УДК 517.5

Е. В. Дерец (Днепродзерж. техн. ун-т)

ОБ ОЦЕНКАХ СНИЗУ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Lower bounds are obtained for the Kolmogorov widths $d_{2n-1}(W^r H_1^{\omega}, L_p)$ and the Gel'fand widths $d^{2n-1}(W^r H_1^{\omega}, L_p)$ of classes of functions $W^r H_1^{\omega}$ with a convex integral modulus of continuity $\omega(t)$.

Одержано оцінки знизу поперечників Колмогорова $d_{2n-1}(W^r H_1^{\omega}, L_p)$ та поперечників Гельфанда $d^{2n-1}(W^r H_1^{\omega}, L_p)$ класів функцій $W^r H_1^{\omega}$ з опуклим інтегральним модулем неперервності $\omega(t)$.

1. Введение. Пусть L_p, $p \in [1, \infty)$, — пространства измеримых интегрируемых в p-й степени 2π-периодических функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_p = \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}};$$

$$\omega(f, t)_p = \sup_{|h| \le t} \| f(\cdot + h/2) - f(\cdot - h/2) \|_p$$

— модуль непрерывности функции f в пространстве L_p, $p \in [1, \infty)$; $W^r H_1^{\omega}$, $r = 1, 2, \ldots,$ — множество всех 2π-периодических функций $f(t)$, у которых $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}(t)$ локально абсолютно непрерывна на всей оси и

$$\omega\left(f^{(r)}, t\right)_1 \le \omega(t), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности.

Поперечниками в смысле Колмогорова класса функций $\mathfrak{R}$ в пространстве L_p называют величины

$$d_n(\mathfrak{R}, L_p) = \inf_{M_n} \sup_{f \in \mathfrak{R}} \inf_{\varphi \in M_n} \| f - \varphi \|_p, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где $M_n \subset L_p$ — подпространство размерности n.

Поперечниками в смысле Гельфанда класса функций $\mathfrak{R}$ в пространстве L_p называют величины

$$d^n(\mathfrak{R}, L_p) = \inf_{M^n} \sup_{f \in \mathfrak{R} \cap M^n} \|f\|_p, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где $M^n \subset L_p$ — подпространство коразмерности n.

В данной работе получены оценки снизу для $d_{2n-1}(W^r H_1^{\omega}, L_p)$ и $d^{2n-1}(W^r H_1^{\omega}, L_p)$ при $n, r = 1, 2, \ldots, p \in [1, \infty)$ и произвольном выпуклом вверх модуле непрерывности $\omega(t)$.

2. Вспомогательные утверждения. Обозначим через $M_{2n,\omega}$ множество всех 2π-периодических функций $f(x)$, удовлетворяющих следующему условию: существует разбиение отрезка $[0, 2\pi]$ точками $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 2\pi$, $1 \le N \le 2n$, такое, что на каждом промежутке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, N$, функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = \pm \frac{1}{2} \min \{\omega(2x - 2x_{i-1}), \omega(2x_i - 2x)\}.$$

Пусть $M^0_{2n,\omega}$ — множество всех функций $f(x) \in M_{2n,\omega}$, в среднем равных нулю на периоде, $M^r_{2n,\omega}$ — множество всех r-х периодических интегралов от функций $f(x) \in M^0_{2n,\omega}$, $M^*_{2n,\omega}$ — множество всех функций $f(x) \in M_{2n,\omega}$, у которых производная $f'(x)$ имеет не более $2n$ перемен знака на множестве $[0, 2\pi)$. При каждом $n = 1, 2, \ldots$ через $f_{n,0}(\omega, x)$ будем обозначать нечетную $2\pi/n$-периодическую функцию, равную

$$\frac{1}{2} \min \{\omega(2x), \omega(2(\pi/n - x))\}$$

для $x \in [0, \pi/n]$, а через $f_{n,r}(\omega, x)$, $r = 1, 2, \ldots$, — r-й периодический интеграл от функции $f_{n,0}(\omega, x)$ со средним значением равным нулю на периоде.

Основные результаты базируются на следующих утверждениях.

Теорема 1. *Пусть $n = 1, 2, \ldots$. Если $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, то для любой функции $f(x) \in M^*_{2n,\omega}$ справедливо $f(x)/(4n) \in$ $\in W^1 H^\omega_1$.*

***Замечание* 1.** Утверждение теоремы 1 в случае, когда функция $f(x) \in$ $\in M_{2n,\omega}$ имеет $2n$ перемен знака на периоде, было доказано в [1].

