УДК 517.5

Д. М. Бушев (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ З НЕВЕЛИКОЮ ГЛАДКІСТЮ

We prove that approximations of classes of periodic functions with not large smoothness in the metrics of spaces C and L by different linear methods of the summation of Fourier series are asymptotically equal to least upper bounds of the best approximations of these classes by trigonometric polynomials of degree at most $(n-1)$. We establish that the Fejér method is asymptotically best among the all positive linear methods of approximation of these classes.

Доведено, що наближення класів періодичних функцій з невеликою гладкістю в метриках просторів C і L різними лінійними методами підсумовування рядів Фур'є асимптотично рівні точним верхнім межам найкращих наближень цих класів тригонометричними поліномами степеня, що не перевищує $(n-1)$. Встановлено, що метод Фейєра є асимптотично найкращим серед усіх додатних лінійних методів наближення цих класів.

Позначимо через $\tilde{L}_p\,(1\le p<\infty)$, $\tilde{L}_\infty$, $\tilde{C}$ простори 2π-періодичних функцій, відповідно сумовних в p-му степені, істотно обмежених та неперервних з нормами $\|f\|_{\tilde{p}} = \left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\right)^{1/p}$, $\|f\|_{\tilde{\infty}} = \operatorname*{sup\,vrai}_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|$, $\|f\|_{\tilde{C}} = \max\limits_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|$; $E_n(f)_{\tilde{X}} = \inf\limits_{T_{n-1}}\left\|f-T_{n-1}\right\|$ та $E_n(M)_{\tilde{X}} = \sup\limits_{f\in M}E_n(M)_{\tilde{X}}$ — найкраще наближення відповідно функції $f\in\tilde{X}$ та множини $M\subset\tilde{X}$ тригонометричними поліномами $T_{n-1}(x)$ порядку не вищого ніж $(n-1)$ в метриці простору $\tilde{X}$ ($\tilde{X}=\tilde{L}_p\,(1\le p\le\infty)$ або $\tilde{X}=\tilde{C}$); A_n та A_n^+ — довільні лінійні та лінійні додатні оператори, що відображають простір $\tilde{X}$ в підпростір всіх тригонометричних поліномів степеня не вищого ніж $(n-1)$;

$$U_n(\Lambda,f,x)=\frac{1}{\pi}(\hat{\lambda}_n*f)(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x-t)\hat{\lambda}_n(t)\,dt,$$

та (1)

$$U_n^+(\Lambda,f,x)=\frac{1}{\pi}(\hat{\lambda}_n^+*f)(x)$$

— лінійний та лінійний додатний оператори відповідно з ядрами

$$\hat{\lambda}_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}\cos kt,\qquad \hat{\lambda}_k^+(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}\cos kt\ \ge 0; \tag{2}$$

$\mathcal{E}(M,U_n(\Lambda))_{\tilde{X}} = \sup\limits_{f\in M}\|f-U_n(\Lambda,t)\|_{\tilde{X}}$ — наближення множини M заданим лінійним оператором $U_n(\Lambda,f,x)$; $\mathcal{E}_n(M)_{\tilde{X}} = \inf\limits_{A_n}\sup\limits_{f\in M}\|f-A_n(t)\|_{\tilde{X}}$ та $\mathcal{E}_n^+(M)_{\tilde{X}} = \inf\limits_{A_n^+}\sup\limits_{f\in M}\left\|f-A_n^+(t)\right\|_{\tilde{X}}$ — найкраще наближення множини M відповідно лінійними операторами A_n та A_n^+.

Нехай $\psi(k)$ — довільна фіксована функція натурального аргументу, $\psi(k)\ne 0$, β — задане дійсне число. Припустимо, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)\cos(kx+\beta\pi/2)+b_k(f)\sin(kx+\beta\pi/2)\right),$$

де $a_k(f)$ та $b_k(f)$ — коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, є рядом Фур'є деякої сумовної функції, яку позначимо через $f_\beta^\psi(x)$, а класи неперервних та сумовних в p-му степені функцій $f(x)$, для яких відповідно $\left\|f_\beta^\psi\right\|_{\bar\infty} \le 1$ та $\left\|f_\beta^\psi\right\|_{\bar p} \le 1$ позначимо через $C_{\beta,\infty}^\psi$ та $L_{\beta,p}^\psi$. Такі класи поріодичних функцій були вперше введені О. І. Степанцем в [1].

Якщо при $k \ge 1$ та довільному β

$$\psi(k) \ge \psi(k+1) \quad \text{та} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)/k < \infty, \tag{3}$$

а при парному β

$$\Delta_2\psi(k) = \psi(k) - 2\psi(k+1) + \psi(k+2) \ge 0 \quad \text{та} \quad \lim_{k\to\infty}\psi(k) = 0, \tag{4}$$

то (див., наприклад, [2, с. 28, 29]) класи $C_{\beta,\infty}^\psi$ та $L_{\beta,p}^\psi$ співпадають з класами функцій, що подаються у вигляді згорток

$$f(x) = a_0(f)/2 + \frac{1}{2}(\varphi * \tilde D_{\psi,\beta})(x), \tag{5}$$

де $\int_0^{2\pi}\varphi(u)\,du = 0$ $(\varphi \perp 1)$ $\tilde D_{\psi,\beta}(t)$ — сумовна функція, що має ряд Фур'є $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos(kt + \beta\pi/2)$ і відповідно $\|\varphi\|_{\bar\infty} \le 1$ та $\|\varphi\|_{\bar p} \le 1$.

При $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, класи $C_{\beta,\infty}^\psi$ та L_β^ψ співпадають з відомими класами $W_{\beta,\infty}^r$ та $W_{\beta,p}^r$ диференційовних функцій в розумінні Вейля – Надя. Якщо для послідовності $\psi(k)$ виконуються умови (4), то вона не зростає. Отже, якщо при $k \ge 1$ справедливі нерівності

$$\Delta_2\psi(k) \ge 0 \quad \text{та} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)/k < \infty, \tag{6}$$

то послідовність $\psi(k)$ задовольняє умови (3), (4) і класи $L_{\beta,p}^\psi$ співпадають з класами функцій, що подаються у вигляді згорток (5).

