УДК 519.21

**В. В. Булдыгин, О. О. Демьяненко** (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ")

# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ЭМПИРИЧЕСКОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ОДНОРОДНОГО ВЕКТОРНОЗНАЧНОГО ГАУССОВСКОГО ПОЛЯ

We consider properties of empirical correlation matrix of a centered Gaussian stationary vector field in various function spaces. We prove that, under condition of square integrability of spectral density of the field, the normalization effect takes place for a carrelogram and integral functionals of it.

Розглянуто властивості емпіричної кореляційної матриці центрованого гауссівського стаціонарного векторного поля в різних функціональних просторах. Доведено, що за умови інтегровності спектральної щільності поля у квадраті для корелограми та інтегральних функціоналів від неї має місце ефект нормалізації.

**1. Введение.** Пусть $\vec{X} = (X_1(t), \ldots, X_l(t)),\ t \in R^m$, — однородное центрированное измеримое сепарабельное стохастически непрерывное векторное гауссовское случайное поле, заданное на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, с корреляционной матрицей

$$\mathbb{B}(u) = [B^{(ab)}(u)]_{a,b=1}^{l}, \quad u \in R^m,$$

где

$$B^{(ab)}(u) = \mathbb{E}\, X_a(t) X_b(t+u), \quad u, t \in R^m, \quad a, b = 1, \ldots, l.$$

В качестве оценки корреляционной матрицы $\mathbb{B}$ рассмотрим эмпирическую корреляционную матрицу

$$\mathbb{B}_T(u) = [B_T^{(ab)}(u)]_{a,b=1}^{l}, \quad u \in R^m,$$

где

$$B_T^{(ab)}(u) = T^{-m} \int\limits_{\Pi(T)} X_a(t) X_b(t+u)\, dt, \quad u \in R^m,$$

$$\Pi(T) = [0, T]^m, \quad T > 0.$$

Эмпирическая корреляционная матрица $\mathbb{B}_T$ является несмещенной оценкой корреляционной матрицы $\mathbb{B}$, т. е.

$$\mathbb{E}\, \mathbb{B}_T(u) = \mathbb{B}(u), \quad u \in R^m. \tag{1}$$

Асимптотические свойства случайной матрицы $\mathbb{B}_T$ связаны с поведением матричного случайного поля

$$\mathbb{Y}_T(u) = [Y_T^{(ab)}(u)]_{a,b=1}^{l}, \quad u \in R^m, \quad T > 0,$$

где

$$Y_T^{(ab)}(u) = T^{m/2}(B_T^{(ab)}(u) - B^{(ab)}(u)) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Рассмотрим корреляционную матрицу

$$\mathbb{K}_T = [K_T^{(ab,cd)}(u_1, u_2)]_{a,b,c,d=1}^l, \quad u_1, u_2 \in R^m,$$

случайной матрицы $\mathbb{Y}_T$, где

$$K_T^{(ab,cd)}(u_1, u_2) = \mathbb{E}\, Y_T^{(ab)}(u_1)\, Y_T^{(cd)}(u_2).$$

Применяя формулу Иссерлиса [1], легко показать, что для всех $a, b, c, d = 1, \ldots, l$

$$K_T^{(ab,cd)}(u_1, u_2) =$$

$$= \int_{R^m} (B^{(ac)}(\tau)\, B^{(bd)}(\tau + u_2 - u_1) + B^{(ad)}(\tau + u_2)\, B^{(bc)}(\tau - u_1))\, A_T(u)\, du,$$

где

$$A_T(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{mes}((\Pi(T) - \tau) \cap \Pi(T))}{\operatorname{mes}(\Pi(T))}, & \tau \in (\Pi(T) - \Pi(T)) = \{x\colon\ x = z - y, \\ & \qquad x \in \Pi(T),\ y \in \Pi(T)\}, \\ 0, & \tau \in R^m \setminus (\Pi(T) - \Pi(T)). \end{cases}$$

Заметим, что функция $A_T(\tau)$ имеет следующие свойства:

1) $0 \le A_T(\tau) \le 1$, $\tau \in R^m$, $T > 0$;

2) $\forall\, \tau \in R^m$ $A_T(\tau) \to 1$, $T \to \infty$.

Пусть все элементы корреляционной матрицы поля $\vec{X}$ интегрируемы в квадрате, т. е.

$$B^{(ab)} \in L_2(R^m), \quad a, b = 1, \ldots, l.$$

Тогда согласно теореме Лебега о предельном переходе

$$K^{(ab,cd)}(u_1, u_2) = \lim_{T \to \infty} K_T^{(ab,cd)}(u_1, u_2) =$$

$$= \int_{R^m} (B^{(ac)}(\tau)\, B^{(bd)}(\tau + u_2 - u_1) + B^{(ad)}(\tau + u_2)\, B^{(bc)}(\tau - u_1))\, d\tau, \tag{2}$$

$$a, b, c, d = 1, \ldots, l.$$

Далее будем считать, что поле $\vec{X}$ имеет матрицу спектральных плотностей

$$[f^{(ab)}(\lambda)]_{a,b=1}^l, \quad \lambda \in R^m,$$

т. е. для всех $a, b = 1, \ldots, l$ $f^{(ab)} \in L_1(\mathbb{C}^m)$, где $L_1(\mathbb{C}^m)$ — пространство абсолютно интегрируемых комплекснозначных функций, и для любых $u \in R^m$

$$B^{(ab)}(u) = \int_{R^m} \exp\{i\langle\lambda, u\rangle\}\, f^{(ab)}(\lambda)\, d\lambda.$$

При этом предполагается, что $f^{(ab)} \in L_2(\mathbb{C}^m)$, $a, b = 1, \ldots, l$, т. е.

$$\int_{R^m} |f^{(ab)}(\lambda)|^2\, d\lambda < \infty. \tag{3}$$

Если выполнено условие (3), то из соотношения (2) и формулы Парсеваля вытекает, что для всех $a, b, c, d = 1, \ldots, l$

$$K^{(ab,cd)}(u_1,u_2) = (2\pi)^m \int\limits_{R^m} \Big(\exp\{i\langle\lambda,u_1\rangle\}(\cos\langle\lambda,u_2\rangle \det \mathbb{F}_-^{(ab,cd)}(\lambda) -$$
$$- i\sin\langle\lambda,u_2\rangle \det \mathbb{F}_+^{(ab,cd)}(\lambda))\Big)\,d\lambda,$$

где

$$\mathbb{F}_-^{(ab,cd)}(\lambda) = \begin{bmatrix} f^{(ac)}(\lambda) & f^{(ad)}(\lambda) \\ \overline{f^{(bc)}(\lambda)} & \overline{f^{(bd)}(\lambda)} \end{bmatrix},$$
$$\mathbb{F}_+^{(ab,cd)}(\lambda) = \begin{bmatrix} f^{(ac)}(\lambda) & -f^{(ad)}(\lambda) \\ \overline{f^{(bc)}(\lambda)} & \overline{f^{(bd)}(\lambda)} \end{bmatrix},$$

а $\bar{f}$ обозначает функцию, сопряженную с $f$.

