УДК 512.544

Л. А. Курдаченко (Днепропетр. ун-т),
Х. Отал (ун-т Сарагоссы, Испания)

ГРУППЫ, ВСЕ СОБСТВЕННЫЕ ФАКТОР-ГРУППЫ КОТОРЫХ ИМЕЮТ ЧЕРНИКОВСКИЕ КЛАССЫ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

We study groups whose all proper factor-groups are CC-groups.

Вивчаються групи, власні фактор-групи яких будуть CC-групами.

Во многих вопросах теории групп изучается влияние тех или иных систем собственных фактор-групп (фактор-групп по неединичным нормальным подгруппам) на строение всей группы. Так, большую роль играет семейство всех конечных фактор-групп при изучении алгоритмических проблем в конечно определенных группах (А. И. Мальцев [1]) и в теории многообразий [2]. Важная теорема Д. Робинсона о нильпотентности конечнопорожденной разрешимой группы, все конечные фактор-группы которой нильпотентны (см. [3], теорема 10.51) также указывает на роль семейства конечных фактор-групп. Большую роль играют фактор-группы по централизаторам главных факторов в теории формаций.

С другой стороны, достаточно давно в теории групп начато изучение строения группы с заданным семейством всех собственных фактор-групп. Первыми такими работами в теории бесконечных групп были работы М. Ньюмена [4, 5], в которых изучались группы с абелевыми собственными фактор-группами. Затем исследования в этом направлении были продолжены для других теоретико-групповых свойств: Д. Маккарти [6, 7] и Дж. Уилсон [8] изучали группы, все собственные фактор-группы которых конечны; С. Франциози, Ф. де Жиованни [9], Л. А. Курдаченко, В. Э. Горецкий, В. В. Пылаев [10] — группы с черниковскими собственными фактор-группами; Дж. Гровс [11], Д. Робинсон, Дж. Уилсон [12] — группы с собственными полициклическими фактор-группами; Д. Робинсон, Ж. Женг [13] рассмотрели группы, все собственные фактор-группы которых конечны над центрами или имеют конечные коммутанты. Исследования Д. Робинсона и Ж. Женга продолжены С. Франциози, Ф. де Жиованни, Л. А. Курдаченко [14], они рассмотрели группы, все собственные фактор-группы которых являются FC-группами. В настоящее время появились многообразные обобщения FC-групп, возникающие следующим образом. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Будем говорить, что G — $\mathfrak{X}C$-группа (или G имеет $\mathfrak{X}$-классы сопряженных элементов), если $G/C_G(x)^G \in \mathfrak{X}$ для любого $x \in G$ (здесь $x^G = \{g^{-1}xg \mid g \in G\}$). Из всех таких обобщений самым хорошо изученным оказался класс CC-групп — групп с черниковскими классами сопряженных элементов. Поэтому естественно возникает вопрос о изучении групп, не являющихся CC-группами, но любая собственная фактор-группа которых — CC-группа. Такие группы будем называть $JNCC$-группами. Этот класс групп будет расширением как групп с черниковскими собственными фактор-группами, так и групп с собственными FC-фактор-группами. При изучении $JNCC$-группы G возникают две противоположные ситуации, требующие различных подходов: $FC(G) \neq \langle 1 \rangle$ и $FC(G) = \langle 1 \rangle$. Здесь $FC(G)$ — FC-центр группы G — совокупность всех элементов, каждый из которых имеет конечное множество сопряженных. В данной работе изучена первая ситуация, т. е. изучены FC-гиперцентральные группы, все собственные фактор-группы которых являются CC-группами.

Начнем с рассмотрения более общей ситуации.

