$

Если голоморфная сжимающая в единичном круге матрица-функция $\theta(z)$ имеет псевдопродолжение и для нее выполнено условие (17), то для нее заведомо выполнено условие (18), и поэтому факторизационные задачи (15) разрешимы, так как в этом случае $\det\left(I - \theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta)\right)$ является граничным значением функции ограниченного вида.

Как легко видеть, в случае

$$\dim U = \dim V = 1$$

имеет место альтернатива: либо $F_r = F_l = \{0\}$, что соответствует равенству

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|1 - \left|\theta(e^{i\mu})\right|^2\right| d\mu = -\infty, \tag{19}$$

либо выполнены равенства

$$1 - \left|\theta(e^{i\mu})\right|^2 = \left|\varphi_r(e^{i\mu})\right|^2 = \left|\varphi_l(e^{i\mu})\right|^2 \quad \text{п. в.},$$

причем

$$\varphi_r(z) = \varphi_l(z) =: \varphi(z).$$

В силу (16) функция $h_0(\zeta)$ может быть в этом случае задана формулой

$$h_0(\zeta) = -\,\overline{\theta(\zeta)}\,\frac{\varphi(\zeta)}{\overline{\varphi(\zeta)}}, \quad |\zeta| = 1. \tag{20}$$

Напомним, что классом Смирнова в открытом единичном круге называется класс функций, представимых в виде отношения ограниченной аналитической и ограниченной внешней функции.

Предложение 2. *Минимальные пассивные системы рассеяния, имеющие не внутреннюю скалярную передаточную функцию* $\theta(\zeta)$, *унитарно подобны тогда и только тогда, когда функция*

$$k(\zeta) = \frac{\overline{\theta(\zeta)}}{1 - |\theta(\zeta)|^2}$$

является граничным значением некоторой функции из класса Смирнова.

Доказательство. *Необходимость* следует из того, что

$$k(\zeta) = -\frac{h_0(\zeta)}{(\varphi(\zeta))^2} \quad \text{п. в.}, \tag{21}$$

и теоремы 1.

Достаточность. Из того, что (как видно из формулы (21)) функция $k(\zeta)$ является граничным значением функции из класса Смирнова, следует аналогичный факт для функции $h_0(\zeta)$. Поскольку для функций из класса Смирнова справедлив принцип максимума модуля [15], а в силу формулы (20) функция $h_0(\zeta)$ в существенном ограничена, то функция $h_0(\zeta)$ есть граничное значение ограниченной аналитической функции. Предложение доказано.

Замечание. Если $h_0(\zeta)$ является граничным значением функции $h_0(z)$

из класса Шура, то $m(\zeta) := \varphi(\zeta)/\overline{\varphi(\zeta)}$ — граничное значение некоторой внутренней функции $m(z)$. Это вытекает из равенства $m(\zeta) = h_0(\zeta)\theta(\zeta) + \varphi^2(\zeta)$. Функция $m(z)$ является минимальной функцией в смысле [7] оператора A^* минимальной пассивной системы рассеяния α, имеющей передаточную функцию $\theta(z)$ (см. [4]), ибо она является делителем любой другой внутренней функции $b(z)$ такой, что $b(\zeta)\overline{\Theta(\zeta)}$ — граничное значение функции из класса Шура.

Предложение 3. *Пусть* $\theta(\zeta)$ — *скалярная функция из класса Шура. Тогда*:

1) *для того чтобы простая консервативная система* $\tilde{\alpha}$ *с передаточной функцией* $\theta(z)$ *была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (19);

2) *в этом и только в этом случае любая минимальная пассивная система рассеяния с передаточной функцией* $\theta(z)$ *является консервативной системой рассеяния. Все такие системы определяются по* $\theta(z)$ *с точностью до унитарного подобия.*

Доказательство. Поскольку равенство (19) соответствует случаю, когда $F_r = \{0\}$, $F_l = \{0\}$, то оба утверждения данного предложения вытекают из соответствующего обсуждения, приведенного в начале этого пункта.

Заметим, что все факты, приведенные в данной статье, кроме функциональной модели, остаются в силе, если перейти к случаю пассивных систем рассеяния с непрерывным временем (см. [16]). Переход от дискретного случая к непрерывному осуществляется с помощью преобразования Кэли над аргументом функций и над коэффициентами систем [16].

1. *Аров Д. З.* Пассивные линейные стационарные динамические системы // Сиб. мат. журн. – 1979. – **20**, № 2. – С. 211 – 228.
2. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971. – 400 с.
3. *Аров Д. З.* Линейные стационарные пассивные системы с потерями: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Одесса, 1985. – 298 с.
4. *Аров Д. З.* Устойчивые диссипативные линейные стационарные динамические системы рассеяния // J. Oper. Theory. – 1979. – **2**. – P. 95 – 126.
5. *Arov D. Z., Kaashoek M. A., Ric D. R.* Minimal and optimal linear discrete time-invariant dissipative scattering systems // Integr. Equat., Oper. Theory. – 1997. – **29**. – P. 127 – 154.
6. *Нудельман М. А.* Оптимальные пассивные и полуограниченность квадратичных функционалов // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, № 1. – С. 78 – 86.
7. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 431 с.
8. *Boiko S. S., Dubovoy V. K.* On some extremal problem connected with the suboperator of the scattering through inner channels of the system // Допов. НАН України. – 1997. – № 4. – С. 7 – 11.
9. *Бродский М. С.* Унитарные узлы и их характеристические функции // Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, № 4 (202). – С. 141 – 168.
10. *Мохамед Р. К.* Дефектные функции и регулярные расширения голоморфных сжимающих матриц-функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1996. – 93 с.
11. *Dubovoy V. K., Fritzsche B., Kirstein B.* On spectrally associated Schur functions, Arov-inner functions and Nehari-type completion problem for Schur functions // Integr. Equat., Oper. Theory. – 1993. – **17**. – P. 247 – 276.
12. *Dubovoy V. K., Romadan K. Mohamed.* Defect functions of holomorphic contractive functions, regular extensions and open systems // Math. Nachr. – 1993. – **160**. – P. 69 – 110.
13. *Адамян В. М., Аров Д. З.* Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов // Мат. исслед. – 1966. – **1**, № 2. – С. 3 – 66.
14. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 284 с.
15. *Привалов И. И.* Граничные значения аналитических функций. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. – 336 с.
16. *Arov D. Z., Nudelman M. A.* Passive linear stationary dynamical scattering systems with continuous time // Integr. Equat., Oper. Theory. – 1996. – **24**, – № 1. – P. 1 – 45.

Получено 22.09.97