***Замечание.*** Все приводимые ниже доказательства подобны для действительной части функции $K^{(ab,cd)}$ и для ее мнимой части. Поэтому для сокращения выкладок будем детально рассматривать лишь ту ситуацию, когда все спектральные плотности действительны. В этом случае функции $K^{(ab,cd)}$, $a,b,c,d = 1,\ldots,l$, имеют вид

$$K^{(ab,cd)}(u_1,u_2) = (2\pi)^m \int\limits_{R^m} \Big(\det \mathbb{F}_+^{(ab,cd)}(\lambda)\sin\langle\lambda,u_1\rangle \sin\langle\lambda,u_2\rangle +$$
$$+ \det \mathbb{F}_-^{(ab,cd)}(\lambda)\cos\langle\lambda,u_1\rangle\cos\langle\lambda,u_2\rangle\Big)\,d\lambda,$$

где

$$\mathbb{F}_-^{(ab,cd)}(\lambda) = \begin{bmatrix} f^{(ac)}(\lambda) & f^{(ad)}(\lambda) \\ f^{(bc)}(\lambda) & f^{(bd)}(\lambda) \end{bmatrix},$$
$$\mathbb{F}_+^{(ab,cd)}(\lambda) = \begin{bmatrix} f^{(ac)}(\lambda) & -f^{(ad)}(\lambda) \\ f^{(bc)}(\lambda) & f^{(bd)}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Пусть

$$\mathbb{Y}(u) = [Y^{(ab)}(u)]_{a,b=1}^{l}, \qquad u \in R^m,$$

— случайная матрица, где $Y^{(ab)}(u)$, $u \in R^m$, $a,b = 1,\ldots,l$, — также совместно-гауссовские однородные измеримые сепарабельные действительные векторные центрированные поля такие, что

$$\mathbb{E}Y^{(ab)}(u_1)Y^{(cd)}(u_2) = K^{(ab,cd)}(u_1,u_2),$$
$$u_1,u_2 \in R^m, \quad a,b,c,d = 1,\ldots,l,$$

а функции $K^{(ab,cd)}$ задаются соотношением (2).

В настоящей работе изучаются условия слабой сходимости интегральных функционалов поля $\mathbb{Y}_T$. При этом на спектральные плотности $f^{(ab)}$ налагается лишь условие (3).

Подобная задача в случае линейных интегральных функционалов для эмпирической периодограммы исследовалась в работах Р. Бенткуса [2] и М. А. Ибрагимова [3]. Условия сходимости процессов и полей типа $\mathbb{Y}_T$ в различных функциональных пространствах изучались в работах А. В. Иванова [4, 5], Н. Н. Леоненко, А. В. Иванова [6], В. В. Булдыгина и В. В. Зайца [7], В. В. Булдыгина и О. О. Демьяненко [8, 9], В. В. Булдыгина [10].

Используемый в ходе доказательства теоремы 1 метод, основанный на исследовании предельного поведения моментных функций и техники их вычислений, восходит к работе [2] и применялся в работах [7–10]. Результаты этой статьи были анонсированы в [9].

## 2. Формулировка основных результатов.

**Теорема 1.** *Пусть спектральные плотности поля* $\vec{X}$ *интегрируемы в квадрате, т. е. выполняется соотношение* (3). *Тогда для любых* $n \geq 1$, $u_1, \ldots$ $\ldots, u_n \in R^m$, $a_k, b_k = 1, \ldots, l$

$$\lim_{T \to \infty} \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} Y_T^{(a_k b_k)}(u_k)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} Y^{(a_k b_k)}(u_k)\right]. \tag{4}$$

*В частности, все конечномерные распределения случайного поля* $\mathbb{Y}_T(u)$, $u \in R^m$, *сходятся при* $T \to \infty$ *к соответствующим конечномерным распределениям случайного поля* $\mathbb{Y}(u)$, $u \in R^m$.

В дальнейшем знак $\Rightarrow$ означает слабую сходимость распределений или случайных величин и полей.

Пусть $L_p(\Pi(T), R^{l^2})$, $p \geq 1$, — пространство векторнозначных интегрируемых по Лебегу в $p$-й степени функций, определенных на $\Pi(T)$, $T > 0$. Матрицы $\mathbb{Y}_T(u)$, $\mathbb{Y}(u)$, $u \in R^m$, будем рассматривать как векторы размерности $l^2$.

**Теорема 2.** *Пусть спектральные плотности* $f^{(ab)}(\lambda)$, $\lambda \in R^m$, $a, b = 1, \ldots$ $\ldots, l$, *поля* $\vec{X}$ *интегрируемы в квадрате. Тогда для всех* $T > 0$ *и всех* $p \geq 1$ *имеют место следующие утверждения*:

1) $\mathbb{Y} \in L_p(\Pi(T), R^{l^2})$ *почти наверное*;

2) $\mathbb{Y}_T \in L_p(\Pi(T), R^{l^2})$ *почти наверное*;

3) $\mathbb{Y}_T$ *слабо сходится при* $T \to \infty$ *к* $\mathbb{Y}$ *в пространстве* $L_p(\Pi(T), R^{l^2})$, *т. е. для любого* $L_p(\Pi(T), R^{l^2})$*-непрерывного функционала* $f$

$$f(\mathbb{Y}_T) \underset{T \to \infty}{\Rightarrow} f(\mathbb{Y}).$$

**Теорема 3.** *Пусть* $(g(u, x), u \in R^m, x \in R^{l^2})$ — *непрерывная функция такая, что для любых* $u \in R^m, x \in R^{l^2}$

$$|g(u, x)| \leq c(u) \exp\{\gamma |x|\},$$

*где* $0 < \gamma < (4(2\pi)^m A^2)^{-1/2}$,

$$A = \sup_{a,b=1,\ldots,l} (\|f^{(ab)}\|_2),$$

$$(c(u), u \in R^m) \in L_1(R^m),$$

*кроме того, для всех* $T > 0$

$$\sup_{u \in \Pi(T)} c(u) = c_T < \infty.$$

*Если выполняется условие* (2), *то*

$$G(\mathbb{Y}_T) \underset{T \to \infty}{\Rightarrow} G(\mathbb{Y}),$$

*где*

$$G(y(\cdot)) = \int_{R^m} g(u, y(u))\, du.$$

Пусть $T > 0$, $C([0, T]^m)$ — пространство непрерывных действительнозначных функций $f(u)$, $u \in [0, T]^m$, и $C([0, T]^m, R^d)$ — пространство векторнозначных функций

$$\vec{f}(u) = (f^1(u), \ldots, f^d(u)), \quad u \in [0, T]^m,$$

где

$$(f^{(k)}(u),\ u \in [0, T]^m) \in C([0, T]^m), \quad k = 1, \ldots, d.$$

Пусть $S \subseteq R^m$, $\rho(t, s)$, $t, s \in S$, — некоторая псевдометрика. Обозначим через $N_\rho(S, \varepsilon)$ наименьшее число открытых $\rho$-шаров радиуса $\varepsilon > 0$, центры которых лежат в $S$ и покрывают множество $S$. Если конечного покрытия не существует, то считаем, что $N_\rho(S, \varepsilon) = \infty$.

$H_\rho(S, \varepsilon) = \ln N_\rho(S, \varepsilon)$ — энтропия множества $S$ относительно псевдометрики $\rho$. Выражение

$$\int_{0^+} H_\rho(S, \varepsilon)\, d\varepsilon < \infty$$

означает, что существует такое $a > 0$, что

$$\int_0^a H_\rho(S, \varepsilon)\, d\varepsilon < \infty.$$

Рассмотрим функцию

$$\sigma^{(ab)}(u) = \left[ \int_{R^m} \sin^2 \frac{\langle \lambda, u \rangle}{2} |f^{(ab)}(\lambda)|^2\, d\lambda \right]^{1/2}, \quad u \in R^m.$$

Поскольку выполняется (2), эта функция определена и задает псевдометрики

$$\sigma^{(ab)}(u_1, u_2) = \left[ \int_{R^m} \sin^2 \frac{\langle \lambda, u_1 - u_2 \rangle}{2} |f^{(ab)}(\lambda)|^2\, d\lambda \right]^{1/2},$$

$$\sqrt{\sigma^{(ab)}}(u_1, u_2) = \sqrt{\sigma^{(ab)}(u_1, u_2)}, \quad u_1,\ u_2 \in R^m.$$

Положим

$$H_{\sigma^{(ab)}}(\varepsilon) = H_{\sigma^{(ab)}}\big([0,1]^m, \varepsilon\big),$$

$$H_{\sqrt{\sigma^{(ab)}}}(\varepsilon) = H_{\sqrt{\sigma^{(ab)}}}([0,1]^m, \varepsilon).$$