Лемма 1. *Пусть G — группа, любая собственная фактор-группа которой FC-гиперцентральна, L — ее нормальная нильпотентная подгруппа. Если $FC(G) = \langle 1 \rangle$, то L — абелева.*

Доказательство. Предположим, что L неабелева. Пусть A — максимальная G-инвариантная абелева подгруппа L, $Z/A = \zeta(L/A)$. Тогда и Z/A — неединичная G-инвариантная подгруппа L/A. Поскольку G/A — FC-гиперцентральна, то $Z/A \cap FC(G/A) \neq \langle 1 \rangle$. Пусть $A \neq x_0 A \in Z/A \cap FC(G/A)$, $X/A = \langle x_0 \rangle^G A/A$. Тогда X/A — конечнопорожденная абелева подгруппа, причем индекс $|G/A : C_{G/A}(X/A)|$ конечен. Пусть $Y/A = C_{G/A}(X/A)$. Из выбора A следует, что подгруппа X неабелева. Для любого $x \in X$ рассмотрим отображение

$$\varphi_x\colon a \to [a, x], \qquad a \in A.$$

Очевидно, что φ_x — эндоморфизм A. Если $y \in Y$, то $x^y = xu$ для некоторого элемента $u \in A$. Тогда

$$(a\varphi_x)^y = [a, x]^y = [a^y, x^y] = [a^y, xu] =$$

$$= [a^y, u][a^y, x]^u = [a^y, x] = (a^y)\varphi_x,$$

т. е. φ_x — $\mathbb{Z}Y$-эндоморфизм. Пусть $Z_1 = \zeta(L)$, тогда Z_1 — неединичная G-инвариантная подгруппа L. Вследствие выбора A имеем $Z_1 \leq A$. Поскольку G/Z_1 — FC-гиперцентральна, то и Y/Z_1 — FC-гиперцентральна. Очевидно, $Z_1 \leq C_A(X)$, поэтому $Y/C_A(X)$ также FC-гиперцентральна. Если $A \neq C_A(X)$, то $A/C_A(X) \cap FC(Y/C_A(X)) \neq \langle 1 \rangle$. Пусть

$$C_A(X) \neq a\,C_A(X) \in A/C_A(X) \cap FC(Y/C_A(X)),$$

$$h\,C_A(X) \in C_{Y/C_A(X)}(a\,C_A(X)).$$

Тогда $a^h = ab$, где $b \in C_A(X)$. Теперь имеем

$$(a\varphi_x)^h = (a^h)\varphi_x = [a^h, x] = [ab, x] =$$

$$= [a, x][b, x] = [a, x] = a\varphi_x.$$

Отсюда следует, что $|Y : C_Y(a\varphi_x)|$ конечен. Так как индекс $|G : Y|$ также конечен, то конечен и $|G : C_G(a\varphi_x)|$. Это означает, что $a\varphi_x \in FC(G)$. Поскольку $a \notin C_A(X)$, то $a\varphi_x \neq 1$, т. е. и $FC(G) \neq \langle 1 \rangle$. Противоречие.

Предположим теперь, что $A \leq \zeta(X)$ и для любого $x \in X$ рассмотрим отображение

$$\theta_x\colon c \to [c, x], \qquad c \in X.$$

Снова очевидно, что θ_x — эндоморфизм подгруппы X. Если $y \in Y$, то $x^y = xu$ для некоторого $u \in A$. Тогда

$$(c\,\theta_x)^y = [c,x]^y = [c^y,x^y] = [c^y,xu] =$$

$$= [c^y,x][c^y,u] = [c^y,x] = (c^y)\,\theta_x.$$

Если $x_1 \in X$, $y \in Y$, то $x_1^y = x_1 v$ для некоторого элемента $v \in A$, так что

$$(x_1\,\theta_x)^y = (x_1^y)\,\theta_x = (x_1 v)\theta_x = x_1\,\theta_x y\,\theta_x = x_1\,\theta_x.$$

Это означает, что $\operatorname{Im}\theta_x \le \zeta(Y)$. Как отмечалось выше, подгруппа X неабелева, поэтому найдется такой элемент $x_2 \in X$, что $\operatorname{Im}\theta_{x_2} \ne \langle 1\rangle$. В этом случае и $\zeta(Y) \ne \langle 1\rangle$. Поскольку $|G:Y|$ конечен, то $FC(G) \ne \langle 1\rangle$. Снова получаем противоречие, которое и доказывает лемму.

