УДК 517.98

М. Ф. Городній, О. А. Лагода (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ДВОПАРАМЕТРИЧНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

We obtain criteria for the existence of bounded solutions of some classes of linear two-parameter difference equations with operator coefficients in a Banach space.

Отримано критерії існування обмежених розв'язків деяких класів лінійних двопараметричних різницевих рівнянь з операторними коефіцієнтами у банаховому просторі.

Нехай B — комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ та нульовим елементом $\bar{0}$, $L(B)$ — банахів простір всіх лінійних неперервних операторів, що діють з B в B, I — одиничний, O — нульовий оператори в B. В даній статті досліджується питання про існування та єдиність обмежених за нормою розв'язків $\{x(m,n)\}$ і $\{u(m,n)\}$ різницевих рівнянь

$$\begin{gathered} A_{-1}x(m,n-1)+A_0x(m,n)+A_1x(m,n+1) = \\ = B_{-1}x(m-1,n-1)+B_0x(m-1,n)+B_1x(m-1,n+1)+ \\ +y(m,n), \quad m\geq 1, \quad n\in Z, \\ x(0,n) = a(n), \quad n\in Z, \end{gathered} \tag{1}$$

та

$$\begin{gathered} u(m,n) = Au(m,n-1)+Bu(m-1,n)+ \\ +Cu(m-1,n-1)+v(m,n), \quad m\geq 1, \quad n\geq 1, \\ u(m,0) = \alpha(m), \quad m\geq 0, \\ u(0,n) = \beta(n), \quad n\geq 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Тут $A_k, B_k, |k|\leq 1$, A, B, C — фіксовані оператори з $L(B)$, $\{a(n): n\in Z\}$, $\{\alpha(m): m \geq 0\}$, $\{\beta(n): n\geq 1\}$ — обмежені послідовності елементів банахового простору B, $\{y(m,n): m\geq 1, n\in Z\}$, $\{v(m,n): m\geq 1, n\geq 1\}$ — обмежені набори елементів простору B.

Про аналогічні результати для різницевих рівнянь у скінченновимірному просторі та їх застосування див. [1, 2].

Наведемо допоміжні твердження, необхідні в подальшому. Зафіксуємо

$$p\in N, \quad \{T_k: -p\leq k\leq p\}\subset L(B).$$

Лема 1. *Для того щоб для довільної обмеженої в банаховому просторі B послідовності $\{y(n): n\in Z\}$ різницеве рівняння*

$$\sum_{k=-p}^{p} T_k x(n+k) = y(n), \quad n\in Z,$$

мало єдиний обмежений розв'язок $\{x(n): n\in Z\}$, необхідно та достатньо, щоб для довільного $z\in C$, $|z|=1$, існував неперервний обмежений оператор для оператора

$$\sum_{k=-p}^{p} T_k z^k.$$

Лема 1 є частинним випадком доведеної в роботі [3] теореми 1.

Лема 2. *Різницеве рівняння*

$$x(n) = T_0 x(n-1) + y(n), \qquad n \geq 1,$$
$$x(0) = a,$$

має для довільних $a \in B$ *та обмеженої в банаховому просторі* B *послідовності* $\{y(n) : n \geq 1\}$ *обмежений розв'язок* $\{x(n) : n \geq 0\}$ *тоді і тільки тоді, коли спектр* $\sigma(T_0)$ *оператора* T_0 *задовольняє умову*

$$\sigma(T_0) \subset \{z \in C \mid |z| < 1\}.$$

Лему 2 доведено, наприклад, у роботі [4].

Наступна теорема містить повну відповідь на питання про існування та єдиність обмеженого розв'язку різницевого рівняння (1).

Теорема 1. *Наведені нижче умови еквівалентні:*

i) *для довільних обмежених у банаховому просторі* B *послідовності* $\{a(n) : n \in Z\}$ *та набору* $\{y(m, n) : m \geq 1, n \in Z\}$ *існує єдиний обмежений в* B *розв'язок* $\{x(m, n) : m \geq 0, n \in Z\}$ *різницевого рівняння* (1);

ii) *для довільних* $\lambda \in C$, $|\lambda| \leq 1$, $z \in C$, $|z| = 1$, *оператор*

$$A_{-1} z^{-1} + A_0 + A_1 z - \lambda (B_{-1} z^{-1} + B_0 + B_1 z)$$

має обмежений обернений оператор.