Поскольку псевдометрики $\sigma^{(ab)}$, $\sqrt{\sigma^{(ab)}}$ зависят лишь от разности $u_1 - u_2$, то для любого $T > 0$

$$\int_{0^+} H_{\sigma^{(ab)}}(\varepsilon)\, d\varepsilon < \infty \Leftrightarrow \int_{0^+} H_{\sigma^{(ab)}}([0,T]^m, \varepsilon)\, d\varepsilon < \infty,$$

$$\int_{0^+} H_{\sqrt{\sigma^{(ab)}}}(\varepsilon)\, d\varepsilon < \infty \Leftrightarrow \int_{0^+} H_{\sqrt{\sigma^{(ab)}}}([0,T]^m, \varepsilon)\, d\varepsilon < \infty.$$

Кроме того, так как для всех $u_1, u_2 \in R^m$

$$\sigma^{(ab)}(u_1,\, u_2) \le \left[ \max_{u_1, u_2 \in R^m} \sigma^{(ab)}(u_1, u_2) \right]^{1/2} \sqrt{\sigma^{(ab)}}(u_1, u_2) \le$$

$$\le \sqrt{\|f^{(ab)}\|_2}\, \sqrt{\sigma^{(ab)}}(u_1, u_2), \tag{5}$$

то из того, что

$$\int_{0^+} H_{\sqrt{\sigma^{(ab)}}}(\varepsilon)\, d\varepsilon < \infty$$

следует

$$\int_{0^+} H_{\sigma^{(ab)}}(\varepsilon)\, d\varepsilon < \infty,$$

откуда, в свою очередь, вытекает

$$\int_{0^+} H^{1/2}_{\sigma^{(ab)}}(\varepsilon)\, d\varepsilon < \infty. \tag{6}$$

**Теорема 4.** *Пусть выполняется соотношение* (3) *и*

$$\sup_{a,b=1,\ldots,l} \int_{0^+} H_{\sqrt{\sigma^{(ab)}}}(\varepsilon)\, d\varepsilon < \infty. \tag{7}$$

*Тогда для любого* $T > 0$:

1) $\mathbb{Y} \in C\big([0,T]^m, R^{l^2}\big)$ *почти наверное;*

2) $\mathbb{Y}_T$ *слабо сходится при* $T \to \infty$ *к* $\mathbb{Y}$ *в пространстве непрерывных функций, т. е. для любого* $C\big([0,T]^m, R^{l^2}\big)$*-непрерывного функционала* $f$

$$f(\mathbb{Y}_T) \underset{T\to\infty}{\Rightarrow} f(\mathbb{Y}).$$

***Следствие.*** *Пусть выполняется условие* (3) *и для любых* $a, b = 1, \ldots, l$ *найдется такое* $\delta = \delta(a,b) > 0$, *что*

$$\int_{R^m} |f^{(ab)}(\lambda)|^2 \ln^{4+\delta}(1 + |\lambda|)\, d\lambda < \infty.$$

*Тогда справедливы утверждения* 1 *и* 2 *теоремы* 4.

**3. Предварительные утверждения.** Поскольку у центрированных совместно-гауссовских случайных величин все семиинварианты выше второго порядка равны нулю, то из формул Леонова–Ширяева [11] вытекает следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Пусть* $n \geq 2$, $u_1, \ldots, u_n \in R^m$, $a_k, b_k = 1, \ldots, l$, $k = 1, \ldots, n$. *Если* $n$ *— нечетное натуральное число, то*

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} Y^{(a_k b_k)}(u_k)\right) = 0,$$

*а если* $n$ *— четное натуральное число, то*

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} Y^{(a_k b_k)}(u_k)\right) = \sum_{\{k_1,k_2\}\cup\ldots\cup\{k_{n-1},k_n\}} \prod_{\substack{j=1 \\ j\text{—нечетное}}}^{n-1} (2\pi)^m \times$$

$$\times\left[\int_{R^m} \left(\det \mathbb{F}_{+}^{(a_j b_j, a_{j+1} b_{j+1})}(\lambda) \sin\langle\lambda, u_1\rangle \sin\langle\lambda, u_2\rangle + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \det \mathbb{F}_{-}^{(a_j b_j, a_{j+1} b_{j+1})}(\lambda) \cos\langle\lambda, u_1\rangle \cos\langle\lambda, u_2\rangle\right) d\lambda\right], \tag{8}$$

*где сумма в правой части равенства берется по всем неупорядоченным разбиениям множества* $\{1, \ldots, n\}$ *на непересекающиеся двухэлементные подмножества* $\{k_1, k_2\}, \ldots, \{k_{n-1}, k_n\}$. *Кроме того, для любого* $n \geq 2$

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} Y_T^{(a_k b_k)}(u_k)\right) =$$

$$= \sum_{D_1\cup\ldots\cup D_n} T^{-nm/2} \int_{\Pi(T)} \ldots \int_{\Pi(T)} (\operatorname{cov}(D_1) \times \ldots \times \operatorname{cov}(D_n))\, dt_1 \ldots dt_n, \tag{9}$$

*где сумма в правой части равенства берется по всем неупорядоченным разбиениям таблицы*

$$D = \begin{pmatrix} X_{a_1}(t_1) & X_{b_1}(t_1 + u_1) \\ \dotfill & \dotfill \\ X_{a_n}(t_n) & X_{b_n}(t_n + u_n) \end{pmatrix} \tag{10}$$

*на непересекающиеся двухэлементые подмножества* $D_k$, $k = 1, \ldots, n$, *не содержащие строк таблицы* $D$, $\operatorname{cov} D_k = \mathbb{E}\xi\eta$, *если* $D_k = \{\xi, \eta\}$.

**Лемма 2.** *Пусть* $p \geq 1$, $\bar{\xi} = \{\bar{\xi}(t), t \in S\} \subset R^d$, $\bar{\xi}_\alpha = \{\bar{\xi}_\alpha(t), t \in S\} \subset R^d$, $\alpha > 0$, *— измеримые сепарабельные случайные векторные поля,* $S \subset R^m$ *— некоторое компактное множество,* $\operatorname{mes}(S) > 0$.

*Пусть, кроме того, выполняются условия:*

1) *все конечномерные распределения случайного векторного поля* $\bar{\xi}_\alpha$ *сходятся к соответствующим конечномерным распределениям векторного поля* $\bar{\xi}$ *при* $\alpha \to \infty$;

2) $\mathbb{E}|\bar{\xi}_\alpha|_d^p \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} \mathbb{E}|\bar{\xi}|_d^p$, $t \in S$;

3) $\sup\limits_{T>0}\sup\limits_{t\in S} \mathbb{E}|\bar{\xi}_\alpha|_d^p = c < \infty$.

*Тогда*

$$\bar{\xi}_\alpha \underset{\alpha\to\infty}{\overset{L_p(S,R^d)}{\Rightarrow}} \bar{\xi}.$$

***Доказательство леммы*** повторяет доказательство аналогичного утверждения, рассмотренного при $l = 1$ в работе [5].

Рассмотрим семейство случайных векторных полей

$$\{\mathbb{Z}_\alpha\} = \{\mathbb{Z}_\alpha(u) = (\mathbb{Z}_\alpha^{(1)}(u), \ldots, \mathbb{Z}_\alpha^{(d)}(u)),\ u \in [0, T]^m,\ \alpha \in [0, +\infty)\}.$$

Пусть $\mathbb{Z} = \{\mathbb{Z}(u) = (\mathbb{Z}^{(1)}(u), \ldots, \mathbb{Z}^{(d)}(u)),\ u \in [0, T]^m\}$ — некоторое случайное векторное поле.

**Лемма 3.** *Пусть* $\mathbb{Z}_\alpha \in C([0,T]^m, R^d)$ *почти наверное и* $\mathbb{Z} \in C([0,T]^m, R^d)$ *почти наверное. Для того чтобы поля* $\mathbb{Z}_\alpha$ *слабо сходились при* $\alpha \to \infty$ *к полю* $\mathbb{Z}$ *в пространстве непрерывных функций* $C([0,T]^m, R^d)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись такие условия:*

1) *все конечномерные распределения полей* $\mathbb{Z}_\alpha$ *сходятся при* $\alpha \to \infty$ *к соответствующим конечномерным распределениям поля* $\mathbb{Z}$;

2) *при любых* $k = 1, \ldots, d$, $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_\alpha P\left\{ \sup_{\substack{u_1, u_2 \in [0,T]^m \\ |u_1 - u_2| < \delta}} |\mathbb{Z}_\alpha^{(k)}(u_1) - \mathbb{Z}_\alpha^{(k)}(u_2)| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Лемма 3 является частным случаем общего утверждения Прохорова [12].