Теорема 1. *Пусть G — группа, любая собственная фактор-группа которой FC-гиперцентральна, F — ее подгруппа Фиттинга, и предположим, что $F \ne \langle 1\rangle$. Если $FC(G) = \langle 1\rangle$, то либо F — элементарная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p, либо F — абелева подгруппа без кручения.*

Доказательство. Пусть $x, y \in F$, тогда существуют такие нормальные нильпотентные подгруппы L_x, L_y, что $x \in L_x$, $y \in L_y$. Согласно теореме Фиттинга (см., например, [15], теорема 2.18) подгруппа $L_x L_y$ нильпотентна, а значит ввиду леммы 1 абелева. Итак, $xy = yx$, т. е. и F — абелева.

Пусть T — периодическая часть F и предположим, что $T \ne \langle 1\rangle$. Очевидно, T — p-подгруппа для некоторого простого числа p. Предположим, что $T^p \ne \ne \langle 1\rangle$, тогда $T \ne \Omega_1(T) = T_1$. Поскольку G/T_1 — FC-гиперцентральна, то $T/T_1 \cap FC(G/T_1) \ne \langle 1\rangle$. Пусть P/T_1 — конечная неединичная G-инвариантная подгруппа T/T_1, $H/T_1 = C_{G/T_1}(P/T_1)$, тогда индекс $|G:H|$ конечен. Если $h \in H$, $c \in P \setminus T_1$, то $[c,h]T_1 = [cT_1, hT_1] = T_1$, т. е. $[c,h] \in T_1$. Это означает, что $1 = [c,h]^p = [c^p, h]$. Поскольку $c \notin T_1$, то $c^p \ne 1$. Итак, $\zeta(H) \ne \ne \langle 1\rangle$, а это означает, что $FC(G) \ne \langle 1\rangle$. Полученное противоречие показывает, что $T = \Omega_1(T)$, т. е. T — элементарная абелева p-подгруппа.

Предположим теперь, что $F \ne T$. Тогда $F = T \times A$ для некоторой подгруппы A (см., например, [16], теорема 27.5). Отсюда $F^p \le A$, в частности, $F^p \cap T = \langle 1\rangle$. Так как F^p — нормальная неединичная подгруппа, то G/F^p — FC-гиперцентральна. Из теоремы Рэмака получаем вложение $G \le G/T \times G/F^p$, которое показывает, что G — FC-гиперцентральна. Полученное противоречие показывает, что если $T \ne \langle 1\rangle$, то $F = T$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть G — $JNCC$-группа, $F = \operatorname{Fitt} G \ne \langle 1\rangle$. Если $FC(G) = \langle 1\rangle$, то либо E — элементарная абелева p-подгруппа для некоторого простого p, либо F — абелева подгруппа без кручения.*

Лемма 2. *Пусть группа G включает в себя такую конечную нормальную подгруппу H, что G/H — CC-группа. Тогда и G — CC-группа. В частности, $JNCC$-группа не включает в себя неединичные конечные нормальные подгруппы.*

Доказательство. Пусть $g \in G$, положим $L/H = \langle gH \rangle^{G/H}$. Покажем, что $G/C_G(L)$ — черниковская группа, отсюда будет следовать, что и $G/C_G(q^G)$ также черниковская.

Поскольку G/H — CC-группа, то $(G/H)/C_{G/H}(G/H)$ — черниковская. Кроме того, L/H или черниковская, или включает в себя такую нормальную черниковскую подгруппу T/H, что L/T — бесконечная циклическая группа [17]. С другой стороны, H — конечна, так что и $G/C_G(H)$ конечна. Пусть $K = L \cap C_G(H)$, тогда L/K конечна и $K \cap H \leq \zeta(K)$. Отметим, что KH/H и $K/K \cap H$ изоморфны как G-операторные группы, поэтому $G/C_G(K/K \cap H)$ — черниковская группа. Пусть $C = C_G(K \cap H) \cap C_G(K/K \cap H)$, тогда и G/C также черниковская. Так как C стабилизирует ряд $\langle 1 \rangle \leq K \cap H \leq K$ и $K \cap H$ центральна в K, то существует отображение $\theta: C \to \mathrm{Hom}(K, K \cap H)$, задаваемое по правилу $x\theta(c) = [c, x]$, $c \in C$, $x \in K$, причем $\mathrm{Ker}\,\theta = C_C(K)$ (см., например, [18], гл. 1, § C).