Одержані результати з наближення класів $L_{\beta,p}^\psi$ включають в себе відомі твердження для класів $W_{\beta,p}^r$, і для класів функцій з невеликою гладкістю виявляють нові факти. Один з них полягає в тому, що якщо послідовність $\psi(k)$ достатньо повільно прямує до нуля, то для більшості класичних лінійних методів підсумовування рядів Фур'є величини $\mathcal{E}(L_{\beta,p}^\psi, U_n(\Lambda))_{\bar p}$ і $E_n(L_{\beta,p}^\psi)_{\bar p}$ при $p = 1$ і $p = \infty$ асимптотично рівні. Асимптотична рівність величин $\mathcal{E}(L_{\beta,p}^\psi, S_n)_{\bar p}$ і $E_n(L_{\beta,p}^\psi)_{\bar p}$ при $p = 1$ і $p = \infty$ для класів цілих функцій, які подаються у вигляді згортки (5) з парним або непарним ядром, була раніше встановлена О. І. Степанцем в [2, с. 260], де $S_n(f, x) = a_0(f)/2 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$ — частинні суми Фур'є порядку $(n-1)$ функції $f(x)$. В [3] за певних умов, накладених на функції $\psi(t)$, була встановлена асимптотична рівність величин $\mathcal{E}(L_{\beta,p}^\psi, S_n)_{\bar C}$ і $\mathcal{E}(L_{\beta,p}^\psi, Z_n^s)_{\bar C}$, де

$$Z_n^s(f,x) = a_0(f)/2 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1-(k/n)^s\right)\left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right), \quad s > 0,$$

— частинні суми Зигмунда порядку $(n-1)$ функції $f(x)$.

Відмітимо, що замість послідовностей $\psi(k)$ і $\lambda_k^{(n)}$ зручно розглядати задані відповідно на проміжках $[0,+\infty)$ і $[0,n]$ функції $\psi(u)$ та $\lambda_n(u)$ такі, що при $u=k$ справедливі рівності $\psi(u)=\psi(k)$ і $\lambda_n(u)=\lambda_k^{(n)}$. Якщо на проміжку $[0,+\infty)$ функція $\psi(u)$

$$\text{опукла донизу і } \int_1^\infty (\psi(u)/u)du < \infty, \tag{7}$$

то з (7) випливає (6). Згідно з лемою 6.1.2 (див. [4, с. 255]) функція $\psi(u)$ в кожній точці проміжку $[0,+\infty)$ має скінченні односторонні похідні. Тому похідні функції $\psi(u)$ можна означити так: $\psi'(u) = \psi'(u+0)$. Через K_i будемо позначати додатні константи, взагалі кажучи, різні. Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо функція $\psi(u)$ задовольняє умови (7) і*

$$n|\psi'(n)| = O(\psi(n)), \tag{8}$$

то при $n\to\infty$, $p=1$ і $p=\infty$ справедливі асимптотичні рівності

$$\mathcal{E}(L^\psi_{\beta,p}, S_n)_{\tilde{p}} = \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\ln n + \frac{2}{\pi}|\sin(\beta\pi/2)|\sum_{k=n}^\infty \psi(k)/k + O(\psi(n)). \tag{9}$$

Нехай функція $\psi(u)$ задовольняє умови (7),

$$\lim_{u\to\infty}\frac{u|\psi'(u)|\ln u}{\psi(u)} = 1, \tag{10}$$

$$\lambda_n(0) = 1, \tag{11}$$

на сегменті $[0,n]$ функція $\lambda_n(u)$ не зростає, її графік має скінченне, незалежне від числа n, число точок перегину і на сегменті $[0,n]$

$$(1-\lambda_n(u))\psi(u) < K_1\psi(n). \tag{12}$$

Тоді при $n\to\infty$, $p=1$ і $p=\infty$ мають місце асимптотичні рівності

$$\mathcal{E}(L^\psi_{\beta,p}, U_n(\Lambda))_{\tilde{p}} = \frac{2}{\pi}|\sin(\beta\pi/2)|\sum_{k=n}^\infty \psi(k)/k + O(\psi(n)\ln n), \tag{13}$$

де число β не є парним.

Доведення. При $p=\infty$ асимптотичну рівність (9) було встановлено в [3]. Умови (7) і (10) задовольняють, наприклад, функції $\psi(u) = (\ln(u+2)\ln^\alpha(\ln(u+3)))^{-1}$, де $\alpha>1$, і при їх виконанні другий член в асимптотичній рівності (9) є головним. Дійсно, використовуючи правило Лопіталя і рівність (10), маємо

$$\lim_{n\to\infty}(\psi(n)\ln n / \sum_{k=n}^\infty \psi(u)/u) = \lim_{u\to\infty}(\psi(u)\ln u / \int_u^\infty(\psi(t)/t)dt) =$$

$$= \lim_{u\to\infty}\frac{u\psi'(u)\ln u}{-\psi(u)} - 1 = 0.$$

Із леми 2 в [5, с. 12] випливає, що якщо функція

$$\tau_n(u) = \begin{cases}(1-\lambda_n(u))\psi(u)/\psi(n), & 0\le u<n; \\ \psi(u)/\psi(n), & u\ge n,\end{cases} \tag{14}$$

неперервна на проміжку $[0, +\infty)$, а функція $\hat{\tau}_n(t) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau_n(u)\cos(ut + \beta\pi/2)\,du$ абсолютно інтегровна на всій дійсній осі, то при $n \to \infty$ справедлива рівність

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\beta,\infty}, U_n(\Lambda))_{\tilde{C}} = \psi(n)\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\hat{\tau}_n(t)|\,dt + O(\psi(n)a(\hat{\tau}_n)), \tag{15}$$

де

$$a(\hat{\tau}_n) = \int\limits_{|t|>\pi/2}|\hat{\tau}_n(t)|\,dt. \tag{16}$$

Із леми 2 в [6, с. 41] випливає, що рівність (15) справедлива і для величин $\mathcal{E}(L^\psi_{\beta,1}, U_n(\Lambda))_{\tilde{1}}$. Отже, якщо функція $\hat{\tau}_n(t)$ абсолютно інтегровна на всій дійсній осі, то при $n \to \infty$ справедлива рівність

$$\mathcal{E}(L^\psi_{\beta,1}, U_n(\Lambda))_{\tilde{1}} = \mathcal{E}(C^\psi_{\beta,\infty}, U_n(\Lambda))_{\tilde{C}} + O(\psi(n)a(\hat{\tau}_n)). \tag{17}$$