**Лемма 4.** *Пусть* $(S, \rho)$ — *псевдометрический компакт;* $\{\mathbb{Z}_\alpha(s), s \in S\}$ — *семейство по параметру* $\alpha$ *непрерывных почти наверное случайных полей. Пусть выполняются следующие условия:*

1) *существуют такие* $a > 0$, $b > 0$, $x_0 > 0$ *и для каждого* $\alpha$ *существует такая псевдометрика* $\rho_\alpha$ *на* $S$, *что для любых* $x \in (0, x_0)$, $s, t \in S$

$$P\{|\mathbb{Z}_\alpha(s) - \mathbb{Z}_\alpha(t)| \geq x\} < a\left(\exp\left\{-b\frac{x}{\rho_\alpha(t,s)}\right\}\right);$$

2) *псевдометрика* $\rho_\infty(t, s) = \sup\limits_\alpha \rho_\alpha(t, s)$, $t, s \in S$, *ограничена на* $S$ *и непрерывна относительно псевдометрики* $\rho$;

3) $\lim\limits_{u\to 0} \sup\limits_\alpha \int\limits_0^u H_\alpha(S, \varepsilon)\, d\varepsilon = 0$, *где* $H_\alpha(S, \varepsilon) = H_{\rho_\alpha}(S, \varepsilon)$.

*Тогда для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\Delta\to 0} \sup P\left\{ \sup_{\substack{s,t \in S \\ \rho(s,t) < \Delta}} |\mathbb{Z}_\alpha(s) - \mathbb{Z}_\alpha(t)| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Лемма 4 является частным случаем утверждения, рассмотренного в работе [7] при $c = 1$.

**Лемма 5.** *Пусть выполняется условие* (3). *Тогда для любых* $T > 0$, $u_1$, $u_2 \in R^m$ *выполняется неравенство*

$$\mathbb{E}\,|Y_T^{(ab)}(u_1) - Y_T^{(ab)}(u_2)|^2 \le 4(2\pi)^m \left( \int\limits_{R^m} (f^{(ab)}(\lambda))^2 \sin^2 \frac{\langle \lambda, u_1 - u_2 \rangle}{2}\, d\lambda + \right.$$

$$\left. + \|f^{(aa)}(\lambda)\|_2 \left( \int\limits_{R^m} (f^{(bb)}(\mu))^2 \sin^2 \frac{\langle \mu, u_2 - u_1 \rangle}{2}\, d\mu \right)^{1/2} \right).$$

***Доказательство леммы* 5.** Из соотношения (1), вида поля $Y_T(u)$, теоремы Бохнера – Хинчина, теоремы Планшереля и того, что рассматриваются действительнозначные поля, можно записать

$$\mathbb{E}\,|Y_T^{(ab)}(u_1) - Y_T^{(ab)}(u_2)|^2 \le$$

$$\le 4(2\pi)^m \int\limits_{R^m}\int\limits_{R^m} \Phi_T(\lambda + \mu) \left( f^{(aa)}(\lambda)\, f^{(bb)}(\mu) \sin^2 \frac{\langle \mu, u_2 - u_1 \rangle}{2} + \right.$$

$$\left. + f^{(ab)}(\lambda)\, f^{(ba)}(\mu) \cos \frac{\langle \lambda - \mu, u_1 + u_2 \rangle}{2} \sin \frac{\langle \lambda, u_1 - u_2 \rangle}{2} \sin \frac{\langle \mu, u_1 - u_2 \rangle}{2} \right) d\lambda\, d\mu,$$

где

$$\Phi_T(x) = (2\pi T)^{-m} \prod_{j=1}^{m} \left( \frac{\sin(x^{(j)} T/2)}{x^{(j)}/2} \right)^2, \quad x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}) \in R^m,$$

— многомерное ядро Фейера. Оценим отдельно каждое слагаемое этой суммы. Зафиксируем $u_1$, $u_2$ и положим

$$\varphi^{(ab)}(\lambda) = \left| f^{(ab)}(\mu) \sin \frac{\langle \lambda, u_1 - u_2 \rangle}{2} \right|,$$

$$\varphi^{(ba)}(\mu) = \left| f^{(ba)}(\mu) \sin \frac{\langle \mu, u_1 - u_2 \rangle}{2} \right|.$$

Согласно неравенству Коши – Буняковского, а также известному неравенству для сверток $\|u * v\|_2 \le \|u\|_1 \|v\|_2$, можно записать

$$I_1 = 4(2\pi)^m \int\limits_{R^m}\int\limits_{R^m} f^{(ab)}(\lambda)\, f^{(ba)}(\mu)\, \Phi_T(\lambda + \mu) \times$$

$$\times \cos \frac{\langle \lambda - \mu, u_1 + u_2 \rangle}{2} \sin \frac{\langle \lambda, u_1 - u_2 \rangle}{2} \sin \frac{\langle \mu, u_1 - u_2 \rangle}{2}\, d\lambda\, d\mu \le$$

$$\le 4(2\pi)^m \|\varphi^{(ab)}\|_2\, \|\Phi_T * \varphi^{(ba)}\|_2 \le$$

$$\le 4(2\pi)^m \|\varphi^{(ab)}\|_2\, \|\Phi_T\|_1\, \|\varphi^{(ba)}\|_2,$$

где

$$\|\Phi_T\|_1 = \int\limits_R \leftrightarrow \int\limits_R \prod_{j=1}^{m} |\Phi_T(x^{(j)})|\, dx^{(1)} \ldots dx^{(m)} = 1.$$

Тогда

$$|I_1| \le 4(2\pi)^m \|\varphi^{(ab)}\|_2 \|\varphi^{(ba)}\|_2 \le 4(2\pi)^m \int\limits_{R^m} (f^{(ab)}(\lambda))^2 \sin^2 \frac{\langle \lambda, u_1 - u_2 \rangle}{2} \, d\lambda .$$

Оценим второе слагаемое. Положим

$$\psi(\mu) = f^{(bb)}(\mu) \sin^2 \frac{\langle \mu, u_2 - u_1 \rangle}{2} .$$

Тогда

$$I_2 = 4(2\pi)^m \int\limits_{R^m} \int\limits_{R^m} f^{(aa)}(\mu) f^{(bb)}(\lambda) \Phi_T(\lambda+\mu) \sin^2 \frac{\langle \mu, u_2 - u_1 \rangle}{2} \, d\lambda \, d\mu =$$

$$= 4(2\pi)^m \int\limits_{R^m} \varphi(\mu) \left( \int\limits_{R^m} \Phi_T(\lambda+\mu) f^{(aa)}(\lambda) \, d\lambda \right) d\mu \le$$

$$\le 4(2\pi)^m \|\psi\|_2 \|f^{(aa)}\|_2 \|\Phi_T\|_1 =$$

$$= 4(2\pi)^m \|f^{(aa)}\|_2 \left( \int\limits_{R^m} (f^{(bb)}(\mu))^2 \sin^4 \frac{\langle \mu, u_2 - u_1 \rangle}{2} \, d\mu \right)^{1/2} \le$$

$$\le 4(2\pi)^m \|f^{(aa)}\|_2 \left( \int\limits_{R^m} (f^{(bb)}(\mu))^2 \sin^2 \frac{\langle \mu, u_2 - u_1 \rangle}{2} \, d\mu \right)^{1/2} .$$

**4. Доказательство теорем.** ***Доказательство теоремы* 1.** Из того, что поля $Y_T^{(ab)}(u)$, $Y^{(ab)}(u)$, $u \in \in R^m$, центрированные, а также из леммы 1 следует, что соотношение (4) выполняется для $n = 1, 2$. Пусть $n \ge 3$. Рассмотрим два случая: когда $n$ — четное и $n$ — нечетное.

