УДК 517.5

С. А. Охрименко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

МОДУЛИ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ НА РИМАНОВОМ ЛИСТЕ МЕБИУСА

A problem of a modulus is investigated for families of curves in multiply connected nonorientable domains on a Riemannian Möbius strip. The extremal metric and the modulus of a „cross" family of arcs are found.

Досліджується проблема модуля для сімей кривих у багатозв'язних неорієнтовних областях на рімановому листку Мьобіуса. Знайдено екстремальну метрику та модуль „поперечної" сім'ї дуг.

1. Введение. Работа посвящена исследованию проблемы модуля для семейств кривых в многосвязных неориентируемых областях на римановом листе Мебиуса. В ней найдены экстремальная метрика и модуль „поперечного" семейства дуг. Отметим, что для многосвязных ориентируемых областей аналогичная проблема рассматривалась в [1 – 3].

В дальнейшем используем понятия и обозначения из работ [4 – 6].

Пусть $0<\alpha<+\infty$, $0<\beta<+\infty$. В комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим множество

$$\Pi_{0,\alpha} := \{z\in\mathbb{C} : -\alpha<\operatorname{Re} z<\alpha,\ -\beta\le \operatorname{Im} z<\beta\}.$$

Отождествим точки $z=-x-\beta i$ из $\Pi_{0,\alpha}$ с точками $z=x+\beta i$ $(-\alpha<x<\alpha)$ и в „склеенном" множестве введем естественную структуру гладкого топологического многообразия. Полученное многообразие с линейным элементом длины $|dz|$ является неориентируемым римановым многообразием. Обозначим его через Π_α (топологически это лист Мебиуса). С теоретико-множественной (но не с топологической) точки зрения Π_α в дальнейшем будем отождествлять с $\Pi_{0,\alpha}$. Через Γ обозначим семейство всех замкнутых кривых $\gamma\subset\Pi_\alpha$, соответствующих базисному элементу фундаментальной группы риманова многообразия Π_α.

Пусть задан компакт $E\subset\Pi_\alpha$ такой, что множество $S:=\Pi_\alpha\backslash E$ является неориентируемой областью. Через Γ_S обозначим семейство всех $\gamma\in\Gamma$, для которых $\gamma\subset S$.

Если P — топологическое пространство, то *дугой* δ в P условимся называть любое непрерывное отображение непустого действительного интервала (a,b) в P. Без ограничения общности в дальнейшем будем считать, что $a=-1$, $b=1$.

Обозначим через Δ_S семейство всех дуг $\delta\subset S$, удовлетворяющих следующим условиям:

I. Для любого компакта $Q\subset S$ существует компакт $T\subset(-1,1)$ такой, что $\delta(t)\notin Q$ $\forall\, t\in(-1,1)\backslash T$.

II. Дуга δ имеет непустое пересечение с каждой кривой $\gamma\in\Gamma_S$.

Целью работы является нахождение экстремальной метрики ρ_{Δ_S} и модуля $M(\Delta_S)$ [1, 4 – 7] семейства Δ_S.

2. Нормальные отображения и леммы. Рассмотрим двулистное накрывающее Π^2_α многообразия Π_α, имеющее вид

$$\Pi_\alpha^2 := \{ z \in \mathbb{C} : -\alpha < \operatorname{Re} z < \alpha, \ -\beta \le \operatorname{Im} z < 3\beta \},$$

с фундаментальной областью $\Pi_{0,\alpha}$, проектированием $p : \Pi_\alpha^2 \to \Pi_\alpha$ и группой скольжений Z_2, образующая которой является антиконформным гомеоморфизмом $z \mapsto \bar{z} + 2\beta i$, и $p(z) = p(-\bar{z} + 2\beta i)$.

Пусть E^2 — полный прообраз E в проектировании p. Очевидно, что E^2 — компакт в Π_α^2. Положим $S^2 := \Pi_\alpha^2 \setminus E^2$. Легко видеть, что S^2 является (ориентируемой) областью.

Далее, с помощью отображения $w = f(z) = \exp(\pi z / 2\beta)$ отобразим Π_α^2 на кольцо

$$K := \{ w \in \mathbb{C} : \exp(-\lambda) < |w| < \exp \lambda \}, \quad \lambda := \pi\alpha / 2\beta.$$

Из того, что E^2 — компакт в Π_α^2, следует, что и $f(E^2)$ — компакт в K. Обозначим $G := f(S^2)$, $g := f^{-1}$. Область G инвариантна относительно преобразования $\eta : w \mapsto -1/\overline{w}$ и выполняется соотношение $p \circ g(w) = p \circ g(-1/\overline{w})$.