Пусть $n = |H|$, $c \in C$. Поскольку $[c, x] \in H$ для всех $x \in K$, то $1 = [c, x]^n = [c, x^n]$. Таким образом, $K^n \leq \mathrm{Ker}\,\theta$ и θ индуцирует гомоморфизм $\varphi: C \to \mathrm{Hom}(K/K^n, K \cap H)$, определенный по правилу $c\varphi = c\theta$, $c \in C$, для которого $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\theta / K^n$. Поскольку K/K^n и $K \cap H$ конечны, то и группа $\mathrm{Hom}(K/K^n, K \cap H)$ также конечна. Следовательно, $\mathrm{Im}\,\varphi$ конечна, так что $C/C_C(K)$ конечна, а значит, $G/C_G(K)$ — черниковская группа.

Положим $K_1 = K \cap H$. Так как $L = T$ или L/T — бесконечная циклическая группа, то либо L/K_1 конечна, либо является расширением конечной группы с помощью бесконечной циклической. В любом случае найдется такое конечное множество X, что $L = K_1\langle X \rangle$. Пусть $C_G(T/K_1) \cap C_G(L/T) = C_1$, тогда G/C_1 конечна и C_1 стабилизирует цепочку $\langle 1 \rangle \leq T/K_1 \leq L/K_1$. Отсюда следует, что $C_1/C_G(L/K_1)$ конечна (см. [18], предложение 1.C.3), так что и $G/C_G(L/K_1)$ конечна. Положим $C_2 = C_G(L/K_1) \cap C_G(K_1)$, тогда G/C_2 — черниковская группа и C_2 стабилизирует цепочку $\langle 1 \rangle \leq K_1 \leq L$. Снова, применяя предложение 1.C.3 из [18], получаем вложение $C_2/C_{C_2}(L) \leq \mathop{\times}\limits_{x \in X} E_x$, где $E_x \cong \zeta(K_1)$ при любом $x \in X$. Поскольку K_1 — черниковская подгруппа и X конечно, то $C_2/C_{C_2}(L)$ — черниковская. Таким образом, $G/C_{C_2}(L)$, а значит, и $G/C_G(L)$ — черниковские. Лемма доказана.

Предложение 1. *Пусть группа G включает в себя бесконечную циклическую нормальную подгруппу. Группа G тогда и только тогда является $JNCC$-группой, когда она удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\zeta(G)$ — *неединичная локально циклическая подгруппа без кручения;*

2) *$G/\zeta(G)$ — абелева группа без кручения;*

3) *для любого элемента x подгруппа $[G,x]$ минимаксна.*

Доказательство. Пусть G — $JNCC$-группа, $C=\langle c\rangle$ — бесконечная циклическая нормальная подгруппа. Так как G/C — CC-группа, то все ее элементы конечного порядка составляют подгруппу $T/C\geq[G/C,G/C]$ [17]. Положим $H=C_G(C)$, тогда $|G:H|\leq 2$, в частности, G/H — циклическая.

Пусть F — конечнопорожденная подгруппа $T\cap H$. Тогда FC/C — конечнопорожденная периодическая CC-группа, а поэтому она конечна. Поскольку $F\leq C_G(C)$, то F — конечна над центром и $[F,F]$ конечна (см., например, [15], теорема 4.12). Отсюда следует, что $[T\cap H, T\cap H]$ локально конечна, так что все элементы конечного порядка из $T\cap H$ составляют характеристическую подгруппу T_1, фактор-группа которой абелева. Однако $T_1\cap C=\langle 1\rangle$, а это показывает, ввиду теоремы Рэмака, что G — CC-группа. Таким образом, $Z=$ $=T\cap H$ — локально циклическая подгруппа без кручения. Нетрудно получить включение $Z\leq\zeta(H)$.