Із (14) випливає, що для сум Фур'є $S_n(f, x)$ функція

$$\tau_n(u) = \begin{cases} 0, & 0 \le u < n-1; \\ u-n+1, & n-1 \le u < n; \\ \psi(u)/\psi(n), & u \ge n, \end{cases} \tag{18}$$

неперервна на проміжку $[0, +\infty)$ і в лемі 4.1 з [2, с. 58] встановлено, що функція $\hat{\tau}_n(t)$ абсолютно інтегровна на всій дійсній осі. Тому із (17) випливає рівність

$$\mathcal{E}(L^\psi_{\beta,1}, S_n)_{\tilde{1}} = \mathcal{E}(C^\psi_{\beta,\infty}, S_n)_{\tilde{C}} + O(\psi(n)a(\hat{\tau}_n)). \tag{19}$$

Доведемо, що

$$a(\hat{\tau}_n) < K_2. \tag{20}$$

Оскільки функція $\tau_n(u)$, яка задається рівністю (18), абсолютно неперервна на всій дійсній осі, то, інтегруючи частинами і враховуючи, що $\lim\limits_{u\to\infty}\tau_n(u) = 0$, маємо

$$\hat{\tau}_n(t) = -\frac{1}{\pi t}\int\limits_0^\infty \tau_n'(u)\sin(ut + \beta\pi/2)\,du. \tag{21}$$

Використовуючи рівність (21), нерівності Гельдера і Мінковського, отримуємо

$$\int\limits_{|t|>\pi/2}|\hat{\tau}_n(t)|\,dt \le \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{|t|>\pi/2}\frac{dt}{t^2}\right)^{1/2}\left(\int\limits_{|t|>\pi/2}\left|\int\limits_0^\infty \tau_n'(u)\sin(ut + \beta\pi/2)\,du\right|^2 dt\right)^{1/2} <$$

$$< \frac{2}{\pi^{3/2}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^\infty \tau_n'(u)\sin(ut + \beta\pi/2)\,du\right|^2 dt\right)^{1/2} \le$$

$$\leq \frac{2}{\pi^{3/2}}\left(|\sin(\beta\pi/2)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \tau_n'(u) \cos ut du \right|^2 dt \right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + |\cos(\beta\pi/2)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \tau_n'(u) \sin ut du \right|^2 dt \right)^{1/2} \right). \tag{22}$$

За теоремою Планшереля (див. [7, с. 257]), використовуючи (18), маємо

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \tau_n'(u) \cos ut du \right|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \tau_n'(u) \sin ut du \right|^2 dt \right)^{1/2} =$$

$$= \pi \left(\int_0^{\infty} |\tau_n'(u)|^2 du \right)^{1/2} = \pi \left(\int_{n-1}^{n} du + \left(\int_n^{\infty} |\psi'(u)|^2 du \right) / \psi^2(n) \right)^{1/2}. \tag{23}$$

Оскільки, згідно з умовами (7), функція $|\psi'(u)| = -\psi'(u)$ незростаюча і $\lim\limits_{u\to\infty} \psi(u) = 0$, то, використовуючи співвідношення (8), одержуємо

$$\left(\int_n^{\infty} |\psi'(u)|^2 du \right) / \psi^2(n) < \left(|\psi'(n)| \int_n^{\infty} |\psi'(u)| du \right) / \psi^2(n) =$$

$$= |\psi'(n)| / \psi(n) < K_3 / n. \tag{24}$$

Із співвідношень (16), (22) – (24) випливає (20). Оскільки асимптотична рівність (9) справедлива при $p = \infty$, то із співвідношень (19), (20) випливає, що ця рівність має місце і при $p = 1$.

Оскільки операція згортки комутативна, асоціативна та дистрибутивна відносно додавання, то, використовуючи рівності (1), (2), (5), отримуємо

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,p}, U_n(\Lambda))_{\bar{p}} = \sup_{\|\varphi\|_{\bar{p}} \leq 1, \varphi \perp 1} \left\| \frac{1}{\pi}\left(\varphi * \tilde{D}_{\psi,\beta}\right) - \frac{1}{\pi^2}\left(\varphi * \tilde{D}_{\psi,\beta}\right) * \hat{\lambda}_n \right\|_{\bar{p}} =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_{\bar{p}} \leq 1, \varphi \perp 1} \left\| \frac{1}{\pi} \varphi * \left(\tilde{D}_{\psi,\beta} - \frac{1}{\pi} \tilde{D}_{\psi,\beta} * \hat{\lambda}_n \right) \right\|_{\bar{p}}. \tag{25}$$

Відомо, що коефіцієнти Фур'є функції $\frac{1}{\pi}(f * \varphi)$ обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} a_k\left(\frac{1}{\pi} f * \varphi\right) &= a_k(f) a_k(\varphi) - b_k(f) b_k(\varphi), \\ b_k\left(\frac{1}{\pi} f * \varphi\right) &= a_k(f) b_k(\varphi) - b_k(f) a_k(\varphi). \end{aligned} \tag{26}$$

Із рівностей (11), (25), (26) випливає

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,p}, U_n(\Lambda))_{\bar{p}} = \sup_{\|\varphi\|_{\bar{p}} \leq 1, \varphi \perp 1} \left\| \frac{1}{\pi} \varphi * g^{\lambda}_{\psi,\beta} \right\|_{\bar{p}}, \tag{27}$$

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,p}, S_n)_{\bar{p}} = \sup_{\|\varphi\|_{\bar{p}} \leq 1, \varphi \perp 1} \left\| \frac{1}{\pi} \varphi * \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \beta\pi/2) \right) \right\|_{\bar{p}}, \tag{28}$$

де функція $g^{\lambda}_{\psi,\beta}(t) = \tilde{D}_{\psi,\beta}(t) - \frac{1}{\pi}\Big(\tilde{D}_{\psi,\beta} * \hat{\lambda}_n\Big)(t)$ має ряд Фур'є

$$\sum_{k=1}^{n-1}\Big(1-\lambda_k^{(n)}\Big)\psi(k)\cos(kt+\beta\pi/2) + \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos(kt+\beta\pi/2). \tag{29}$$

З рівностей (27) – (29), використовуючи узагальнену нерівність Мінковського, отримуємо