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что функция $\omega(t)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(0, 2\pi)$. Общий случай легко получить предельным переходом.

Пусть производная $f'(x)$ меняет знак в точках $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_N < 2\pi$. Поскольку $f(x) \in M^*_{2n,\omega}$, то $N \le 2n$. Положим $t_{N+1} = t_0 + 2\pi$. При каждом $i =$ $= 0, 1, \ldots, N$ определим 2π-периодическую функцию $g_i(x)$ следующим образом:

$$g_i(x) = \begin{cases} f'(x), & \text{если } x \in (t_i, t_{i+1}); \\ 0 & \text{— в остальных случаях } [t_0, t_0 + 2\pi]. \end{cases}$$

Для любого $h > 0$ обозначим через $J_1(h)$ множество всех тех $i \in J = \{0, 1, \ldots, N\}$, для которых $t_{i+1} - t_i \le h$. Пусть $J_2(h) = J / J_1(h)$, $|J_\nu(h)|$ — число элементов множества $J_\nu(h)$, $\nu = 1, 2$.

Очевидно, что

$$\int_0^{2\pi} |f'(x + h/2) - f'(x - h/2)| dx \le$$

$$\le 2 \sum_{i \in J_1(h)} \int_0^{2\pi} |g_i(x)| dx + \sum_{i \in J_2(h)} \int_0^{2\pi} |g_i(x + h/2) - g_i(x - h/2)| dx.$$

Пусть $i \in J$ фиксировано. Функция f монотонна на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$, поэтому возможны два случая:

а) $f(x)$ не имеет нулей на интервале (t_i, t_{i+1}), тогда

$$\int_0^{2\pi} |g_i(x)| dx = \frac{1}{2}\omega(2(t_{i+1} - t_i)) \leq \omega(h), \quad \text{если } i \in J_1(h),$$

$$\int_0^{2\pi} |g_i(x+h/2) - g_i(x-h/2)| dx = \omega(2h) \leq 2\omega(h), \quad \text{если } i \in J_2(h);$$

б) $f(x)$ имеет на интервале (t_i, t_{i+1}) единственный нуль в точке τ_i. Если $i \in J_1(h)$, то

$$\int_0^{2\pi} |g_i(x)| dx = \frac{1}{2}\omega(2(\tau_i - t_i)) + \frac{1}{2}\omega(2(t_{i+1} - \tau_i)) \leq \omega(t_{i+1} - t_i) \leq \omega(h).$$

Пусть теперь $i \in J_2(h)$. Положим $a = \min\{\tau_i - t_i, t_{i+1} - \tau_i\}$. Нетрудно проверить, что если $a \leq h/2$, то

$$\int_0^{2\pi} |g_i(x+h/2) - g_i(x-h/2)| dx = \omega(2a) + \omega(2h - 2a) \leq 2\omega(h),$$

если же $a > h/2$, то

$$\int_0^{2\pi} |g_i(x+h/2) - g_i(x-h/2)| dx = 2\omega(h).$$

Из полученных оценок имеем

$$\int_0^{2\pi} |f'(x+h/2) - f'(x-h/2)| dx \leq 2(|J_1(h)| + |J_2(h)|)\,\omega(h) \leq 4n\omega(h),$$

откуда следует утверждение теоремы 1.

Обозначим через S_m, $m = 1, 2, \ldots$, сферу с центром в нуле радиуса 2π в m-мерном пространстве R_m с нормой $\|\xi\| = \sum_{i=1}^m |\xi_i|$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$. Для любого ненулевого вектора $\xi \in R_m$ определим на $[0, 2\pi)$ функцию $s_m(\xi, x)$ следующим образом:

$$s_m(\xi, x) = \frac{1}{2} \operatorname{sign} \xi_l \min\{\omega(2x - 2\eta_{l-1}), \omega(2\eta_l - 2x)\},$$

$$x \in [\eta_{l-1}, \eta_l), \quad l = 1, \ldots, m,$$

где $\eta_0 = 0$, $\eta_l = 2\pi \sum_{i=1}^l |\xi_i| / \|\xi\|$. Обозначим через $\tilde{s}_m(\xi, x)$ 2π-периодическое продолжение функции $s_m(\xi, x)$.

Замечание 2. В дальнейшем для любой функции $g(x)$, определенной на $[a, a+2\pi)$, через $\tilde{g}$ будем обозначать ее 2π-периодическое продолжение.