Доведення. i) $\Rightarrow$ ii). Поклавши $a(n) = \bar{0}$, $n \in Z$, і скориставшись умовою i), робимо висновок, що різницеве рівняння

$$A_{-1} x(1, n-1) + A_0 x(1, n) + A_1 x(1, n+1) = y(1, n), \qquad n \in Z, \tag{3}$$

має обмежений розв'язок $\{x(1, n) : n \in Z\}$ для довільної обмеженої послідовності $\{y(1, n) : n \in Z\}$. Цей розв'язок єдиний, тому що інакше рівняння (1) має ненульовий обмежений розв'язок при $y(m, n) = a(n) = \bar{0}$, $n \in Z$, $m \geq 1$, що суперечить умові i). Тому внаслідок леми 1 умова ii) виконується для $\lambda = 0$, $z \in C$, $|z| = 1$.

Позначимо символом $B(Z)$ множину всіх обмежених у банаховому просторі B послідовностей $\bar{t} = \{t(n) : n \in Z\}$ і покладемо

$$\|\bar{t}\|_\infty := \sup_{n \in Z} \|t(n)\|, \qquad \bar{t} \in B(Z),$$

$(B(Z), \|\cdot\|_\infty)$ — комплексний банахів простір з покоординатними додаванням та множенням на скаляр. У цьому просторі різницеве рівняння (1) записується у вигляді

$$\begin{aligned} D\bar{x}_m &= G\bar{x}_{m-1} + \bar{y}_m, \qquad m \geq 1, \\ \bar{x}_0 &= \bar{a}, \end{aligned} \tag{4}$$

де

$$D = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & A_{-1} & A_0 & A_1 & \\ & & A_{-1} & A_0 & A_1 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & B_{-1} & B_0 & B_1 & \\ & & B_{-1} & B_0 & B_1 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\bar{x}_m = \begin{pmatrix} \vdots \\ x(m,-1) \\ x(m,0) \\ x(m,1) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad m \geq 0, \qquad \bar{a} = \begin{pmatrix} \vdots \\ a(-1) \\ a(0) \\ x(1) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

і на незаповнених місцях матриць D та G розташовані нульові оператори. При цьому $\{D, G\} \subset L(B(Z))$, а також внаслідок існування та єдиності розв'язку різницевого рівняння (3) і теореми Банаха про обернений оператор [5, с. 254] визначений оператор $D^{-1} \in L(B(Z))$.

З властивостей оберненого оператора і умови і) випливає, що різницеве рівняння

$$\bar{x}_m = D^{-1}G\bar{x}_{m-1} + \bar{w}_m, \qquad m \geq 1,$$
$$\bar{x}_0 = \bar{a},$$

має обмежений розв'язок $\{\bar{x}_m : m \geq 0\}$ для довільних $\bar{a} \in B(Z)$ та обмеженої в $B(Z)$ послідовності $\{\bar{w}_m : m \geq 0\}$. Тому згідно з лемою 2

$$\sigma(D^{-1}G) \subset \{\lambda \in C \mid |\lambda| < 1\}. \tag{5}$$

Зафіксуємо $\mu \in C$, $|\mu| \geq 1$. Внаслідок (5) оператор $\mu D - G$ має неперервний обернений оператор, а отже, для довільного $\bar{t} \in B(Z)$ рівняння $(\mu D - G)\bar{s} = \bar{t}$ має єдиний розв'язок $\bar{s} \in B(Z)$. Записуючи це рівняння покоординатно, робимо висновок, що різницеве рівняння

$$\mu(A_{-1}s(n-1) + A_0 s(n) + A_1 s(n+1)) = B_{-1}s(n-1) +$$
$$+ B_0 s(n) + B_1 s(n+1) + t(n), \qquad n \in Z,$$

має для довільної обмеженої в банаховому просторі B послідовності $\{t(n): n \in Z\}$ єдиний обмежений розв'язок $\{s(n): n \in Z\}$. Тому внаслідок леми 1 для довільного $z \in C$, $|z| = 1$, існує неперервний оператор

$$(A_{-1}\mu z^{-1} + A_0\mu + A_1\mu z - (B_{-1}z^{-1} + B_0 + B_1 z))^{-1}.$$

Оскільки

$$\{\mu^{-1} \in C \mid |\mu| \geq 1\} = \{\lambda \in C \mid 0 < |\lambda| \leq 1\},$$

то умову ii) доведено.