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,p}, S_n)_{\tilde{p}} - \gamma_n(\psi,\lambda) \le \mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,p}, U_n(\Lambda))_{\tilde{p}} \le \mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,p}, S_n)_{\tilde{p}} + \gamma_n(\psi,\lambda), \tag{30}$$

$$\gamma_n(\psi,\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n-1}\mu_n(k)\psi(k)\cos(kt+\beta\pi/2)\right|dt, \tag{31}$$

$$\mu_n(k) = 1 - \lambda_k^{(n)}. \tag{31a}$$

В [8, с. 254] доведено нерівність

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|a_0/2 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k\cos kx + b_x\sin kx)\right|dx - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\xi\Big(b_k, \sqrt{a_{n-k}^2 + b_{n-k}^2}\Big)}{k}dx\right| \le$$

$$\le K_4(|a_0| + \sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)\big(|\Delta_2 a_{k-1}| + |\Delta_2 b_{k-1}|\big)/n, \tag{32}$$

де $\Delta_2 u_k = u_k - 2u_{k+1} + u_{k+2}$ — другі різниці послідовності u_k,

$$\xi(t,u) \le \pi|t|/2 + |u|. \tag{33}$$

Якщо $a(k) = \mu_n(k)\psi(k)$, то із співвідношень (31) – (33) маємо

$$\gamma_n(\psi,\lambda) \le \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\xi(-\mu_n(k)\psi(k)\sin(\beta\pi/2), \quad \mu_n(n-k)\psi(n-k)) +$$

$$+ K_5\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)(|\Delta_2 a(k-1)|)/n, \tag{34}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\xi(-\mu_n(k)\psi(k)\sin(\beta\pi/2), \quad \mu_n(n-k)\psi(n-k)) \le$$

$$\le \frac{\pi}{2}|\sin(\beta\pi/2)|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\mu_n(k)\psi(k) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\mu_n(n-k)\psi(n-k) <$$

$$< K_6\psi(n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} < K_6\psi(n)(\ln n + 1). \tag{35}$$

Доведемо, що

$$\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)|\Delta_2 a(k-1)| < K_7\psi(n)n\ln n. \tag{36}$$

Можна перевірити, що мають місце рівності

$$\Delta(x(k)y(k)) = y(k)\Delta x(k) + x(k+1)\Delta y(k), \tag{37}$$

$$\Delta_2(x(k)y(k)) = y(k+1)\Delta_2 x(k) + \Delta x(k)\Delta y(k) + \\ + \Delta x(k+1)\Delta y(k) + x(k+2)\Delta_2 y(k). \tag{38}$$

Із співвідношень Абеля випливає

$$\sum_{k=1}^{n-1} x(k)\Delta y(k) = x(1)y(1) - x(n-1)y(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta x(k)y(k+1), \tag{39}$$

де $\Delta u(k) = u(k) - u(k+1)$ — перші різниці послідовності $u(k)$. Використовуючи рівність (38), одержуємо

$$\Delta_2 a(k-1) = \Delta_2 \mu_n(k-1)\psi(k-1) = \psi(k)\Delta_2\mu_n(k-1) + \\ + \Delta\mu_n(k-1)\Delta\psi(k-1) + \Delta\mu_n(k)\Delta\psi(k-1) + \mu_n(k+1)\Delta_2\psi(k-1). \tag{40}$$

На підставі того, що послідовність $\lambda_k^{(n)}$ незростаюча, із співвідношень (11), (31) випливає, що при $k \geq 0$

$$\mu_n(0) = 0, \qquad \mu_n(k) \geq 0, \qquad \Delta\mu_n(k) \leq 0. \tag{41}$$

Оскільки послідовність $\psi(k)$ опукла донизу та $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(k) = 0$, то при $k \geq 0$ мають місце нерівності:

$$\psi(k) \geq 0, \qquad \Delta\psi(k) \geq 0, \qquad \Delta_2\psi(k) \geq 0. \tag{42}$$

Використовуючи співвідношення (40) – (42), маємо

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)|\Delta_2 a(k-1)| \leq \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)(\psi(k)|\Delta_2\mu_n(k-1)| - \\ - \Delta\psi(k-1)(\Delta\mu_n(k-1) + \Delta\mu_n(k)) + \mu_n(k+1)\Delta_2\psi(k-1)). \tag{43}$$

Використовуючи співвідношення (37), (39), (41), отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\psi(k)\Delta_2\mu_n(k-1) = -(n-1)(\psi(1)\mu_n(1) + \\ + \psi(n-1)(\mu_n(n-1) - \mu_n(n))) - 2\sum_{k=1}^{n-2} k\psi(k)\Delta\mu_n(k) + \\ + (n-2)\sum_{k=1}^{n-2}\psi(k)\Delta\mu_n(k) + \sum_{k=2}^{n-1} k(n-k)\Delta\psi(k-1)\Delta\mu_n(k-1), \tag{44}$$

$$\sum_{k=1}^{n-2} k\psi(k)\Delta\mu_n(k) = \psi(1)(\mu_n(1) - \mu_n(2)) - \\ -(n-2)(\psi(n-2)(\mu_n(n-1) - \mu_n(n)) - \sum_{k=1}^{n-3} k\Delta\psi(k)\mu_n(k+1) + \\ + \sum_{k=1}^{n-3}\psi(k+1)\mu_n(k+1), \tag{45}$$

$$\sum_{k=1}^{n-2}\psi(k)\Delta\mu_n(k) = \psi(1)(\mu_n(1)-\mu_n(2))-$$

$$-\psi(n-2)(\mu_n(n-1)-\mu_n(n)) - \sum_{k=1}^{n-3}\Delta\psi(k)\mu_n(k+1). \tag{46}$$

Міркуючи аналогічно, отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)\mu_n(k+1)\Delta_2\psi(k-1) = (n-1)(\mu_n(2)(\psi(0)-\psi(1))-$$

$$-\mu_n(n)(\psi(n-1)-\psi(n)))-2\sum_{k=1}^{n-2}k\Delta\psi(k)\mu_n(k+1) +$$

$$+ (n-2)\sum_{k=1}^{n-2}\Delta\psi(k)\mu_n(k+1) + \sum_{k=2}^{n-1}k(n-k)\Delta\psi(k-1)\Delta\mu_n(k). \tag{47}$$