1. $n$ — четное число. Рассмотрим детальнее таблицу (10). Будем говорить, что два элемента $D_{k_1}$ и $D_{k_2}$ ее разбиения образуют простой блок, если их объединение совпадает с объединением каких-либо двух строк таблицы $D$. Соответственно, разбиение $(D_1, \ldots, D_n)$ таблицы $D$ назовем простым, если все его элементы можно разбить на пары, образующие простые блоки. Заметим, что в разбиении таблицы существуют простые блоки только при четном $n$. Разбиение таблицы $D$, не являющееся простым, назовем сложным.

Разобьем сумму в правой части равенства (9) на две: $\sum'$ — сумма по простым разбиениям; $\sum''$ — сумма по сложным разбиениям, и докажем, что

$$\sum{}' \xrightarrow[T \to \infty]{} \mathbb{E}\left[ \prod_{k=1}^{n} Y^{(a_k b_k)}(u_k) \right], \quad a_k,\ b_k = 1, \ldots, l, \tag{11}$$

$$\sum{}'' \xrightarrow[T \to \infty]{} 0. \tag{12}$$

Тогда в силу леммы 1 и соотношения (2) при четном $n$ теорема будет доказана.

Для доказательства соотношения (11) рассмотрим структуру простого разбиения таблицы $D$. Зафиксируем две произвольные строки таблицы (10):

$$\begin{pmatrix} X_{a_i}(t_i) & X_{b_i}(t_i + u_i) \\ X_{a_j}(t_j) & X_{b_j}(t_j + u_j) \end{pmatrix}.$$

Пусть элементы $D_{k_1}$ и $D_{k_2}$ образуют простой блок, соответствующий строкам. Тогда

$$D_{k_1} = \{X_{a_i}(t_i), X_{a_j}(t_j)\},$$

$$D_{k_2} = \{X_{b_i}(t_i+u_i), X_{b_j}(t_j+u_j)\}$$

или

$$D_{k_1} = \{X_{a_i}(t_i), X_{b_j}(t_j+u_j)\},$$

$$D_{k_2} = \{X_{a_j}(t_j), X_{b_i}(t_i+u_i)\}.$$

Для удобства блоки первого типа обозначим $D'_{k_1}$, $D'_{k_2}$, а второго — $D^*_{k_1}$, $D^*_{k_2}$. Тогда

$$\sum{}' = \sum_{\substack{\{k_1,k_2\}\cup\ldots\cup\{k_{n-1},k_n\}= \\ =(1,\ldots,n)}} T^{-nm/2} \int\limits_{\Pi(T)} \leftrightarrow \int\limits_{\Pi(T)} \left( \prod_{j=1}^{n-1} (\operatorname{cov}(D'_{k_j}) \operatorname{cov}(D'_{k_j+1}) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{cov}(D^*_{k_j}) \operatorname{cov}(D^*_{k_j+1})) \right) dt_1 \ldots dt_n, \tag{13}$$

где сумма берется по всем неупорядоченным разбиениям множества $\{1, \ldots, n\}$ на непересекающиеся двухэлементые множества $\{k_1, k_2\}, \ldots, \{k_{n-1}, k_n\}$. Это выделяет строки, соответствующие простым блокам первого или второго типа. Выражение

$$\operatorname{cov}(D'_{k_i}) \operatorname{cov}(D'_{k_i+1}) + \operatorname{cov}(D^*_{k_i}) \operatorname{cov}(D^*_{k_i+1}) =$$

$$= B^{(a_{k_i} a_{k_i+1})}(t_{k_i+1} - t_{k_i}) B^{(b_{k_i} b_{k_i+1})}(t_{k_i+1} - t_{k_i} + u_{k_i+1} - u_{k_i}) +$$

$$+ B^{(a_{k_i} b_{k_i+1})}(t_{k_i+1} - t_{k_i} + u_{k_i}) B^{(b_{k_i} a_{k_i+1})}(t_{k_i+1} - t_{k_i} - u_{k_i}) =$$

$$= Q_1(t_{k_i}, t_{k_i+1}) + Q_2(t_{k_i}, t_{k_i+1})$$

зависит лишь от переменных $t_{k_i}$, $t_{k_{i+1}}$. Поэтому слагаемые в правой части равенства (13) распадаются на произведения интегралов

$$\sum{}' = \sum_{\{k_1,k_2\}\cup\ldots\cup\{k_{n-1},k_n\}} \prod_{\substack{j=1 \\ j\text{ — нечетное}}}^{n-1} T^{-m} \int\limits_{\Pi(T)} \int\limits_{\Pi(T)} (Q_1(t_{k_j}, t_{k_j+1}) +$$

$$+ Q_2(t_{k_j}, t_{k_j+1}))\, dt_{k_j}\, dt_{k_j+1}. \tag{14}$$

Согласно теореме Бохнера – Хинчина

$$\int\limits_{\Pi(T)} \int\limits_{\Pi(T)} Q_1(t_{k_i}, t_{k_i+1})\, dt_{k_i}\, dt_{k_i+1} =$$

$$= (2\pi T)^m \int\limits_{R^m} \int\limits_{R^m} \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) \exp\{i\langle \lambda_2, u_{k_i} - u_{k_i+1}\rangle\} \times$$

$$\times f^{(a_{k_i} a_{k_i+1})}(\lambda_1) f^{(b_{k_i} b_{k_i+1})}(\lambda_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2$$

и

$$\int\limits_{\Pi(T)}\int\limits_{\Pi(T)} Q_2(t_{k_i}, t_{k_i+1})\, dt_{k_i}\, dt_{k_i+1} =$$

$$= (2\pi T)^m \int\limits_{R^m}\int\limits_{R^m} \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1)\, f^{(a_{k_i} b_{k_i+1})}(\lambda_1)\, f^{(b_{k_i} a_{k_i+1})}(\lambda_2) \times$$

$$\times \exp\{i\langle \lambda_1, u_{k_i+1}\rangle + i\langle \lambda_2, u_{k_i}\rangle\}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 .$$

Следовательно,

$$Q_T(u_1, u_2) = T^{-m} \int\limits_{\Pi(T)}\int\limits_{\Pi(T)} (Q_1(t_{k_i}, t_{k_i+1}) + Q_2(t_{k_i}, t_{k_i+1}))\, dt_{k_i}\, dt_{k_i+1} =$$

$$= (2\pi)^m \int\limits_{R^m}\int\limits_{R^m} \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1)\, ( f^{(a_{k_i} a_{k_i+1})}(\lambda_1)\, f^{(b_{k_i} b_{k_i+1})}(\lambda_2) \exp\{i\langle \lambda_2, u_{k_i} - u_{k_i+1}\rangle\} +$$

$$+ f^{(a_{k_i} b_{k_i+1})}(\lambda_1)\, f^{(b_{k_i} a_{k_i+1})}(\lambda_2) \exp\{i\langle \lambda_1, u_{k_i+1}\rangle + i\langle \lambda_2, u_{k_i}\rangle\})\, d\lambda_1\, d\lambda_2 . \tag{15}$$

В силу свойства ядра Фейера имеем

$$\lim_{T\to\infty} Q_T(u_{k_i}, u_{k_i+1}) =$$

$$= (2\pi)^m \int\limits_{R^m} ( f^{(a_{k_i} a_{k_i+1})}(\lambda)\, f^{(b_{k_i} b_{k_i+1})}(\lambda) \exp\{i\langle \lambda, u_{k_i} - u_{k_i+1}\rangle\} +$$

$$+ f^{(a_{k_i} b_{k_i+1})}(\lambda)\, f^{(b_{k_i} a_{k_i+1})}(\lambda) \exp\{i\langle \lambda, u_{k_i} + u_{k_i+1}\rangle\})\, d\lambda =$$

$$= (2\pi)^m \int\limits_{R^m} \Big( \det \mathbb{F}_+^{(a_j b_j, a_{j+1} b_{j+1})}(\lambda) \sin\langle \lambda, u_1\rangle \sin\langle \lambda, u_2\rangle +$$

$$+ \det \mathbb{F}_-^{(a_j b_j, a_{j+1} b_{j+1})}(\lambda) \cos\langle \lambda, u_1\rangle \cos\langle \lambda, u_2\rangle \Big)\, d\lambda .$$

Отсюда и из соотношений (8), (14) следует соотношение (11).