Предположим, что $H\neq G$. Тогда $G=H\langle d\rangle$ для некоторого элемента d, причем $d^2\in H=C_G(Z)$. Тогда d инвертирует любой элемент Z. С другой стороны, выше отмечалось, что $[G,G]\leq Z$. Если $h\in H$, то $[d,h^{-1}]=$ $=d^{-1}hdh^{-1}=z\in Z$, т. е. $d^{-1}hd=zh$ и

$$d^{-2}hd^2=d^{-1}(zh)d=(d^{-1}zd)(d^{-1}hd)=z^{-1}zh=h.$$

Поэтому $d^2\in C_G(H)$ и $d^2\in\zeta(G)$. Отсюда нетрудно получить, что $d^2=1$. Тогда $\langle dZ\rangle\cap H/Z=\langle 1\rangle$, т. е. $G/Z=\langle dZ\rangle\times H/Z$.

Предположим, что $\zeta(H)\neq Z$, пусть $a\in\zeta(H)\setminus Z$. Так как $[G,G]\leq Z$, то подгруппа $\langle a,Z\rangle$ нормальна в G. Из выбора Z вытекает, что H/Z — группа без кручения, поэтому $\langle a\rangle\cap Z=\langle 1\rangle$. Согласно теореме 2.7 из [19] $\langle a,Z\rangle$ включает в себя нееденичную G-инвариантную подгруппу M со свойством $M\cap Z=\langle 1\rangle$. Но в этом случае опять можно получить, что G — CC-группа. Это доказывает равенство $Z=\zeta(H)$.

Пусть $h\in H\setminus Z$, тогда найдется элемент $h\in H$, для которого $1\neq[h,y]=$ $=z_1$. Пусть $[h,d]=z_2$. Поскольку Z — локально циклическая подгруппа, то найдется такой элемент $u\in Z$, что $\langle z_1,z_2\rangle=\langle u\rangle$. Так как H/Z — группа без кручения, то $\langle h\rangle\cap\langle u\rangle=\langle 1\rangle$, так что $\langle h,u\rangle=\langle h\rangle\times\langle u\rangle$. Поэтому $h^y=hu^t$ для некоторого $t\neq 0$. Аналогично $h^d=hu^k$. Далее $dyd^{-1}=yz_3$ для некоторого $z_3\in Z$, так что $dy=yz_3d=z_3yd$. Отсюда получаем $h^{dy}=h^{z_3yd}=h^{yd}$. Однако $h^{dy}=(hu^k)^y=hu^{t+k}$, откуда $h^{yd}=hu^{k-t}$. Поскольку d инвертирует каждый элемент Z и H/Z — группа без кручения, то $t=0$, а это противоречие показывает, что $H=G$ т. е. $Z=\zeta(G)$. Таким образом, условия 1 и 2 выполнены. Пусть $x\in G$, $1\neq v\in\zeta(G)$, $V=\langle v\rangle$. Так как G/V — CC-группа, то $[G/V,xV]$

— черниковская подгруппа, поэтому $[G, x]$ — минимаксная подгруппа, а значит, и условие 3 выполнено.

Наоборот, пусть группа G удовлетворяет условиям 1—3. Поскольку G — неабелева группа без кручения, то G не будет CC-группой. Пусть H — неединичная нормальная подгруппа G, $x \in G \setminus \zeta(G)$, $W = [G, x]$. Подгруппа W минимаксна и $W \leq \zeta(G)$. Поскольку G нильпотентна, то $M = H \cap \zeta(G) \neq \neq \langle 1 \rangle$. Так как $\zeta(G)$ — локально циклическая подгруппа, то $R = M \cap W \neq \langle 1 \rangle$. Тогда W/R — периодическая фактор-группа минимаксной группы, т. е. $W/R = = [G, x]R/R = [G/R, xR]$ — черниковская подгруппа. Из включения $R \leq H$ получаем, что и $[G/H, xH]$ — черниковская. Это и означает, что G/H — CC-группа. Предложение доказано.