Теорема 2. *Для любого* $n = 1, 2, \ldots$ *существует непрерывное отображение* $\psi_n \colon S_{2n} \to M^*_{2n,\omega}$ *такое, что* $\psi_n(-\xi) = -\psi_n(\xi)$ *для всех* $\xi \in S_{2n}$.

Доказательство. Проведем доказательство теоремы индукцией по n. Пусть $n = 1$. Для любого вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in S_2$ положим

$$\psi_1(\xi) = \begin{cases} \tilde{s}_1(2\pi, x), & \text{если } \xi_1 \ge 0 \text{ и } \xi_2 \ge 0; \\ \tilde{s}_1(-2\pi, x), & \text{если } \xi_1 \le 0 \text{ и } \xi_2 \le 0; \\ \tilde{s}_2(\xi_1, \xi_2, x) \text{ — в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что отображение ψ_1 удовлетворяет всем условиям теоремы.

Предположим, что утверждение теоремы верно при $n = k$. Пусть $\psi_k(\xi)$ — отображение, удовлетворяющее условиям теоремы. Каждому вектору $\xi \in$ $\in S_{2k+2}$ поставим в соответствие функцию

$$f(\xi, x) = \begin{cases} \psi_1(\xi_{2k+1}, \xi_{2k+2}), & \text{если } \sum_{i=1}^{2k} |\xi_i| = 0; \\ \psi_k(\xi_1, \ldots, \xi_{2k}), & \text{если } \xi_{2k+1} = \xi_{2k+2} = 0; \\ \tilde{s}_{2k+2}(\nu_1, \ldots, \nu_{2k+2}, x) \text{ — в остальных случаях,} \end{cases}$$

где вектор $\nu \in S_{2k+2}$ определен следующими условиями:

$$\sum_{i=1}^{2k} |\nu_i| = \sum_{i=1}^{2k} |\xi_i|, \qquad \sum_{i=2k+1}^{2k+2} |\nu_i| = \sum_{i=2k+1}^{2k+2} |\xi_i|,$$

$$\tilde{s}_{2k}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{2k}, x) = \overline{\psi}_k(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2k}),$$

$$\tilde{s}_2(\nu_{2k+1}, \nu_{2k+2}, x) = \overline{\psi}_1(\xi_{2k+1}, \xi_{2k+2}).$$

Здесь и далее для любого отображения $\psi : S_{2n} \to M_{2n,\omega}$ полагаем $\overline{\psi}(\xi) =$ $= \psi(2\pi\xi / \|\xi\|)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\xi \in R_{2n}$ — ненулевой вектор.

Легко видеть, что функция $f(\xi, x)$ определена однозначно, хотя вектор ν, вообще говоря, может быть выбран различными способами.

Рассмотрим отображение $\varphi_1 : S_{2k+2} \to M_{2k+2,\omega}$, $\varphi_1(\xi) = f(\xi, x)$. Из способа построения функции $f(\xi, x)$ следует, что отображение φ_1 непрерывно для любого $\xi \in S_{2k+2}$ $\varphi_1(-\xi) = -\varphi_1(\xi)$, и если $f(\xi, x) \notin M^*_{2k+2,\omega}$, то $f'(\xi, x)$ имеет $2k + 4$ перемены знака на периоде и имеет место один из двух случаев:

а) $\xi_{2k+1} < 0$, $\xi_{2k+2} > 0$: функция $f(\xi, x)$ отрицательна в левой окрестности точки $\sum_{i=1}^{2k} |\xi_i|$ и положительна в правой окрестности нуля;

б) $\xi_{2k+1} > 0$, $\xi_{2k+2} < 0$: функция $f(\xi, x)$ положительна в левой окрестности точки $\sum_{i=1}^{2k} |\xi_i|$ и отрицательна в правой окрестности нуля.

Обозначим через A и B множества точек $\xi \in S_{2k+2}$, для которых имеют место случаи а) и б) соответственно. В силу нечетности отображения φ_1 $A =$ $= -B$.

Цель дальнейших рассуждений — для каждого вектора $\xi \in A$ построить функцию $F(\xi, x) \in M^*_{2k+2,\omega}$ так, чтобы отображение $\varphi_2 : S_{2k+2} \to M_{2k+2,\omega}$,

$$\varphi_2(\xi) = \begin{cases} F(\xi, x), & \text{если } \xi \in A, \\ f(\xi, x), & \text{если } \xi \in S_{2k+2} \setminus A, \end{cases}$$

было непрерывно.