Для доказательства соотношения (12) рассмотрим структуру сложного разбиения таблицы $D$. Элементы разбиения $D_{k_1}$, $D_{k_2}$ называют сцепленными, если каждый из них включает в себя компоненту из какой-либо общей для них строки таблицы $D$. Группу последовательно сцепленных элементов $D_{k_1}, \ldots$ $\ldots, D_{k_i}$ называют композиционным блоком. Любой композиционный блок образует разбиение некоторой подтаблицы таблицы $D$. Если композиционный блок содержит лишь два элемента разбиения, то он является простым. Любое разбиение $D_1, \ldots, D_n$ таблицы $D$ можно представить в виде конечного числа композиционных блоков. Следовательно, каждое сложное разбиение содержит, по крайней мере, один композиционный блок, включающий не менее трех элементов разбиения таблицы $D$. Поэтому сумму $\sum''$ можно записать в виде

$$\sum{}'' = \sum \left( \prod_{j=1}^{d} I_T^{(r_j)} \right) \times \left( \prod_{p=0}^{q} Q_T^{(p)} \right), \tag{16}$$

где сумма в правой части равенства содержит конечное число слагаемых, зависящее лишь от $n$; $Q_T^{(0)} \equiv 1$; при $p > 1$ $Q_T^{(p)}$ имеет вид $Q_T$ и задается соотношением (15); $r_j \geq 3$, $j = 1, \ldots, d$, $r_1 + \ldots + r_d + 2q = n$. При этом

$$I_T^{(r_j)} = I_T^{(r_j)}(u_{\mu_j}, \dots, u_{\mu_j+r_j-1}) =$$

$$= T^{-r_j/2} \int\limits_{\Pi(T)} \overset{r_j}{\leftrightarrow} \int\limits_{\Pi(T)} (\operatorname{cov}(D_{\mu_j}) \dots \operatorname{cov}(D_{\mu_j+r_j-1}))\, dt_{\mu_j} \dots dt_{\mu_j+r_j-1},$$

где $(D_{\mu_j}, \dots, D_{\mu_j+r_j-1})$, $j = 1, \dots, d$, — композиционные блоки.

Пусть $r = r_j \geq 3$. Из определения композиционного блока следует

$$I_T^{(r)} = T^{-m/2} \int\limits_{\Pi(T)} \leftrightarrow \int\limits_{\Pi(T)} (\operatorname{cov}(D_1) \dots \operatorname{cov}(D_n))\, dt_1 \dots dt_r =$$

$$= T^{-rm/2} \int\limits_{\Pi(T)} \leftrightarrow \int\limits_{\Pi(T)} \left( \prod_{j=1}^{r-1} \tilde{B}_j(t_j - t_{j+1} + \alpha_j)\, \tilde{B}_j(t_r - t_1) \right) dt_1 \dots dt_r,$$

где $\tilde{B}_j$ — совместная корреляционная функция тех полей, которые содержатся в соответствующем блоке разбиения $(D_1, \dots, D_n)$; $\alpha_j \in \{0; \pm u_j; u_{j+1} - u_j\}$, $j = 1, \dots, r-1$.

Обозначим через $\tilde{f}_j$ спектральную плотность корреляционной функции $\tilde{B}_j$. Тогда

$$I_T^{(r)} = T^{-rm/2} \int\limits_{\Pi(T)} \leftrightarrow \int\limits_{\Pi(T)} \int\limits_{R^m} \leftrightarrow \int\limits_{R^m} \left( \prod_{j=1}^{r-1} \tilde{f}_j(\lambda_j) \exp\{i\langle \lambda_j, t_j - t_{j+1} + \alpha_j \rangle\} \times \right.$$

$$\left. \times\, \tilde{f}_j(\lambda_r) \exp\{i\langle \lambda_r, t_r - t_1 \rangle\} \right) d\lambda_1 \dots d\lambda_r\, dt_1 \dots dt_r =$$

$$= T^{-rm/2} \int\limits_{R^m} \leftrightarrow \int\limits_{R^m} \left( \left( \prod_{j=1}^{r} \tilde{f}_j(\lambda_j) \right) \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{r} \langle \alpha_j, \lambda_j \rangle \right\} \times \right.$$

$$\left. \times\, \hat{\Phi}_T(\lambda_r - \lambda_1) \left( \prod_{j=1}^{r-1} \hat{\Phi}_T(\lambda_j - \lambda_{j+1}) \right) \right) d\lambda_1 \dots d\lambda_r, \tag{17}$$

где

$$\hat{\Phi}_T(x) = \prod_{j=1}^{m} \frac{\sin(Tx^{(j)}/2)}{\sqrt{T}\, x^{(j)}/2}, \quad x = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) \in R^m,$$

согласно лемме 3 работы [10]. Отсюда и из соотношения

$$\lim_{T \to \infty} I_T = 0 \tag{18}$$

вытекает соотношение (12).

2. $n$ — нечетное число. В этом случае любое разбиение таблицы (10) включает в себя композиционный блок, который содержит более двух элементов, т. е. является сложным. В соответствии с доказанным выше соотношением выражение в правой части равенства (4) стремится к нулю при $T \to \infty$ для нечетных $n$. Теорема доказана.

***Доказательство теоремы 2.*** Для доказательства утверждения 1 достаточно показать, что для любого $T > 0$ и любого натурального $n$

$$\mathbb{E} \int\limits_{\Pi(T)} |\mathbb{Y}(u)|_d^{2n}\, du < \infty, \tag{19}$$

где $d = l^2$. В силу гауссовости поля $\mathbb{Y}$, теоремы Фубини – Тонелли и соотношения (2)

$$\mathbb{E} \int_{\Pi(T)} |\mathbb{Y}(u)|_d^{2n} \, du \;\le\; (2n-1)!! \, l^{2n} T^m (2\pi)^m \, 2A,$$

где

$$A \;=\; \sup_{a,b=1,\ldots,l} \|f^{(ab)}\|_2 .$$

Согласно условию теоремы $A < \infty$, следовательно, утверждение 1 доказано.

Аналогично доказывается и утверждение 2.

Для доказательства утверждения 3 согласно лемме 2 и работе [5] достаточно проверить выполнение таких условий:

а) все конечномерные распределения $\mathbb{Y}_T(u)$, $u \in R^m$, сходятся к конечномерным распределениям $\mathbb{Y}(u)$, $u \in R^m$, при $T \to \infty$;

б) для любого $p \ge 1$

$$\sup_{T>0} \sup_{u \in \Pi(T)} \mathbb{E}\,|Y_T|^p \;<\; \infty.$$

Справедливость утверждения а) была установлена при доказательстве теоремы 1.