ii) $\Rightarrow$ i). Застосовуючи лему 1 до різницевих рівнянь, аналогічних (3), робимо висновок, що рівняння (1) має єдиний розв'язок $\{x(m,n): m \geq 0, n \in Z\}$, що відповідає фіксованим обмеженим у банаховому просторі B послідовності $\{a(n): n \in Z\}$ та набору $\{y(m,n): m \geq 1, n \in Z\}$, причому для довільного $m \geq 0$ послідовність $\bar{x}_m := \{x(m,n): n \in Z\}$ обмежена в B. Тому різницеве рівняння (1) еквівалентне різницевому рівнянню (4), яке розглядається у просторі $B(Z)$. Умова ii) забезпечує існування оператора $D^{-1} \in L(B(Z))$, а отже, умова і) виконується внаслідок леми 2. Теорему 1 доведено.

Із структури різницевого рівняння (2) випливає існування та єдиність його розв'язку. Наступна теорема містить необхідні та достатні умови обмеженості цього розв'язку.

Теорема 2. *Наведені нижче умови еквівалентні:*

j) *для довільних обмежених у банаховому просторі* B *послідовностей*

$\{\alpha(m): m \geq 0\}$, $\{\beta(n): n \geq 1\}$ *та набору* $\{v(m,n): m \geq 1, n \geq 1\}$ *різницеве рівняння* (2) *має обмежений в* B *розв'язок* $\{u(m,n): m \geq 0, n \geq 0\}$;

jj) *оператори* A, B, C *задовольняють умови:*

1) $\sigma(A) \subset \{z \in C \mid |z| < 1\}$,

2) $\sigma(B) \subset \{z \in C \mid |z| < 1\}$,

3) *для довільних* $z \in C$, $|z| \geq 1$, $\lambda \in C$, $|\lambda| \geq 1$, *оператор*

$$\lambda z I - A\lambda - Bz - C$$

має неперервний обернений оператор.

Доведення. j) $\Rightarrow$ jj). Якщо покласти $\alpha(m) = \bar{0}$, $m \geq 0$, то з умови j) випливає, що різницеве рівняння

$$u(m,1) = Bu(m-1,1) + v(m,1), \quad m \geq 1,$$
$$u(0,1) = \beta(1),$$

має для довільних $\beta(1) \in B$ та обмеженої в B послідовності $\{v(m,1): m \geq 1\}$ обмежений розв'язок $\{u(m,1): m \geq 0\}$. Звідси, згідно з лемою 2, виконується умова 2. Умова 1 перевіряється аналогічно.

Розглянемо тепер банахів простір $B(Z_+)$ всіх обмежених в B послідовностей $\bar{u} = \{u(n): n \geq 0\}$ з покоординатними додаванням та множенням на скаляр і нормою

$$\|\bar{u}\|_+ := \sup_{n \geq 0} \|u(n)\|, \quad \bar{u} \in B(Z_+).$$

У цьому просторі різницеве рівняння (2) записується таким чином:

$$P\bar{u}_m = Q\bar{u}_{m-1} + \bar{v}_m, \quad m \geq 1, \qquad (6)$$
$$\bar{u}_0 = \bar{\beta},$$

де

$$P = \begin{pmatrix} I & O & O & \\ -A & I & O & \ddots \\ O & -A & I & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} O & O & O & \\ C & B & O & \ddots \\ O & C & B & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\bar{u}_m = \begin{pmatrix} u(m,0) \\ u(m,1) \\ u(m,2) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_m = \begin{pmatrix} \alpha(m) \\ v(m,1) \\ v(m,2) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \bar{\beta} = \begin{pmatrix} \alpha(0) \\ \beta(1) \\ \beta(2) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Доведемо, що існує оператор $P^{-1} \in L(B(Z_+))$. Покладемо $\bar{\beta} = \bar{0}$. Внаслідок умови j) для довільного $\bar{v}_1$ рівняння $P\bar{u}_1 = \bar{v}_1$ має розв'язок $\bar{u}_1 \in B(Z_+)$. Записуючи рівняння $P\bar{u} = \bar{0}$ покоординатно, робимо висновок, що $\operatorname{Ker} P = \{\bar{0}\}$. Тому до оператора P можна застосувати теорему Банаха про обернений оператор.