Пусть $\xi \in A$. Выберем вектор $\alpha(\xi) = (\alpha_1(\xi), \ldots, \alpha_{2k+2}(\xi)) \in S_{2k+2}$ так, чтобы числа $\alpha_i(\xi)$, $i \in \{1, 2k, 2k+1, 2k+2\}$, были отличны от нуля и

$f(\xi, x) = \tilde{s}_{2k+2}(\alpha(\xi), x)$. Для каждого действительного числа $a \in [0, \max\limits_{1\le i\le 2n} |\alpha_i(\xi)|)$ определим функцию

$$g(\xi, a, x) = \tilde{s}_{2k+2}(\beta_1(a, \xi), \ldots, \beta_{2k+2}(a, \xi), x),$$

где $\beta_i(a, \xi) = \operatorname{sign} \alpha_i(\xi)\,(|\alpha_i(\xi)| - a)_+$. Ясно, что функция $g(\xi, a, x)$ не зависит от выбора вектора $\alpha(\xi)$. Положим

$$D(\xi) = \left\{a \in \left[0, \frac{\pi}{2k+2}\right] : g(\xi, a, x) \in M^*_{2k+2,\omega}\right\},$$

$$E = \{\xi \in A : D(\xi) \ne \varnothing\},$$

$$\lambda(\xi) = \begin{cases} \inf D(\xi), & \text{если } \xi \in E; \\ \pi/(2k+2), & \text{если } \xi \in A \setminus E. \end{cases}$$

Если $\xi \in A \setminus E$, то положим $F(\xi, x) = \tilde{s}(2\pi, x)$. Пусть $\xi \in E$. В этом случае функция $F(\xi, x)$ строится на основе функции $g(\xi, \lambda(\xi), x)$. Идея этого построения состоит в следующем. Рассмотрим вектор

$$\mu = (\beta_1(\lambda(\xi), \xi), \beta_2(\lambda(\xi), \xi), \ldots, \beta_{2k}(\lambda(\xi), \xi), 0, \beta_{2k+1}(\lambda(\xi), \xi), \beta_{2k+2}(\lambda(\xi), \xi)) \in S_{2k+3}.$$

Пусть координаты вектора μ непрерывно изменяются с течением времени t так, чтобы в каждый момент времени $\tilde{s}_{2k+3}(\mu(t), x) \in M^*_{2k+2,\omega}$. С ростом t вначале уменьшаются координаты $\mu_{2k}(t)$ и $\mu_{2k+2}(t)$, затем уменьшаются первая и последняя координаты, при этом модуль одной из внутренних координат ($(2k)$- или $(2k+2)$-й) возрастает на ту же величину. Цель этих изменений — к моменту времени $t = 3\pi/(10(k+1))$ уменьшить число перемен знака производной функции $\tilde{s}_{2k+3}(\mu(t), x)$ настолько, чтобы замена нулевой координаты μ_{2k+1} положительным числом не выводила бы функцию за пределы множества $M^*_{2k+2,\omega}$. Далее при изменении t от $3\pi/(10(k+1))$ до $4\pi/(10(k+1))$ величина $\mu_{2k+1}(t)$ возрастает от 0 до 2π, а остальные координаты вектора уменьшаются до нуля. В качестве функции $F(\xi, x)$ выбирается функция $\tilde{s}_{2k+3}(\mu(t), x)$, взятая в момент времени $t = \lambda(\xi)$.

Перейдем к строгому построению функции $F(\xi, x)$. Сначала определим вспомогательные функции $v_i(z, t)$, $z \in Q = \{z \in S_{2k+2} : z_1 \ge 0,\ z_{2k} \le 0,\ z_{2k+1} \le 0,\ z_{2k+2} \ge 0\}$, $t \in [0, 5\pi/(10(k+1))]$, $i = 0, 1, \ldots, 2k+2$.