Пусть $R := \exp \lambda$, $B_1 := \{ w \in \mathbb{C} : |w| = R \}$, $B_2 := \{ w \in \mathbb{C} : |w| = 1/R \}$. Обозначим через $\mathfrak{R}(G)$ класс всех однолистных конформных отображений $\zeta = \psi(w)$ области G, для каждого из которых существует $R(\psi) > 1$ такое, что $\psi(B_1) = B_1'$, $\psi(B_2) = B_2'$, где

$$B_1' = \{ \zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = R(\psi) \}, \quad B_2' := \{ \zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1/R(\psi) \}.$$

П. М. Тамразов установил приведенные ниже леммы, дающие решение задач о максимуме и минимуме функционала $R(\psi)$ на классе $\mathfrak{R}(G)$. С его согласия мы приводим (и используем) эти результаты вместе с их доказательством.

Лемма 1. *На классе $\mathfrak{R}(G)$ вариационная задача о максимуме функционала $R(\psi)$ разрешима и ее экстремаль $\psi_{\max}$ единственна с точностью до произвольного множителя c, $|c| = 1$. При этом $\psi_{\max}(G)$ — нормальная (по Гретиу [1, 2, 8]) область типа „кольца с радиальными разрезами"; $\psi_{\max}(B_1)$ и $\psi_{\max}(B_2)$ — изолированные граничные компоненты образа; $\psi_{\max}(G)$ инвариантна относительно преобразования $\eta : \zeta \mapsto -1/\overline{\zeta}$ и выполняется соотношение*

$$\eta \circ \psi_{\max} = \psi_{\max} \circ \eta. \tag{1}$$

Лемма 2. *На классе $\mathfrak{R}(G)$ вариационная задача о минимуме функционала $R(\psi)$ разрешима, и ее экстремаль $\psi_{\min}$ единственна с точностью до произвольного множителя c, $|c| = 1$. При этом $\psi_{\min}(G)$ — нормальная (по Гретиу [1, 2, 8]) область типа „кольца с концентрическими круговыми разрезами"; $\psi_{\min}(B_1)$ и $\psi_{\min}(B_2)$ — изолированные граничные компоненты образа; $\psi_{\min}(G)$ инвариантна относительно преобразования $\eta : \zeta \mapsto -1/\overline{\zeta}$ и выполняется соотношение*

$$\eta \circ \psi_{\min} = \psi_{\min} \circ \eta.$$

Доказательство леммы 1. Разрешимость задачи о максимуме функционала $R(\psi)$ и утверждение о единственности экстремали следуют из результатов работ [1, 2].

Поскольку область G инвариантна относительно преобразования η, то функция $\eta\circ\psi_{\max}\circ\eta(w)$ имеет смысл. Очевидно, что $\eta\circ\psi_{\max}\circ\eta\in\mathfrak{N}(G)$ и $\eta\circ\psi_{\max}\circ\eta$ тоже экстремальна в задаче о максимуме $R(\psi)$, поэтому, в силу теоремы единственности нормального отображения (см. [1, 2]), отсюда следует, что

$$\eta\circ\psi_{\max}\circ\eta = c_0\psi_{\max}, \tag{2}$$

где $|c_0|=1$.

Покажем, что $c_0=1$. Так как $\psi_{\max}\in\mathfrak{N}(G)$, то существует точка $\zeta_1\in\in\psi_{\max}(G)$ такая, что $|\zeta_1|=1$. Это вытекает из связности $\psi_{\max}(G)$, инвариантности G относительно η и соотношения (2) с учетом $|c_0|=1$.