Внаслідок того, що функція $\psi(k)$ незростаюча, невід'ємна і опукла донизу на проміжку $[0,+\infty)$, функція $-\psi'(u)$ не зростає на цьому проміжку і, згідно з теоремою Лагранжа, при $k\geq 0$ мають місце співвідношення

$$\Delta\psi(k) \leq -\psi'(k) = |\psi'(k)|. \tag{48}$$

Із умови (10) випливає

$$\lim_{k\to\infty} k|\psi'(k)|/\psi(k) = 0. \tag{49}$$

Із співвідношень (48), (49) випливає, що при $k\geq 0$ справедливі нерівності

$$k\Delta\psi(k) \leq k|\psi'(k)| < K_8\psi(k). \tag{50}$$

Із нерівності (50) випливає, що при $k\geq 0$ має місце нерівність

$$\psi(k) \leq K_9\psi(k+1). \tag{51}$$

Використовуючи нерівності (41), (42), (50), маємо

$$\left|\sum_{k=2}^{n-1}k(n-k)\Delta\psi(k-1)\Delta\mu_n(k-1)\right| \leq 2\left|\sum_{k=2}^{n-1}(k-1)(n-k)\Delta\psi(k-1)\Delta\mu_n(k-1)\right| <$$

$$< 2K_8\left|\sum_{k=2}^{n-1}(n-k)\psi(k-1)\Delta\mu_n(k-1)\right| \leq$$

$$\leq 2K_8\left(\left|\sum_{k=1}^{n-2}k\psi(k)\Delta\mu_n(k)\right|+(n-1)\left|\sum_{k=1}^{n-2}\psi(k)\Delta\mu_n(k)\right|\right), \tag{52}$$

$$\left|\sum_{k=2}^{n-1}k(n-k)\Delta\psi(k-1)\Delta\mu_n(k)\right| < (n-1)|(\psi(n-2)-$$

$$-\psi(n-1))(\mu_n(n-1)-\mu_n(n))| + \left|\sum_{k=2}^{n-2}k(n-k)\Delta\psi(k-1)\Delta\mu_n(k)\right| <$$

$$< (n-1)|(\psi(n-2)-\psi(n-1))(\mu_n(n-1)-\mu_n(n))| +$$

$$+ 2K_8\left(\left|\sum_{k=1}^{n-3}k\psi(k)\Delta\mu_n(k+1)\right|+(n-1)\left|\sum_{k=1}^{n-3}\psi(k)\Delta\mu_n(k+1)\right|\right). \tag{53}$$

Із рівностей (45), (46) і нерівностей (41), (42), (50), (51) випливає

$$\left|\sum_{k=1}^{n-2} k\psi(k)\Delta\mu_n(k)\right| \le \psi(1)\mu_n(1) + K_9\psi(2)\mu_n(2) +$$

$$+ K_9(n-2)(\psi(n-1)(\mu_n(n-1) + K_9\psi(n)\mu_n(n)) +$$

$$+ \left(K_8 K_9 + 1\right)\sum_{k=1}^{n-3}\psi(k+1)\mu_n(k+1), \tag{54}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n-2} \psi(k)\Delta\mu_n(k)\right| \le \psi(1)\mu_n(1) + K_9\psi(2)\mu_n(2) +$$

$$+ K_9\psi(n-1)\mu_n(n-1) + K_9\psi(n)\mu_n(n)) + K_8 K_9 \sum_{k=1}^{n-3}\psi(k+1)\mu_n(k+1), \tag{55}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n-3} k\psi(k)\Delta\mu_n(k+1)\right| < K_9\left|\sum_{k=1}^{n-3}(k+1)\psi(k+1)\Delta\mu_n(k+1)\right| \le$$

$$\le K_9\left|\sum_{k=1}^{n-2} k\psi(k)\Delta\mu_n(k)\right|, \tag{56}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n-3} \psi(k)\Delta\mu_n(k+1)\right| < K_9\left|\sum_{k=1}^{n-2}\psi(k)\Delta\mu_n(k)\right|. \tag{57}$$

Із нерівностей (54) – (57), використовуючи нерівність (12) і рівність (31а), отримуємо

$$\left|\sum_{k=1}^{n-2} k\psi(k)\Delta\mu_n(k)\right| < K_{10}\psi(n) + K_{11} n\psi(n),$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n-3} k\psi(k)\Delta\mu_n(k+1)\right| < K_9(K_{10}\psi(n) + K_{11} n\psi(n)), \tag{58}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n-2} \psi(k)\Delta\mu_n(k)\right| < K_{12}\psi(n) + K_{13}\psi(n)\ln n,$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n-3} \psi(k)\Delta\mu_n(k+1)\right| < K_9(K_{12}\psi(n) + K_{13}\psi(n)\ln n). \tag{59}$$

Із співвідношень (44) – (47), (52), (53), використовуючи нерівності (12), (51), (58), (59) і рівність (31а), маємо

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\psi(k)\Delta_2\mu_n(k-1)\right| < K_{14}\psi(n) n\ln n, \tag{60}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\left(-\Delta\psi(k-1)\Delta\mu_n(k-1) + \Delta\mu_n(k)) + \mu_n(k+1)\Delta_2\psi(k-1)\right)\right| <$$

$$< K_{15}\psi(n) n\ln n. \tag{61}$$

Якщо при $k \geq 0$ послідовність $\lambda_k^{(n)}$ опукла донизу або вгору, то з (31а) випливає, що послідовність $\mu_n(k)$ відповідно опукла вгору або донизу, тобто $\Delta_2\mu_n(k) \leq 0$ або $\Delta_2\mu_n(k) \geq 0$. Тоді із нерівностей (43), (60), (61) випливає (36).

Якщо графік функції $\lambda_n(u)$ має скінченне, незалежне від числа n, число точок перегину на сегменті $[0, n]$, то із рівності (31а) випливає, що графік функції $\mu_n(u)$ має такі ж властивості. Тому цей сегмент можна розбити на скінченне число сегментів, на яких графік функції $\mu_n(u)$ опуклий донизу або вгору. Тоді суму $\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)|\Delta_2\mu_n(k)|$ можна записати як скінченне число сум, для доданків яких знак другої різниці $\Delta_2\mu_n(k)$ не змінюється. Отже, міркуючи аналогічно, встановлюємо справедливість нерівності

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\psi(k)|\Delta_2\mu_n(k-1)| < K_{16}\psi(n)n\ln n. \tag{62}$$

Із нерівностей (45), (61), (62) випливає (36), а з (34) – (36) маємо

$$\gamma_n(\psi, \lambda) < K_{14}\psi(n)\ln n \tag{63}$$

Із нерівностей (30), (63) випливає, що при $p \geq 1$ і $n \to \infty$ справедливе співвідношення

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,p}, U_n(\Lambda))_{\tilde{p}} = \mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,p}, S_n)_{\tilde{p}} + O(\psi(n)\ln n). \tag{64}$$

Із співвідношень (9), (64) випливає асимптотична рівність (13) і теорему 1 доведено.