Поскольку G — нильпотентная группа класса нильпотентности 2, то $G/C_G(x) \cong [G, x]$ для любого $x \in G$. Отсюда вытекает, что фактор-группа $G/C_G(x)$ минимаксна для любого $x \in G$. Другими словами, группа G имеет минимаксные классы сопряженных элементов.

Предложение 2. *Пусть G — FC-гиперцентральная группа и $\zeta(G) = \langle 1 \rangle$. Если G — $JNCC$-группа, то любая собственная фактор-группа G является черниковской.*

Доказательство. Пусть $1 \neq x \in FC(G)$, $X = \langle x \rangle^G$. Тогда $G/C_G(x)$ конечна и X конечна над центром. Согласно теореме Шура (см., например, [15], теорема 4.12), подгруппа $[X, X]$ конечна. Тогда из леммы 2 вытекает $[X, X] = \langle 1 \rangle$. Вследствие той же причины X — конечнопорожденная абелева подгруппа без кручения. Положим $C = C_G(X)$.

Можно допустить, не ограничивая общности, что X — рационально неприводима в G. Так как G/X — CC-группа, то все ее элементы конечного порядка составляют характеристическую подгруппу T/X, включающую в себя коммутант [17]. Положим $T_1 = T \cap C$, тогда $[T_1, T_1]$ — периодическая (см. [15], следствие теоремы 4.12). Тогда $[T_1, T_1] \cap X = \langle 1 \rangle$, и теорема Рэмака показывает, что G — CC-группа. Полученное противоречие показывает, что T_1 — абелева подгруппа, более того, T_1 не имеет кручения. Поскольку T_1/X — периодическая, то T_1 — абелева группа без кручения конечного (специального) ранга. Нетрудно доказать равенство $C_G(T_1) = C_G(X) = C$. Вследствие того, что $(G/X)/(T/X)$ — абелева группа без кручения, и C/T_1 — абелева группа без кручения. Поскольку $[G/T_1, G/T_1]$ — периодическая, то $C/T_1 \leq \zeta(G/T_1)$.

Предположим, что $C \neq T_1$. Пусть L/T_1 — неединичная локально циклическая подгруппа C/T_1. Поскольку $T_1 \leq \zeta(L)$, то L — абелева. Ввиду того, что $C/T_1 \leq \zeta(G/T_1)$, L — нормальна в G, а так как G/C конечна, то из теоремы 2.7 работы [19] вытекает существование такой G-инвариантной неединичной подгруппы $Q \leq L$, что $Q \cap T_1 = \langle 1 \rangle$. Из теоремы Рэмака получаем, что G — CC-группа. Полученное противоречие доказывает равенство $C = T_1$.

Пусть $y \in G \setminus C$, $H/X = C_{G/X}(\langle y \rangle^G X/X)$, $E = H \cap C$. Отображение $\theta : E \to \to E$, определенное по правилу $e\theta = [e, y]$, $e \in E$, будет $\mathbb{Z}H$-эндоморфизмом, причем $\mathrm{Ker}\,\theta = C_E(y)$, $\mathrm{Im}\,\theta = [E, y]$. Поскольку $[E, y] \le X$, то $E / C_E(y) \cong \cong [E, y]$ — конечнопорожденная абелева группа без кручения. Предположим сначала, что θ — не инъективно, и пусть $E_1 = C_E(y)$, тогда $E_1 \ne \langle 1 \rangle$ и E_1 имеет только конечное множество сопряженных в G; пусть это будут подгруппы $E_1^{g_1}, \ldots, E_1^{g_n}$. Положим $E_2 = E_1^{g_1} \cap \ldots \cap E_1^{g_n}$. Тогда

$$E/E_2 \le E/E_1^{g_1} \times \ldots \times E/E_1^{g_n}.$$

Из $E/E_1^g = E^g/E_1^g \cong E/E_1$ получаем, что E/E_2 — конечнопорожденная абелева группа без кручения. Поскольку X, а поэтому и C рационально неприводимы, то $E_2 = \langle 1 \rangle$. Следовательно, подгруппа E конечно порождена. Если же θ инъективно, то $E \cong [E, y] \le X$, так что и в этом случае подгруппа E конечно порождена.