Обозначим $w_1:=\psi_{\max}^{-1}(\zeta_1)$, $w_2:=\eta(w_1)$. Тогда $w_1,w_2\in G$. Далее последовательно получаем

$$c_0\psi_{\max}(w_1) = c_0\zeta_1, \tag{3}$$

$$\eta\circ\psi_{\max}\circ\eta(w_1) = \eta\circ\psi_{\max}(w_2) = -\frac{1}{\overline{\psi}_{\max}(w_2)}, \tag{4}$$

$$\eta\circ\psi_{\max}\circ\eta(w_2) = \eta\circ\psi_{\max}(w_1) = \eta(\zeta_1) = -\frac{1}{\overline{\zeta}_1}. \tag{5}$$

Используя (2) – (5), устанавливаем

$$c_0\zeta_1 = -\frac{1}{\overline{\psi}_{\max}(w_2)}, \quad c_0\psi_{\max}(w_2) = -\frac{1}{\overline{\zeta}_1}.$$

Отсюда имеем

$$\psi_{\max}(w_2) = -\frac{1}{\overline{c}_0\overline{\zeta}_1} = -c_0\zeta_1, \tag{6}$$

$$\psi_{\max}(w_2) = -\frac{1}{c_0\overline{\zeta}_1} = -\overline{c}_0\zeta_1. \tag{7}$$

Сравнивая (6) и (7), получаем $c_0=\overline{c}_0$, поэтому

$$c_0 = \pm 1. \tag{8}$$

Далее, из (3) и (6) следует

$$\psi_{\max}(w_2) = -c_0\psi_{\max}(w_1). \tag{9}$$

Исключим случай $c_0=-1$. Для этого используем свойства области G. Из равенства $w_2=-1/\overline{w}_1$ следует, что $\arg w_2=\arg w_1+\pi$ и поэтому $w_1\neq w_2$. Поскольку отображение $\psi_{\max}$ однолистно и $w_1,w_2\in G$, то

$$\psi_{\max}(w_2) \neq \psi_{\max}(w_1). \tag{10}$$

При $c_0=-1$ соотношения (9) и (10) противоречат друг другу, что и доказывает равенство $c_0=1$.

Далее, подействуем на (2) справа функцией η. Так как $\eta^2=\mathrm{id}$, то получаем (1). Теперь нетрудно проверить справедливость остальных утверждений леммы.

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2 аналогично.

3. Экстремальная метрика и модуль „поперечного" семейства дуг. Обозначим $D:=\psi_{\max}(G)$, $R_{\max}:=R(\psi_{\max})$.

Функция $\psi_{\max} \circ f$ конформно отображает область S^2 на нормальную (по Гретшу) область D типа „кольца с радиальными разрезами”.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Метрика*

$$\rho_{\Delta_S}(z) := \frac{1}{(2\log R_{\max})|\psi_{\max} \circ \exp(\pi z/2\beta)|}\left|\frac{d(\psi_{\max} \circ \exp(\pi z/2\beta))}{dz}\right|$$

экстремальна в S *для семейства* Δ_S *и*

$$M(\Delta_S) = \frac{\pi}{2\log R_{\max}}.$$

Доказательство. Для дуги $\delta_S \in \Delta_S$ дуга $\delta_G \subset G$, удовлетворяющая условию $p \circ g \circ \delta_G = \delta_S$, называется *поднятием* на G дуги δ_S.

Пусть Δ_G — поднятие семейства Δ_S на G, т. е. семейство поднятий на G всех дуг $\delta_S \in \Delta_S$. Через Δ_D обозначим семейство всех дуг $\delta_D \subset D$, имеющих вид $\delta_D = \psi_{\max} \circ \delta_G$, $\delta_G \in \Delta_G$.

Из свойства нормальности области D (см. [1], глава III, § 15, а также [2]) следует, что в ней метрика

$$\rho(\zeta) = \frac{c_1}{|\zeta|}$$

с постоянной $c_1 = 1/(2\log R_{\max})$ экстремальна в проблеме модуля для семейства Δ_D.

Пусть $L := \{\zeta \in D : 0 \le \arg\zeta < \pi\}$. Через Δ_L обозначим семейство всех дуг $\delta \in \Delta_D$, для которых $\delta \subset L$.

Поскольку область D нормальна, то в области L метрика

$$\rho(\zeta) = \frac{c_1}{|\zeta|}$$

экстремальна в проблеме модуля для семейства Δ_L и

$$M(\Delta_L) = \frac{\pi}{2\log R_{\max}}. \tag{11}$$

Пусть

$$N := \{\zeta \in \mathbb{C} : 1/R_{\max} < |\zeta| < R_{\max},\ 0 \le \arg\zeta < \pi\},$$

$$\theta_1 := \{\zeta \in \mathbb{C} : 1/R_{\max} < |\zeta| < R_{\max},\ \arg\zeta = 0\},$$

$$\theta_2 := \{\zeta \in \mathbb{C} : 1/R_{\max} < |\zeta| < R_{\max},\ \arg\zeta = \pi\}.$$

Обозначим через F и H соответственно области N и L со „склейкой” η, т. е. с отождествлением каждой точки $\zeta \in \theta_1$ с соответствующей точкой $-1/\overline{\zeta} \in \theta_2$. Легко видеть, что $H \subset F$.