Условие б) будет выполняться, если аналогичное условие будет выполняться для каждой компоненты вектора $\mathbb{Y}_T$, т. е. для любых $p \ge 1$, $a, b = 1, \ldots, l$

$$\sup_{T>0} \sup_{u \in \Pi(T)} \mathbb{E}\,|Y_T^{(ab)}|^p \;<\; \infty.$$

что в свою очередь будет выполняться, если

$$\sup_{T>0} \sup_{u \in \Pi(T)} \mathbb{E}\,|Y_T^{(ab)}|^{2n} \;<\; \infty. \tag{20}$$

Для доказательства соотношения (20) достаточно показать, что

$$\sup_{T>0} \sup_{u \in \Pi(T)} \left| \sum{}' \right| \;<\; \infty, \tag{21}$$

$$\sup_{T>0} \sup_{u \in \Pi(T)} \left| \sum{}'' \right| \;<\; \infty. \tag{22}$$

В силу соотношения (15) и свойств ядра Фейера справедливо неравенство

$$\sup_{T>0} \sup_{u_{k_i}, u_{k_i+1} \in \Pi(T)} |Q_T^{(k_i, k_{i+1})}(u_{k_i}, u_{k_i+1})| \;\le$$

$$\le\; \sup_{T>0} \sup_{u_{k_i}, u_{k_i+1} \in \Pi(T)} (2\pi)^m \left( \int_{R^m} \left( \int_{R^m} |\Phi_T(\lambda_2 - \right.\right.$$

$$\left. - \lambda_1) \, f^{(a_{k_i} a_{k_i+1})}(\lambda_1)| \, d\lambda_1 \right) |f^{(b_{k_i} b_{k_i+1})}(\lambda_2)| \, d\lambda_2 \;+$$

$$\left. +\; \int_{R^m} \left( \int_{R^m} |\Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) \, f^{(a_{k_i} b_{k_i+1})}(\lambda_1)| \, d\lambda_1 \right) |f^{(b_{k_i} a_{k_i+1})}(\lambda_2)| \, d\lambda_2 \right) \;\le$$

$$\le\; \sup_{T>0} (2\pi)^m \left(2 \|\Phi_T\|_1 A^2\right) \;<\; \infty. \tag{23}$$

Из соотношений (13) и (23) следует соотношение (21). Для доказательства соотношения (22) в соответствии с (16) достаточно показать, что

$$\sup_{T>0}\sup_{u\in\Pi(T)}|I_T^{(r)}| < \infty.$$

В силу леммы 2 работы [9]

$$\sup_{T>0}\sup_{u\in\Pi(T)}|I_T^{(r)}| \le \left(\sup_{T>0}\|\Phi_T\|_2\right)^m A^m T^{-rm/2} < \infty.$$

Теорема 2 доказана.

При доказательстве теоремы 3 будем следовать работе [10].

***Доказательство теоремы* 3.** Пусть для $T>0$

$$G_T(y(\cdot)) = \int_{\Pi(T)} g(u, y(u))\,du.$$

Покажем, что

$$G_T(\mathbb{Y}_T) \underset{T\to\infty}{\Rightarrow} G_T(\mathbb{Y}). \tag{24}$$

Пусть $\rho\in(0;\infty)$. Положим $g_s(u,x) = g(u,x)\hat{I}_s(x)$, где

$$\hat{I}_s(x) = \begin{cases} 1, & \|x\|<s,\\ 2-\dfrac{\|x\|}{s}, & s\le\|x\|<2s,\\ 0, & \|x\|\ge 2s,\end{cases} \tag{25}$$

$$\sup_{u\in\Pi(T)}|g_s(u,x)| \le \left(\sup_{u\in\Pi(T)} c(u)\right)e^{\gamma\|x\|} < \infty.$$

Следовательно [13, 5], функционал

$$G_{T,s}^{(1)}(y(\cdot)) = \int_{\Pi(T)} g_s(u, y(u))\,du$$

является $L_1(\Pi(T))$-непрерывным функционалом. Поэтому, согласно теореме 2,

$$G_{T,s}^{(1)}(\mathbb{Y}_T) \underset{T\to\infty}{\Rightarrow} G_{T,s}^{(1)}(\mathbb{Y}). \tag{26}$$

Далее, пусть

$$\overline{g}_s(u,s) = g(u,x)(1-\hat{I}_s(x))$$

и

$$G_{T,s}^{(2)}(y(\cdot)) = \int_{\Pi(T)} \overline{g}_s(u, y(u))\,du.$$

Тогда

$$|G_{T,s}^{(2)}(y(\cdot))| \le \int_{\Pi(T)} |\overline{g}_s(u, y(u))|\,du \le$$

$$\le c_T \int_{\Pi(T)} I_{\{u:\,|y(u)|>s\}}(u)\,e^{\gamma|y(u)|}\,du \le$$

$$\leq c_T \left(\operatorname{mes}\{u: |y(u)| > s\}\right)^{1/q} \left( \int_{\Pi(T)} \exp\{\rho\,|y(u)|\}\,du \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq c_T \left( \int_{\Pi(T)} \exp\{\rho\,|y(u)|\}\,du \right)^{-\rho s/q}, \tag{27}$$

где $\rho = \gamma p$, $p \geq 1$, и такое, что $\rho < (4(2\pi)^m A^2)^{-1/2}$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Здесь воспользовались неравенствами Гельдера и тем, что

$$\operatorname{mes}\{u: |y(u)| > s\} \leq \exp\{-\rho s\} \int_{\Pi(T)} \exp\{\rho\,|y(u)|\}\,du.$$

Заметим также, что

$$\sup_{u \in \Pi(T)} \mathbb{E}\left(|\mathbb{Y}(u)|^2\right) = \sup_{u \in \Pi(T)} \mathbb{E}\left( \sum_{a,b=1}^{l} |Y^{(ab)}(u)|^2 \right) \leq$$

$$\leq \sup_{u \in \Pi(T)} \left( \sum_{a,b=1}^{l} K^{(ab,ab)}(u,u) \right) \leq l^2 4 (2\pi)^m A^2 = K_1 < \infty.$$

Далее, в соответствии с неравенством для нормы гауссовского вектора [10]

$$\sup_{u \in \Pi(T)} \mathbb{E} \exp\{\rho\,|\mathbb{Y}(u)|\} \leq \sup_{u \in \Pi(T)} 2^{l^2} \exp\left\{ \frac{\rho^2}{2} \sum_{a,b=1}^{l} K^{(ab,ab)}(u,u) \right\} \leq$$

$$\leq 2^{l^2} \exp\left\{ \frac{l^2}{2} \right\} \leq \exp\{2l^2\}.$$

Поэтому в силу неравенства (27)

$$\mathbb{E}\,|G_{T,s}^{(2)}(\mathbb{Y})| \leq c_T e^{-\rho s/q} \left( \int_{\Pi(T)} \mathbb{E} \exp\{\rho\,|\mathbb{Y}(u)|\}\,du \right) \leq$$

$$\leq K_2 \exp\left\{ -\frac{\rho s}{q} \right\}, \quad K_2 = c_T T^m e^{2l^2} < \infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{s \to \infty} \mathbb{E}\,|G_{T,s}^{(2)}(\mathbb{Y})| = 0$$

и для любого $\delta > 0$

$$\lim_{s \to \infty} P\{|G_{T,s}^{(2)}(\mathbb{Y})| > \delta\} = 0. \tag{28}$$

Согласно [14, 15]

$$\mathbb{E} \exp\{\rho\,|Y_T^{(ab)}(u)|\} \leq \frac{2e^{1/6}}{\sqrt{1 - 2\rho^2\, \mathbb{E}\,|Y_T^{(ab)}(u)|^2}}, \quad a, b = 1, \ldots, l.$$

Поскольку (см. доказательство теоремы 2)

$$\sup_{T > 0} \sup_{u \in \Pi(T)} \mathbb{E}\,|Y_T^{(ab)}(u)|^2 \leq 4 (2\pi)^m A^2,$$

можем записать

$$\sup_{T>0}\sup_{u\in\Pi(T)} \mathbb{E}\exp\{\rho|Y(u)|\} \le \frac{2e^{1/6}}{l^2\sqrt{1-8\rho^2(2\pi)^m A^2}} = K_3 < \infty.$$

Отсюда и из неравенства (27) получаем

$$\sup_{T>0}\mathbb{E}|G^{(2)}_{T,s}(\mathbb{Y}_T)| \le c_T e^{-\rho s/q}\left(\int_{\Pi(T)}\sup_{T>0}\sup_{u\in\Pi(T)}\mathbb{E}\exp\{\rho|Y_T(u)|\}\,du\right) \le$$

$$\le K_4\exp\left\{-\frac{\rho s}{q}\right\}, \quad K_4 = c_T T^m K_3 < \infty.$$

Поэтому

$$\lim_{s\to\infty}\sup_{T>0}\mathbb{E}|G^{(2)}_{T,s}(\mathbb{Y}_T)| = 0$$

и для любого $\delta > 0$

$$\lim_{s\to\infty}\sup_{T>0} P\{|G^{(2)}_{T,s}(\mathbb{Y}_T)| > \delta\} = 0. \tag{29}$$

Из соотношений (26), (28), (29) и леммы 4 из [10] вытекает соотношение (24).