Рассмотрим несколько случаев:

1) $t \in [0, \pi/(10(k+1))]$, тогда

$$v_i(z, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } i = 0; \\ z_i, & \text{если } i \notin \{0, 2k, 2k+1\}; \\ \operatorname{sign} z_i\,(|z_i| - t)_+, & \text{если } i \in \{2k, 2k+1\}; \end{cases}$$

2) $t \in (\pi/(10(k+1)), 3\pi/(10(k+1)))$ и

$$\gamma(z) \overset{\text{def}}{=} \min\{|z_{2k}|, |z_{2k+1}|\} > \frac{\pi}{20(k+1)}.$$

В этом случае полагаем

$$v_i(z,t) = v_i\left(z, \frac{\pi}{10(k+1)}\right) \quad \text{для всех } i = 0, 1, \ldots, 2k+2;$$

3) $t \in (\pi/(10(k+1)), 3\pi/(10(k+1)))$ и $\gamma(z) \le \pi/(20(k+1))$. В этом случае по крайней мере одно из чисел $v_{2k}(z, \pi/(10(k+1)))$, $v_{2k+1}(z, \pi/(10(k+1)))$ равно нулю. Функции $v_i(z,t)$ определим следующим образом:

$$v_i(z,t) =$$

$$= \begin{cases} v_i\left(z, \dfrac{\pi}{10(k+1)}\right), & \text{если } i \notin \{1, 2k, 2k+1, 2k+2\}; \\ \operatorname{sign} v_i\left(z, \dfrac{\pi}{10(k+1)}\right)\left(\left|v_i\left(z, \dfrac{\pi}{10(k+1)}\right)\right| - \tau(z,t)\right)_+, & \text{если } i \in \{1, 2k+2\}; \\ \varepsilon_i \cdot \left(v_i\left(z, \dfrac{\pi}{10(k+1)}\right) + l(z,t)\right), & \text{если } i \in \{2k, 2k+1\}, \end{cases}$$

где

$$\tau(z,t) = 5(k+1)\min\left\{t - \frac{\pi}{10(k+1)}; \frac{\pi}{5(k+1)} - 4\gamma(z)\right\},$$

$$\varepsilon_{2k} = \operatorname{sign}\left|v_{2k}\left(z, \frac{\pi}{10(k+1)}\right)\right|, \quad \varepsilon_{2k+1} = 1 - \varepsilon_{2k},$$

величина $l(z,t) \le 0$ определяется равенством

$$\sum_{i=1}^{2k+2} |v_i(z,t)| = \sum_{i=1}^{2k+2}\left|v_i\left(z, \frac{\pi}{10(k+1)}\right)\right|;$$

4) $t \in (3\pi/(10(k+1)), 4\pi/(10(k+1)))$, тогда

$$v_i(z,t) = \frac{10(k+1)}{\pi}\left(\frac{\pi}{10(k+1)} - t\right) v_i\left(z, \frac{3\pi}{10(k+1)}\right), \quad \text{если} \quad i \ne 0,$$

$$v_0(z,t) = \sum_{i=1}^{2k+2}\left(\left|v_i\left(z, \frac{3\pi}{10(k+1)}\right)\right| - |v_i(z,t)|\right);$$

5) $t \in (4\pi/(10(k+1)), 5\pi/(10(k+1)))$. В этом случае

$$v_i(z,t) = v_i\left(z, \frac{4\pi}{10(k+1)}\right) \quad \text{для всех} \quad i = 0, 1, \ldots, 2k+2.$$

Положим

$$F(\xi, x) = \tilde{s}_{2k+3}(\mu_1(\xi), \mu_2(\xi), \ldots, \mu_{2k+3}(\xi), x),$$

где

$$\mu_i(\xi) = v_i(c\beta_1(\lambda(\xi),\xi), c\beta_2(\lambda(\xi),\xi), \ldots, c\beta_{2k+2}(\lambda(\xi),\xi), \lambda(\xi)), \quad i = 1, 2, \ldots, 2k,$$

$$\mu_{2k+1}(\xi) = v_0(c\beta_1(\lambda(\xi),\xi), c\beta_2(\lambda(\xi),\xi), \ldots, c\beta_{2k+2}(\lambda(\xi),\xi), \lambda(\xi)),$$

$$\mu_j(\xi) = v_{j-1}(c\beta_1(\lambda(\xi),\xi), c\beta_2(\lambda(\xi),\xi), \ldots, c\beta_{2k+2}(\lambda(\xi),\xi), \lambda(\xi)),$$

$$j = 2k+2, 2k+3,$$

$$c = \frac{2\pi}{\sum_{i=1}^{2k+2} |\beta_i(\lambda(\xi), \xi)|}.$$

Нетрудно показать, что $F(\xi, x) \in M^*_{2k+2,\omega}$. Действительно, так как $g(\xi, \lambda(\xi), x) \in M^*_{2k+2,\omega}$, то в случае, когда $\lambda(\xi) \le 3\pi/(10(k+1))$, это утверждение очевидно. Пусть $\lambda(\xi) > 3\pi/(10(k+1))$. Добавление положительной координаты $\mu_{2k+1}(\xi)$ увеличивает число перемен знака производной только в случае, когда $\gamma(c\beta(\lambda(\xi), \xi)) = 0$, но тогда по крайней мере одно из чисел $\mu_1(\xi)$, $\mu_{2k+3}(\xi)$ обращается в нуль. Принимая во внимание знаки указанных величин, приходим к выводу, что $F(\xi, x) \in M^*_{2k+2,\omega}$ для всех $\xi \in A$.