Ввиду того, что $X \ne \langle 1 \rangle$, G/X — CC-группа, поэтому и G/H — черниковская группа, а значит, и C/E — также черниковская. Отсюда получаем, что подгруппа C минимаксна.

Пусть U – неединичная нормальная подгруппа G. Вследствие того, что C — рационально неприводима в G, $C/(U \cap X)$ — периодическая, а так как C — минимаксна, то эта фактор-группа будет черниковской. Отсюда следует, что и G/U будет черниковской. Предложение доказано.

Объединяя предложения 1 и 2, теперь уже можно сформулировать основной результат данной работы.

Теорема 2. *Пусть G — группа, у которой $FC(G) \ne \langle 1 \rangle$. Группа G тогда и только тогда является $JNCC$-группой, когда она — группа одного из следующих типов:*

1) *G удовлетворяет следующим условиям:*

1A) *центр $\zeta(G)$ является неединичной локально циклической подгруппой без кручения;*

1B) *$G/\zeta(G)$ — абелева группа без кручения;*

1C) *для любого элемента $x \in G$ подгруппа $[G, x]$ минимаксна;*

2) *группа G не является черниковской, но любая ее собственная фактор-группа является черниковской группой.*

Как отмечалось выше, группы типа 2 описаны в работах [9, 10].

1. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Иванов. пед. ин-та. – 1958. – **18**. – С. 49–60.
2. *Нейман Х.* Многообразия групп. – М..: Мир, 1969, – 264 с.
3. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups. Pt 2. – Berlin: Springer, 1972. – 257 p.
4. *Newman M. F.* On a class of metabelian groups // Proc. London Math. Soc. – 1960. – **10**. – P. 354–364.
5. *Newman M. F.* On a class of nilpotent groups // Ibid. – P. 365–375.
6. *McCarthy D.* Infinite groups whose proper quotients are finite // Communs Pure and Appl. Math. – 1968. – **21**. – P. 545–562.

7. *McCarthy D.* Infinite groups whose proper quotients are finite // Ibid. – 1970. – **23**. – P. 767–789.
8. *Wilson J. S.* Groups with every proper quotient finite // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1971. – **69**. – P. 373–391.
9. *Franciosi S., de Giovanni F.* Soluble groups with many Chernikov quotients // Atti Accad. Naz. Lincei. – 1985. – **79**, № 8. – P. 19–24.
10. *Курдаченко Л. А., Горецкий В. Э., Пылаев В. В.* Группы с некоторой системой минимаксных фактор-групп // Докл. АН УССР. – 1988. – № 3А. – С. 17–20.
11. *Groves J. R. J.* Soluble groups with many polycyclic quotients // Ill. J. Math. – 1978. – **22**. – P. 90–95.
12. *Robinson D. J. S., Wilson J. S.* Soluble groups with many polycyclic quotients // Proc. London Math. Soc. – 1984. – **48**. – P. 193–229.
13. *Robinson D. J. S., Zhang Z.* Groups whose proper quotients have finite derived subgroups // J. Algebra. – 1988. – **118**. – P. 346–368.
14. *Franciosi S., de Giovanni F., Kurdachenko L. A.* Groups whose proper quotients are FC-groups // Ibid. – 1996. – **186**. – P. 544–577.
15. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups. Pt 1. – Berlin: Springer, 1972. – 210 p.
16. *Фукс Л.* Т. 1. Бесконечные абелевы группы. – М.: Мир, 1974. – Т. 1. – 336 с.
17. *Половицкий Я. Д.* Группы с экстремальными классами сопряженных элементов // Сиб. мат. журн. – 1964. – **5**. – С. 891–895.
18. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups. – Amsterdam: North-Holland, 1973. – 210 p.
19. *Franciosi S., de Giovanni F., Kurdachenko L. A.* On groups with many almost normal subgroups // Ann. Math. – 1995. – **169**. – P. 45–65.

Получено 22.12.97