Для більшості лінійних методів підсумовування рядів Фур'є всі умови теореми 1, крім (12), перевірити неважко. У зв'язку з цим сформулюємо достатні умови для функції $\lambda_n(u)$, при яких має місце нерівність (12). Справедливе твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай функція* $\psi(u)$ *задовольняє умови* (7), (10), $\lambda_n(0) = 1$, *на сегменті* $[0, n]$ *функція* $\lambda_n(u)$ *не зростає, неперервна, її графік має скінченне, незалежне від числа* n *число точок перегину і на сегменті* $[0, n]$

$$\mu_n(u) = 1 - \lambda_n(u) < K_{18}(u/n)^s, \tag{65}$$

де $s > 0$. *Тоді має місце нерівність* (12), *отже, при* $n \to \infty$, $p = 1$ *і* $p = \infty$ *справедливі асимптотичні рівності* (13).

Доведення. Згідно з теоремою 1, достатньо довести нерівність (12). Покажемо, що знайдеться число u_0 таке, що при $n > u \geq u_0 > 0$ справедлива нерівність

$$((u^s\psi(u))' = su^{s-1}(\psi(u) + u\psi'(u)/s) \geq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-u\psi'(u)/\psi(u) \leq s), \quad s > 0. \tag{66}$$

Співвідношення (66) випливає з рівності (10). Внаслідок (66) функція $u^s\psi(u)/n^s$ неспадна на сегменті $[u_0, n]$ і при $u_0 \leq u \leq n$

$$(u/n)^s\psi(u) \leq \psi(n). \tag{67}$$

Оскільки функція $\psi(u)$ не зростає на проміжку $[0, \infty)$, то при $0 \leq u \leq u_0$, використовуючи нерівність (67), маємо

$$(u/n)^s\psi(u) < (u_0/n)^s\psi(0) \leq \psi(0)\psi(n)/\psi(u_0). \tag{68}$$

З нерівностей (65), (67), (68) випливає (12), і наслідок 1 доведено.

***Наслідок* 2.** *Нехай функція* $\psi(u)$ *задовольняє умови* (7), (10), *на сегменті* $[0, n]$ *функція* $\lambda_n(u)$ *не зростає, її графік випуклий вгору і*

$$\lambda_n(0) = 1 \quad i\ \lambda_n(n) > -K_{19}. \tag{69}$$

Тоді при $n \to \infty$, $p = 1$ *і* $p = \infty$ *справедливі асимптотичні рівності* (13).

Доведення. Згідно з наслідком 1, достатньо довести нерівність (65). Оскільки функція $\lambda_n(u)$ не зростає і опукла вгору на сегменті $[0, n]$, то функція $\mu_n(u)$ неспадна і опукла донизу на цьому сегменті. Тому із співвідношень (69) випливає, що на сегменті $[0, n]$ справедлива нерівність

$$\mu_n(u) \le 2u(1 + K_{20})/\pi n. \tag{70}$$

Нерівність (65) випливає із (70) і наслідок 2 доведено.

Теорему 1 і наслідки 1, 2 можна сформулювати і, міркуючи аналогічно, довести, не використовуючи функцій $\psi(u)$ і $\lambda_n(u)$, пов'язаних з послідовностями $\psi(k)$ і $\lambda_k^{(n)}$. Справедливе наступне твердження.

Наслідок 3. *Нехай послідовність* $\psi(k)$ *при* $k \ge 0$ *задовольняє умови* (6) *і*

$$\lim_{k\to\infty} k\Delta\psi(k)\ln k/\psi(k) = 1, \tag{71}$$

$$\lambda_0^{(n)} = 1, \quad \textit{при } 0 \le k \le n \textit{ послідовність } \lambda_k^{(n)}$$

$$\textit{не зростає і } \left(1 - \lambda_k^{(n)}\right)\psi(k) < K_1\psi(n), \tag{72}$$

$$\textit{при } 0 \le k \le n \textit{ послідовність } \Delta_2\lambda_k^{(n)} \textit{ має скінченне,}$$

$$\textit{незалежне від числа } n \textit{ число змін знаку}. \tag{73}$$

Тоді при $n \to \infty$, $p = 1$ *і* $p = \infty$ *справедливі асимптотичні рівності* (13).

Наслідок 4. *Нехай послідовність* $\psi(k)$ *задовольняє умови* (6), (71), *послідовність* $\lambda_k^{(n)}$ *задовольняє* (72), (73) *і при* $0 \le k \le n$ *справедлива нерівність* $\mu_n(k) = 1 - \lambda_n(k) < K_{18}(k/n)^s$, *де* $s > 0$. *Тоді при* $n \to \infty$, $p = 1$ *і* $p = \infty$ *справедливі асимптотичні рівності* (13).

Наслідок 5. *Нехай послідовність* $\psi(k)$ *задовольняє умови* (6), (71), *послідовність* $\lambda_k^{(n)}$ *задовольняє* (72), *при* $0 \le k \le n-2$ *мають місце нерівності* $\Delta_2\lambda_k^{(n)} \le 0$ *і* $\lambda_n^{(n)} > -K_{19}$. *Тоді при* $n \to \infty$, $p = 1$ *і* $p = \infty$ *справедливі асимптотичні рівності* (13).

Теорема 2. *Якщо послідовність* $\psi(k)$ *задовольняє умови* (6), (71), *то при* $p = 1$ *і* $p = \infty$ *асимптотичні рівності* (13) *справедливі для сум Зигмунда, Рогозинського, Валле – Пуссена, Стеклова, Рісса і Чезаро.*

Доведення. Оскільки для сум Зигмунда $\lambda_k^{(n)} = 1 - (k/n)^s$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $s > 0$, то функція $\lambda_n(u) = 1 - (u/n)^s$ задовольняє умови наслідку 1. Тому для сум Зигмунда справедливі асимптотичні рівності (13).