Для доказательства непрерывности отображения φ_2 прежде всего заметим, что функция $v_i(z, t)$ терпит разрыв только в случае, когда $i \in \{2k, 2k+1\}$ и

$$(z, t) \in W = \left\{ (z, t):\ z_{2k} = -\frac{\pi}{10(k+1)}, \right.$$

$$\left. z_{2k+1} \in \left(-\frac{\pi}{20(k+1)}, 0\right], t \in \left(\frac{\pi}{10(k+1)}, \frac{4\pi}{10(k+1)}\right] \right\}.$$

Определим на множестве W функции

$$w_1(z, t) = \min\{v_{2k}(z, t), v_{2k+1}(z, t)\},$$

$$w_2(z, t) = \max\{v_{2k}(z, t), v_{2k+1}(z, t)\}.$$

Легко видеть, что функция $w_1(z, t)$ непрерывна, а функция $w_2(z, t)$ тождественно равна нулю на множестве W. Далее, в силу непрерывности отображения φ_1 функции $\alpha_i(\xi)$, $i \in \{1, 2k, 2k+1, 2k+2\}$, $\lambda(\xi)$ непрерывны на множестве A. Из способа построения $F(\xi, x)$ и сделанных выше замечаний следует, что отображение φ_2 непрерывно на множестве A. Наконец, если $\lim_{l\to\infty} \xi^{(l)} = \xi^* \in \partial A$, где ∂A — граница множества A, $\xi^{(l)} \in A$, $l = 1, 2, \ldots$, то $\lim_{l\to\infty} \lambda(\xi^{(l)}) = 0$, откуда следует непрерывность отображения φ_2 в точке ξ^*. Таким образом, φ_2 непрерывно на всей сфере. Остается заметить, что отображение

$$\psi_{k+1}(\xi) = \begin{cases} F(\xi, x), & \text{если } \xi \in A; \\ -F(-\xi, x), & \text{если } \xi \in B; \\ f(\xi, x), & \text{если } \xi \in S_{2k+2} \setminus (A \cup B), \end{cases}$$

удовлетворяет всем требованиям теоремы 2. Теорема 2 доказана.

В дальнейшем нам также потребуются следующие хорошо известные утверждения.

Теорема 3 (К. Борсук [2]). *Пусть* S_{m+1} *— сфера с центром в нуле в* $(m+1)$*-мерном пространстве* R_{m+1} *и* $\tau(\xi) = (\tau_1(\xi), \ldots, \tau_m(\xi))$ *— непрерывное* m*-мерное поле, заданное на сфере* S_{m+1} *и такое, что для всех* $\xi \in S_{m+1}$ $\tau(-\xi) = -\tau(\xi)$. *Тогда существует точка* $\xi_0 \in S_{m+1}$ *такая, что* $\tau(\xi_0) = 0$.

Теорема 4. *Пусть* $\omega(t)$ *— выпуклый вверх модуль непрерывности,* $n, r = 0, 1, 2, \ldots$, $p \in [1, \infty]$ *и* $f(x) \in M^r_{2n,\omega}$. *Тогда*

$$\|f\|_p \geq \|f_{n,r}(\omega)\|_p.$$

В случае, когда $r \geq 1$ и $p = 1$, утверждение теоремы 4 получено В. П. Моторным и В. И. Рубаном [3], а для всех $r \geq 1$ и $p > 1$ — А. А. Лигуном [4]. При $r = 0$ это неравенство нетрудно получить методом неопределенных множителей Лагранжа.