Рассмотрим замкнутую кривую $\gamma^1 := \{\zeta \in F : |\zeta| \equiv 1\}$ в F. Через Γ_H обозначим семейство всех замкнутых кривых $\gamma \subset H$, гомотопных γ^1 на F.

Обозначим через Δ_F семейство всех дуг $\delta \subset F$, удовлетворяющих следующим условиям:

I. Множества $\delta((-1, 0])$ и $\delta([0, 1))$ не являются относительно компактными в F.

II. Дуга δ имеет непустое пересечение с замкнутой кривой γ^1.

Далее через Δ_H обозначим семейство всех дуг $\delta \subset H$, удовлетворяющих следующим условиям:

I. Для любого компакта $V \subset H$ существует компакт $U \subset (-1, 1)$ такой, что $\delta(u) \notin V \;\; \forall\, u \in (-1, 1) \setminus U$.

II. Дуга δ имеет непустое пересечение с каждой кривой $\gamma \in \Gamma_H$.

Можно убедиться, что $\Delta_L \subset \Delta_H \subset \Delta_F$, и поэтому

$$M(\Delta_L) \le M(\Delta_H) \le M(\Delta_F). \tag{12}$$

Теперь применим теорему 1 из работы [9] (см. также [10]) к листу Мебиуса F и семейству Δ_F. Имеем

$$M(\Delta_F) = \frac{\pi}{2\log R_{\max}} \tag{13}$$

и экстремальной для семейства Δ_F является метрика

$$\rho_{\Delta_F}(\zeta) = \frac{1}{(2\log R_{\max})|\zeta|} \quad \forall\, \zeta \in F.$$

Вследствие (11) и (13) соотношения (12) являются равенствами, т. е. область H является нормальной для семейства Δ_H. Поскольку область H конформно эквивалентна исходной области S $(H = \psi_{\max} \circ f(S))$, то в силу конформной инвариантности модуля [1, 7]

$$M(\Delta_S) = M(\Delta_H) = \frac{\pi}{2\log R_{\max}},$$

и экстремальной для семейства Δ_S является метрика

$$\rho_{\Delta_S}(z) = \frac{1}{(2\log R_{\max})|\psi_{\max} \circ \exp(\pi z/2\beta)|}\left|\frac{d(\psi_{\max} \circ \exp(\pi z/2\beta))}{dz}\right| \quad \forall\, z \in S.$$

Теорема доказана.

1. *Тамразов П.М.* Метод экстремальной метрики и конформное отображение: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1963. – 182 с.
2. *Тамразов П. М.* Некоторые экстремальные задачи теории конформных отображений // Мат. сб. – 1965. – **109**, № 3. – С. 329–337.
3. *Тамразов П. М.* Конформно-инвариантные модули и круговая симметризация // Метрические вопросы теории функций и отображений. – Киев: Наук. думка, 1974. – С. 127–146.
4. *Тамразов П. М.* Методы исследования экстремальных метрик и модулей семейств кривых в скрученном римановом многообразии // Мат. сб. – 1992. – **183**, № 3. – С. 55–75.
5. *Тамразов П.М.* Модули и экстремальные метрики в неориентируемых и скрученных римановых многообразиях // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 10. – С. 1388–1398.
6. *Тамразов П. М.* Модули и экстремальные метрики в скрученных римановых многообразиях // Модули неориентируемых и скрученных римановых многообразий. – Киев, 1997. – С. 1–25. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 97.9).
7. *Дженкинс Дж.* Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 268 с.
8. *Grotzsch H.* Das Kreissbogenschlitztheorem der konformen Abbildung mehrfach zusammenhangender schlichter Bereiche, I // Leipzig. Ber. – 1931. – **83**, № 4. – S. 238–253.
9. *Тамразов П.М., Охрименко С.А.* Парные произведения модулей семейств кривых на римановом листе Мебиуса // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 1. – С. 110–116.
10. *Охрименко С.А., Тамразов П.М.* Оценки произведений модулей семейств кривых на римановом листе Мебиуса // Модули неориентируемых и скрученных римановых многообразий. – Киев, 1997. – С. 26–40. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 97.9).

Получено 15.04.98