Оскільки для сум Рогозинського $\lambda_k^{(n)} = \cos(k\pi/2n)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, то функція $\lambda_n(u) = \cos(u\pi/2n)$ задовольняє умови наслідку 2. Отже, для сум Рогозинського справедливі асимптотичні рівності (13).

Для сум Валле – Пуссена

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, \quad k = 0, 1, \ldots, n-p-1, \quad 0 \le p \le n-1; \\ 1 - (k-n+p+1)/(p+1), \quad n-p \le k \le n-1, \end{cases}$$

функція

$$\lambda_n(u) = \begin{cases} 1, \quad 0 \le u \le n-p-1; \\ 1 - (u-n+p+1)/(p+1), \quad n-p-1 < u \le n-1, \end{cases}$$

задовольняє умови наслідку 2. Отже, для сум Валле – Пуссена справедливі асимптотичні рівності (13).

Для сум Рісса $\lambda_k^{(n)} = (1-(k/n)^2)^\delta$, $k=0,1,\dots,n-1$, $\delta>0$, і функція $\lambda_n(u) = (1-(u/n)^2)^\delta$ задовольняє всі умови наслідку 1, крім, можливо, (65). Якщо $0<\delta\le 1$, то

$$\mu_n(u) = 1-(1-(u/n)^2)^\delta \le (u/n)^2. \tag{74}$$

Якщо ж $\delta>1$, то, використовуючи нерівність Бернуллі, отримуємо

$$\mu_n(u) \le \delta(u/n)^2. \tag{75}$$

Із нерівностей (74), (75) випливає (65). Отже, функція $\mu_n(u)$ задовольняє умови наслідку 1 і для сум Рісса справедливі асимптотичні рівності (13).

Внаслідок того, що для сум Стєклова $\lambda_k^{(n)} = \sin(k\pi/n)/(k\pi/n)$, $k = 1,\dots,n-1$, $\lambda_0^{(n)}=1$, функція $\lambda_n(u) = \sin(u\pi/n)/(u\pi/n)$ не зростає на сегменті $[0,n]$ і її графік має єдину точку перегину на цьому сегменті. Оскільки при $0\le x\le\pi$ має місце нерівність $1-(\sin x)/x \le x^2/6$, то на сегменті $[0,n]$ справедлива нерівність $\mu_n(u) = 1-\lambda_n(u) \le (u\pi/n)^2/6$. Отже, функція $\mu_n(u)$ задовольняє умови наслідку 1, і для сум Стєклова справедливі асимптотичні рівності (13).

Для сум Чезаро

$$\lambda_k^{(n)} = (1-\alpha/(\alpha+n-k))\times\dots\times(1-\alpha/(\alpha+n-1)),$$
$$k=1,\dots,n-1, \qquad \lambda_0^{(n)}=1. \tag{76}$$

Якщо $\alpha=0$, то суми Чезаро перетворюються в суми Фур'є. Із рівності (76) випливає, що при $\alpha>0$ і $0\le k\le n-1$ послідовність $\lambda_k^{(n)}$ незростаюча і

$$\lambda_{k+1}^{(n)} = (1-\alpha/(\alpha+n-k-1))\,\lambda_k^{(n)}. \tag{77}$$

При $0\le k\le n-2$, використовуючи рівність (77), одержуємо

$$\Delta_2\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} - 2\lambda_{k+1}^{(n)} + \lambda_{k+2}^{(n)} = \lambda_k^{(n)}(1-2(1-\alpha/(\alpha+n-k-2)) +$$
$$+ (1-\alpha/(\alpha+n-k-2))(1-\alpha/(\alpha+n-k-1))) =$$
$$= \lambda_k^{(n)}\alpha(\alpha-1)/(\alpha+n-k-2)(\alpha+n-k-1). \tag{78}$$

Якщо $0\le k\le n-2$, то з рівностей (76), (78) випливає, що при $0<\alpha\le 1$ має місце нерівність $\Delta_2\lambda_k^{(n)}\le 0$, а при $\alpha>1$, $\Delta_2\lambda_k^{(n)}>0$. Отже, при $0<\alpha\le 1$ послідовність $\lambda_k^{(n)}$ задовольняє, на підставі того, що $\lambda_n^{(n)}=0$, умови наслідку 5. Тому для сум Чезаро при $0<\alpha\le 1$ мають місце асимптотичні рівності (13).

Із рівностей (76) випливає, що при $0\le k\le n$ справедлива нерівність

$$\mu_n(k) = 1-\lambda_k^{(n)} \le 1-(1-\alpha/(\alpha+n-k))^k = 1-((n-k)/(\alpha+n-k))^k. \tag{79}$$

Доведемо, що при $0\le k\le n$ і $\alpha>0$ має місце нерівність

$$\mu_n(k) \le (2+\alpha)k/n. \tag{80}$$

Для цього, згідно з співвідношенням (79), достатньо встановити, що при $0\le u\le n$ справедлива нерівність

$$((n-u)/(\alpha+n-u))^u \ge 1-(2+\alpha)u/n. \tag{81}$$

Оскільки при $0 \le u \le n$ і $\alpha > 0$ має місце нерівність $((n-u)/(\alpha+n-u))^u \ge 0$, а при $n/(2+\alpha) < u \le n$ справедлива нерівність $1-(2+\alpha)u/n < 0$, то для доведення нерівності (81) достатньо показати, що нерівність

$$f(u) = ((n-u)/(\alpha+n-u))^u + (2+\alpha)u/n - 1 \ge 0 \tag{82}$$

має місце на сегменті $[0, n/(2+\alpha)]$. Оскільки $f(0) = 0$, то для доведення нерівності (82) потрібно показати, що на сегменті $[0, n/(2+\alpha)]$ функція $f(u)$ не спадає, тобто на цьому сегменті справедлива нерівність

$$f'(u) = ((n-u)/(\alpha+n-u))^u(\ln(n-u)/(\alpha+n-u) -$$

$$- \alpha u/(n-u)(\alpha+n-u)) + (2+\alpha)/n \ge 0. \tag{83}$$

Оскільки функція $g(u) = \ln(n-u)/(\alpha+n-u) - \alpha u/(n-u)(\alpha+n-u) = -(\ln(1+\alpha/(n-u)) + \alpha u/(n-u)(\alpha+n-u))$ від'ємна на сегменті $[0, n/(2+\alpha)]$ і $0 \le ((n-u)/(\alpha+n-u))^u \le 1$, то