3. Основные результаты. Перейдем к оценке поперечников класса $W^r H_1^\omega$. Дальнейшие рассуждения во многом повторяют рассуждения В. И. Рубана [3], но для полноты изложения приведем их полностью. Пусть $e = e(x) \equiv 1$. Рассмотрим произвольное подпространство $M_{2n-1} \subset L_p$ размерности $2n-1$, $n = 1, 2, \ldots$. Если $e \notin M_{2n-1}$, то так как $\lambda e \in W^r H_1^\omega$, для любого действительного числа λ

$$\sup_{f \in W^r H_1^\omega} \inf_{\varphi \in M_{2n-1}} \|f - \varphi\|_p \geq \sup_{\lambda} \inf_{\varphi \in M_{2n-1}} \|\lambda e - \varphi\|_p = \sup_{\lambda} \inf_{\varphi \in M_{2n-1}} |\lambda| \|e - \varphi\|_p.$$

Поскольку M_{2n-1} — замкнутое множество, $\inf_{\varphi \in M_{2n-1}} \| e - \varphi \|_p > 0$, следовательно,

$$\sup_{f \in W^r H_1^\omega} \inf_{\varphi \in M_{2n-1}} \|f - \varphi\|_p = \infty.$$

Поэтому в дальнейшем будем считать, что подпространство M_{2n-1} натянуто на систему линейно независимых функций $\{e, e_2, \ldots, e_{2n-1}\}$. Кроме того, будем предполагать, что модуль непрерывности $\omega(t)$ ни на одном из промежутков $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$ не совпадает с тождественной константой. Общий случай легко получить предельным переходом.

Лемма. *Пусть* $n = 1, 2, \ldots$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, $p \in [1, \infty)$. *Каково бы ни было подпространство* M_{2n-1}, *натянутое на систему функций* $\{e, e_2, \ldots, e_{2n-1}\}$, *существует функция* $f_*(x)$ *такая, что*

$$f_*^{(r)}(x) \in M_{2n,\omega}^* \cap M_{2n,\omega}^0$$

и

$$|f_*|^{p-1} \operatorname{sign} f_* \perp M_{2n-1}.$$

Доказательство. Пусть ξ — произвольный вектор сферы S_{2n}. В силу теоремы 2 существует непрерывное отображение ψ_n: $S_{2n} \to M_{2n,\omega}^*$ такое, что $\psi_n(-\xi) = -\psi_n(\xi)$. Обозначим

$$g_0(\xi, x) = \psi_n(\xi).$$

Определим на $[0, 2\pi]$ функции $g_i(\xi, x)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, равенствами

$$g_i(\xi, x) = \int_0^x g_{i-1}(\xi, t)\, dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t g_{i-1}(\xi, u)\, du\, dt.$$

Функция $g_r(\xi, x)$ при любом $r = 0, 1, \ldots$ непрерывна на $[0, 2\pi]$ и ни на одном из промежутков $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$ не совпадает с тождественной константой, поэтому существует единственное число $C(\xi)$ такое, что

$$\int_0^{2\pi} |g_r(\xi, x) - C(\xi)|^{p-1} \operatorname{sign}(g_r(\xi, x) - C(\xi))\, dx = 0.$$

Пусть

$$G_r(\xi, x) = g_r(\xi, x) - C(\xi).$$

Определим на сфере S_{2n} непрерывное $(2n-1)$-мерное векторное поле

$$\nu(\xi) = (\nu_1(\xi), \nu_2(\xi), \ldots, \nu_{2n-1}(\xi))$$

следующим образом:

$$\nu_1(\xi) = \int_0^{2\pi} g_0(\xi, x)\, dx = \int_0^{2\pi} G_r^{(r)}(\xi, x)\, dx,$$

$$\nu_i(\xi) = \int_0^{2\pi} |G_r(\xi, x)|^{p-1} \operatorname{sign} G_r(\xi, x)\, e_i(x)\, dx, \qquad i = 2, \ldots, 2n-1.$$

Поскольку $\nu(-\xi) = -\nu(\xi)$ для любого $\xi \in S_{2n}$, то в силу теоремы 3 существует вектор $\xi_* \in S_{2n}$ такой, что $\nu(\xi_*) = 0$, т. е. $\nu_i(\xi_*) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 2n-1$. Так как $\nu_1(\xi_*) = 0$, то $\tilde{G}_r^{(r)}(\xi_*, x) \in M_{2n,\omega}^* \cap M_{2n,\omega}^0$. Кроме того,

$$\left|\tilde{G}_r(\xi_*, x)\right|^{p-1} \operatorname{sign} \tilde{G}_r(\xi_*, x) \perp M_{2n-1}.$$

Таким образом, функция $f_*(x) = \tilde{G}_r(\xi_*, x)$ удовлетворяет всем условиям леммы.