З умови j) і властивостей оберненого оператора випливає, що різницеве рівняння

$$\bar{u}_m = P^{-1}Q\bar{u}_{m-1} + \bar{\gamma}_m, \quad m \geq 1,$$
$$\bar{u}_0 = \bar{\beta},$$

має для довільних $\vec{\beta} \in B(Z_+)$ та обмеженої в $B(Z_+)$ послідовності $\{ \vec{\gamma}_m : m \geq 1 \}$ обмежений розв'язок $\{ \vec{u}_m : m \geq 0 \}$. Тому, внаслідок леми 2, при фіксованому $\lambda \in C$, $|\lambda| \geq 1$, оператор $\lambda P - Q$ має неперервний обернений оператор. Отже, для довільного $\vec{q} \in B(Z_+)$ операторне рівняння $(\lambda P - Q)\vec{p} = \vec{q}$ має єдиний розв'язок $\vec{p} \in B(Z_+)$, тобто різницеве рівняння

$$\lambda(p(n) - Ap(n-1)) = Bp(n) + Cp(n-1) + q(n), \quad n \geq 1,$$
$$\lambda p(0) = q(0),$$

а отже, з урахуванням включення 2 і рівняння

$$p(n) = (\lambda I - B)^{-1}(\lambda A + C)p(n-1) + q(n), \quad n \geq 1, \qquad (7)$$
$$p(0) = q(0),$$

мають для довільних $q(0) \in B$ та обмеженої в B послідовності $\{ q(n) : n \geq 1 \}$ обмежений розв'язок $\{ p(n) : n \geq 0 \}$. Застосовуючи до рівняння (7) лему 2, робимо висновок, що для довільних $\lambda \in C$, $|\lambda| \geq 1$, $z \in C$, $|z| \geq 1$, оператор $\lambda z I - A\lambda - Bz - C$ має неперервний обернений оператор, що й доводить умову 3.

jj) $\Rightarrow$ j). Внаслідок умови 1 побудовані за розв'язком $\{ u(m, n) : m \geq 0, n \geq 0 \}$ послідовності $\{ \vec{u}_m, m \geq 0 \}$, обмежені в B. Тому різницеві рівняння (2) та (6) еквівалентні. Умови 2,3 забезпечують існування оператора $P^{-1} \in L(B(Z_+))$, а отже, умова j) виконується внаслідок леми 2. Теорему 2 доведено.

Отримані результати узагальнюються на випадок різницевих рівнянь

$$\sum_{|k| \leq p} A_k x(m, n+k) = \sum_{(k,j) \in \Lambda} B_{k,j} x(m-j, n+k) +$$
$$+ y(m, n), \quad m \geq 1, \quad n \in Z,$$
$$x(m, n) = a(m, n), \quad -q+1 \leq m \leq 0, \quad n \in Z,$$

та

$$x(m, n) = \sum_{(j,k) \in \Phi} T_{j,k} x(m-j, n-k) + y(m, n), \quad m \geq 1, \quad n \geq 1,$$
$$x(m, n) = \alpha(m, n), \quad m \geq -q+1, \quad n \geq -p+1, \quad \min(m, n) \leq 0,$$

де p, q — фіксовані натуральні числа,

$$\Lambda := \{ (j, k) \in Z^2 \mid 1 \leq j \leq q, |k| \leq p \},$$

$$\Phi := \{ (j, k) \in Z^2 \mid 0 \leq j \leq q, 0 \leq k \leq p, \max(j, k) > 0 \},$$

$\{ A_k \}$, $\{ B_{k,j} \}$, $\{ T_{j,k} \}$ — фіксовані набори операторів з $L(B)$, $\{ a(m, n) \}$, $\{ \alpha(m, n) \}$, — обмежені набори елементів B.

1. *Блюмин С. Л., Фараджев Р. Г.* Линейные клеточные машины: подход пространства состояний // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 2. – С. 125–163.
2. *Гайшун И. В.* Устойчивость и ограниченность решений некоторых классов линейных двухпараметрических систем // Докл. АН БССР. – 1989. – **33**, № 12. – С. 1061–1063.
3. *Городній М. Ф.* Обмежені й періодичні розв'язки лінійного різницевого рівняння в банаховому просторі // Математика сьогодні. – 1993. – С. 114–129.
4. *Томілов Ю. В.* Асимптотична поведінка однієї рекурентної послідовності в банаховому просторі // Асимптотичне інтегрування нелінійних рівнянь. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1992. – С. 146–153.
5. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. Курс лекций. – Киев: Выща шк., 1990. – 600 с.

Одержано 30.03.99