Далее, пусть

$$G^{(2)}_T(y(\cdot)) = \int_{R^m\setminus\Pi(T)} g(u, y(u))\,du.$$

Поскольку

$$\mathbb{E}\int_{R^m\setminus\Pi(T)}|g(u,\mathbb{Y}(u))|\,du \le \left(\sup_{u\in\Pi(T)}\mathbb{E}\exp\{\gamma|\mathbb{Y}(u)|\}\right)\int_{R^m\setminus\Pi(T)} c(u)\,du \le$$

$$\le e^{2l^2}\int_{R^m\setminus\Pi(T)} c(u)\,du$$

и

$$\mathbb{E}\sup_{T>0}\int_{R^m\setminus\Pi(T)}|g(u,\mathbb{Y}_T(u))|\,du \le$$

$$\le \left(\sup_{T>0}\sup_{u\in\Pi(T)}\mathbb{E}\exp\{\gamma|\mathbb{Y}_T(u)|\}\right)\int_{R^m\setminus\Pi(T)} c(u)\,du \le$$

$$\le \frac{2e^{1/6}}{\sqrt{1-8\rho^2(2\pi)^m A^2}}\int_{R^m\setminus\Pi(T)} c(u)\,du,$$

то

$$\lim_{T\to\infty}\mathbb{E}|G^{(2)}_T(\mathbb{Y})| = 0,$$

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{T>0}\mathbb{E}|G^{(2)}_T(\mathbb{Y}_T)| = 0.$$

Поэтому для любого $\delta > 0$

$$\lim_{T\to\infty} P\{|G_T^{(2)}(\mathbb{Y})| > \delta\} = 0, \tag{30}$$

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{T>0} P\{|G_T^{(2)}(\mathbb{Y}_T)| > \delta\} = 0.$$

Из леммы 4 (см. [10]), соотношений (24), (30) вытекает утверждение теоремы.

***Доказательство теоремы* 4.** В соответствии с теоремой Дадли [16] о непрерывности гауссовских процессов, утверждение 1 справедливо, если для любого $T > 0$

$$\int_{0^+} H^{1/2}_{d_{Y^{(ab)}}}([0,T]^m, \varepsilon)\, d\varepsilon < \infty, \tag{31}$$

где

$$d_{Y^{(ab)}}(u_1, u_2) = (\mathbb{E}\,|Y^{(ab)}(u_1) - Y^{(ab)}(u_2)|^2)^{1/2}.$$

Поскольку для любых $u_1, u_2 \in R^m$, $a, b = 1, \ldots, l$,

$$d^2_{Y^{(ab)}}(u_1, u_2) \le 4(2\pi)^m (2\,\sigma^{(aa)}(u_1,u_2)\,\sigma^{(bb)}(u_1,u_2) + 2(\sigma^{(ab)}(u_1,u_2))^2),$$

то соотношение (31) выполняется, если

$$\int_{0^+} H^{1/2}_{\sigma^{(ab)}}(\varepsilon)\, d\varepsilon < \infty,$$

$$\int_{0^+} H^{1/2}_{\sigma^{(aa)}}(\varepsilon)\, d\varepsilon < \infty,$$

$$\int_{0^+} H^{1/2}_{\sigma^{(bb)}}(\varepsilon)\, d\varepsilon < \infty.$$

В соответствии с (6) последние соотношения следуют из (7). Утверждение 1 доказано.

Проверим условия леммы 3. Условие 1 было доказано в теореме 1.

В работе [15] показано, что для любого $T > 0$

$$\sup_{T>0} \sup_{u_1,u_2 \in [0,T]^m} \mathbb{E}\left\{\frac{|Y_T^{(ab)}(u_1) - Y_T^{(ab)}(u_2)|}{\sqrt{2}\, d_T^{(ab)}(u_1,u_2)}\right\} < \infty, \tag{32}$$

где

$$d_T^{(ab)}(u_1,u_2) = (\mathbb{E}\,|Y_T^{(ab)}(u_1) - Y_T^{(ab)}(u_1)|^2)^{1/2}, \quad a, b = 1, \ldots, l.$$

С учетом (5) и леммы 5 можно записать

$$\forall\, u_1, u_2 \in R^m, \quad a, b = 1, \ldots, l,$$

$$d_T^{(ab)}(u_1,u_2) \le (2\pi)^{m/2}\, 4\sqrt{\sigma^{(ab)}}(u_1,u_2) \sup_{a,b=1,\ldots,l} \sqrt{\|f^{(ab)}\|_2}\,. \tag{33}$$

Из соотношения (3) и теоремы Лебега следует, что псевдометрика $\sqrt{\sigma^{(ab)}}$ непрерывна относительно метрики $d^{(ab)}(u_1, u_2) = |u_2 - u_1|$. Применяя неравенство (33), видим, что псевдометрика

$$d_\infty^{(ab)}(u_1,u_2) = \sup_{T>0} d_T^{(ab)}(u_1,u_2), \quad u_1, u_2 \in R^m,$$

также непрерывна относительно метрики $d^{(ab)}$. Из условия (7) и неравенства (33) следует

$$\lim_{b\to 0}\sup_{T>0}\int_0^b H_{d_T^{(ab)}}([0,T]^m,\varepsilon)\,d\varepsilon = 0. \tag{34}$$

Соотношения (32), (34) указывают на то, что условия леммы 4 выполнены. Следовательно, утверждение 2, а вместе с ним и теорема 4 доказаны.


1. *Андерсон Т.* Статистический анализ временных рядов. – М.: Мир, 1976. – 757 с.
2. *Бенткус Р.* Об асимптотической нормальности оценки спектральной фракции // Лит. мат. сб. – 1972. – **12**, № 3. – С. 3–17.
3. *Ибрагимов И. А.* Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса // Теория вероятностей и ее применения. – 1963. – **8**, № 4. – С. 391–430.
4. *Иванов А. В.* Одна предельная теорема для оценки корреляционной функции // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1978. – Вып. 19. – С. 76–81.
5. *Иванов А. В.* О сходимости распределений функционалов от измеримых случайных полей // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 1. – С. 27–34.
6. *Леоненко Н. Н., Иванов А. В.* Статистический анализ случайных полей. – Киев: Вища шк., 1986. – 216 с.
7. *Buldygin V. V., Zayats V. V.* Asymptotic normality of an estimate of the correlation in different functional space // Probab. Theory and Math. Statist. – Singapore: World Sci., 1992. – P. 19–31.
8. *Булдигін В. В., Дем'яненко О. О.* Асимптотична нормальність оцінки сумісної кореляційної функції в функціональних просторах // Допов. НАН України. Математика, природознавство, техн. науки. – 1993. – № 3. – С. 32–36.
9. *Булдигін В. В., Дем'яненко О. О.* Асимптотичні властивості емпіричної корелограми гауссових векторних полів // Там же. – 1997. – № 1. – С. 45–50.
10. *Булдыгин В. В.* О свойствах эмпирической коррелограммы гауссовского процесса с интегрируемой в квадрате спектральной плотностью // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 7. – С. 876–889.
11. *Леонов В. П., Ширяев А. Р.* К технике вычисления семиинвариантов // Теория вероятностей и ее применения. – 1959. – **4**, № 3. – С. 342–355.
12. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов: В 3-х т. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 664 с.
13. *Боровков А. А., Печерский Е. А.* Сходимость распределений интегральных функционалов // Сиб. мат. журн. – 1975. – **16**, № 5. – С. 899–915.
14. *Козаченко Ю. В., Стадник А. И.* Предгауссовские процессы и скорость сходимости в $C(T)$ оценок ковариационных функций // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1991. – Вып. 45. – С. 54–62.
15. *Козаченко Ю. В., Стадник А. И.* О сходимости некоторых функционалов от гауссовских векторов в пространствах Орлича // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1991. – Вып. 44. – С. 80–87.
16. *Dadley R.* Sample functions of the Gaussian process // Ann. Probab. – 1973. – **1**, № 1. – P. 66–103.


Получено 11.03.98