$$|((n-u)/(\alpha+n-u))^u g(u)| \le |g(u)| =$$

$$= \ln(1+\alpha/(n-u)) + \alpha u/(n-u)(\alpha+n-u). \tag{84}$$

Внаслідок того, що функція $|g(u)|$ неспадна на сегменті $[0, n/(2+\alpha)]$ і $\ln(1+x) \le x$, то на цьому сегменті має місце нерівність

$$|g(u)| \le \alpha/(n-(n/(2+\alpha)) +$$

$$+ (\alpha n/(2+\alpha))/(\alpha+n-n/(2+\alpha))(n-n/(2+\alpha)) < (2+\alpha)/n. \tag{85}$$

Із нерівностей (84), (85) випливає (83), а із (83) — (80). Тому при $\alpha > 0$ послідовність $\lambda_k^{(n)} = (1-\alpha/(\alpha+n-k)) \times \ldots \times (1-\alpha/(\alpha+n-1))$, $k = 1, \ldots, n-1$, $\lambda_0^{(n)} = 1$ задовольняє умови наслідку 4. Отже, для сум Чезаро при $\alpha > 0$ мають місце асимптотичні рівності (13) і теорему 2 доведено.

В [9] встановлено, що якщо послідовність $\psi(k)$ задовольняє умови (6), (71) і при $k \ge 1$ має місце нерівність

$$\Delta_2(1/\psi(k)) \le 0, \tag{86}$$

то при $n \to \infty$, $p = 1$ і $p = \infty$ справедливі асимптотичні рівності

$$\mathcal{E}_n^+(L_{\beta,p}^{\psi})_{\bar{p}} = \frac{2}{\pi}|\sin(\beta\pi/2)|\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)/k + O(\psi(n)\ln n), \tag{87}$$

де число β не є парним. Асимптотичні рівності (87) мають місце і без умови (86). Справедливе твердження.

Наслідок 6. *Якщо послідовність* $\psi(k)$ *задовольняє умови* (6), (71), *то при* $0 < s \le 1$, $p = 1$ *і* $p = \infty$ *справедливі асимптотичні рівності* (87) *і*

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^{\psi}, Z_n^s)_{\bar{p}} = \frac{2}{\pi}|\sin(\beta\pi/2)|\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)/k + O(\psi(n)\ln n). \tag{88}$$

Доведення. В [9] доведено, що якщо виконуються умови (6) і

$$\psi(n) = o\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)/k\right), \tag{89}$$

то при $n \to \infty$, $p = 1$ і $p = \infty$ справедливі асимптотичні рівності

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_{\tilde{p}} = \frac{2}{\pi}|\sin(\beta\pi/2)|\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)/k + O(\psi(n)), \tag{90}$$

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_{\tilde{p}} = \frac{2}{\pi}|\sin(\beta\pi/2)|\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)/k + O(\psi(n)). \tag{91}$$

Оскільки для операторів Зигмунда $Z^s_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\Big(f * \hat{\lambda}^s_n\Big)(x)$ при $0 < s \le 1$ послідовність $\lambda^{(n)}_k = 1 - (k/n)^s$ опукла донизу, тобто при $k \ge 0$ має місце нерівність $\Delta_2\lambda^{(n)}_k \ge 0$, то (див. [10, с. 652]) ядра операторів Зигмунда $\Big(\hat{\lambda}^s_n\Big)(t) = 1/2 + \sum_{k=1}^{n-1}(1-(k/n)^s\cos kt$ додатні. Тому при $0 < s \le 1$ оператори Зигмунда додатні. Отже, внаслідок теореми 2, справедливі співвідношення (88). Нехай виконується умова (71). Тоді виконується і умова (89). Дійсно, використовуючи правило Лопіталя, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty}(\psi(n)/\sum_{k=n}^{\infty}\psi(u)/u = \lim_{u\to\infty}(\psi(u)/\int_u^{\infty}(\psi(t)/t)\,dt) =$$

$$= \lim_{u\to\infty}\frac{u\psi'(u)}{-\psi(u)} = \lim_{u\to\infty}\frac{u|\psi'(u)|}{\psi(u)} = 0. \tag{92}$$

Оскільки, згідно з означеннями, має місце нерівність $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_{\tilde{p}} \le \mathcal{E}^+_n(L^{\psi}_{\beta,p})_{\tilde{p}}$, то із співвідношень (88), (90) випливає (87) і наслідок 6 доведено.

Зауваження. Якщо виконуються умови теореми 2, то із співвідношень (91), (92) випливає, що при $p = 1$ і $p = \infty$ головні члени асимптотичних рівностей для величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_{\tilde{p}}$ і $\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,p}, U_n(\Lambda))_{\tilde{p}}$ рівні, де $U_n(\Lambda, f, x)$ — лінійні оператори, перераховані в теоремі 2. Із співвідношень (87), (88) випливає, що метод Зигмунда при $0 < s \le 1$ є асимптотично найкращим серед усіх лінійних додатних методів наближення на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ при $p = 1$ і $p = \infty$ для послідовностей $\psi(k)$, які задовольняють умови (6), (71).

1. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. – Киев, 1983. – 57 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83. 10).
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
3. *Бушев Д. Н., Степанец А.И.* О приближении слабо дифференцируемых периодических функций // Укр. мат. жирн. – 1990. – **42**, №3. – С. 406 – 412.
4. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближений. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
5. *Рукасов В. И.* Приближение периодических функций линейными средними их рядов Фурье. – Киев, 1983. – 55 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83. 62).
6. *Новикова А. К.* О приближении периодических функций в пространствах C і L. – Киев, 1985. – С. 14 – 52. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85. 61).
7. *Никольский С. М.* Курс математического анализа: В 2-х т. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – 392 с.
8. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. II // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – **27**, №2. – С. 253 – 272.
9. *Бушев Д. М.* Наближення класів згорток лінійними методами підсумовування рядів Фур'є // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, №6. – С. 739 – 755.
10. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

Одержано 24. 04. 97,
після доопрацювання – 05. 05. 99