Теорема 5. *Пусть* $n = 1, 2, \ldots$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, $p \in [1, \infty)$, $\omega(t)$ — *выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда*

$$d_{2n-1}(W^{r+1}H_1^{\omega}, L_p) \geq \frac{1}{4n} \|f_{n,r}(\omega)\|_p.$$

Доказательство. Из известного критерия элемента наилучшего приближения следует

$$\inf_{\varphi \in M_{2n-1}} \left\| \frac{1}{4n} f_* - \varphi \right\|_p = \frac{1}{4n} \|f_*\|_p, \tag{1}$$

где f_* — функция, фигурирующая в лемме. В силу теоремы 1 $f_*(x)/(4n) \in$ $\in W^{r+1}H_1^{\omega}$, а тогда из теоремы 4 и равенства (1) следует

$$d_{2n-1}(W^{r+1}H_1^{\omega}, L_p) \geq \frac{1}{4n} \|f_{n,r}(\omega)\|_p,$$

что и требовалось доказать.

Перейдем к оценке поперечников в смысле Гельфанда. Пусть M^{2n-1} — произвольное подпространство L_p коразмерности $2n-1$. Согласно определению коразмерности существует подпространство M_{2n-1} пространства $L_{p'}$, $1/p' +$ $+ 1/p = 1$, размерности $2n-1$ такое, что

$$M^{2n-1} = \left\{ f \in L_{p'} : f \perp M_{2n-1} \right\}.$$

Пусть $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n-1}\}$ — система линейно независимых функций из M_{2n-1}. Если все φ_i в среднем равны 0 на периоде, $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$, и так как при любом $\lambda > 0$ $\lambda e \in W^r H_1^\omega$, $r = 1, 2, \ldots$, то

$$\sup_{f \in W^r H_1^\omega \cap M^{2n-1}} \|f\|_p \geq \sup_{\lambda > 0} \|\lambda e\|_p = \infty.$$

Поэтому в дальнейшем будем считать, что функция φ_1 имеет отличное от нуля среднее значение на $[0, 2\pi]$.

Положим

$$F_r(\xi, x) = g_r(\xi, x) - \frac{\int_0^{2\pi} g_r(\xi, x)\, \varphi_1(x)\, dx}{\int_0^{2\pi} \varphi_1(x)\, dx},$$

где $g_r(\xi, x)$ — функция, определенная в ходе доказательства леммы.

Определим на сфере S_{2n} векторное поле $\zeta(\xi) = \{\zeta_1(\xi), \zeta_2(\xi), \ldots$ $\ldots, \zeta_{2n-1}(\xi)\}$ следующим образом:

$$\zeta_1(\xi) = \int_0^{2\pi} g_0(\xi, x)\, dx = \int_0^{2\pi} g_r^{(r)}(\xi, x)\, dx,$$

$$\zeta_i(\xi) = \int_0^{2\pi} F_r(\xi, x)\, \varphi_i(x)\, dx, \quad i = 2, \ldots, 2n-1.$$

Поскольку поле $\zeta(\xi)$ непрерывно на S_{2n} и для всех $\zeta \in S_{2n}$ $\zeta(-\xi) = -\zeta(\xi)$, то, применяя теорему 3, находим вектор $\bar{\zeta} \in S_{2n}$ такой, что $\zeta_i(\bar{\xi}) = 0$, $i = 1, \ldots, 2n-1$. Из теоремы 1 и способа построения функции $F_r(\bar{\xi}, x)$ следует, что $\tilde{F}_r(\bar{\xi}, x)/(4n) \in W^{r+1} H_1^\omega \cap M^{2n-1}$, а тогда в силу теоремы 4 и произвольности выбора подпространства M^{2n-1} справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, $n = 1, 2, \ldots$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, $p \in [1, \infty)$. Тогда*

$$d^{2n-1}\left(W^{r+1} H_1^\omega, L_p\right) \geq \frac{1}{4n} \left\| f_{n,r}(\omega) \right\|_p.$$

1. *Лигун А. А., Черная Е. В.* Об экстремальных задачах на классах функций, определяемых интегральными модулями непрерывности // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1499 – 1503.
2. *Borsuk K.* Drei Satze über die n-dimentionale euklidishe Sphare // Fund. Math. – 1933. – **20**. – S. 177 – 191.
3. *Моторный В. П., Рубан В. И.* Поперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций в пространстве L // Мат. заметки. – 1975. – **11**, № 4. – С. 531 – 543.
4. *Лигун А. А.* О поперечниках некоторых классов дифференцируемых периодических функций // Там же. – 1980. – **27**, № 1. – С. 61 – 65.

Получено 21.11.97