УДК 517.9

Л. И. Каранджулов (Техн. ун-т, София, Болгария)

ИМПУЛЬСНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С УПРАВЛЕНИЕМ

For weakly nonlinear controlled pulse differential systems, we obtain necessary and sufficient conditions for the existence of control and corresponding solutions of differential systems with general boundary conditions.

Для слабконелінійних керованих імпульсних диференціальних систем отримано необхідні та достатні умови існування керування та відповідних йому розв'язків диференціальних систем із загальними крайовими умовами.

1. Постановка задачи и обозначения. Рассмотрим слабонелинейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) + B(t)u + \varepsilon g(t, x, u, \varepsilon), \qquad (1)$$
$$t \in [a, b], \quad t \neq \tau_i, \quad i = \overline{1, p},$$

с импульсным воздействием в фиксированных точках τ_i вида

$$M_i x(\tau_i - 0) + N_i x(\tau_i + 0) = d_i, \quad i = \overline{1, p}, \quad \tau_i \in (a, b), \qquad (2)$$
$$a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p < \tau_{p+1} = b,$$

и краевыми условиями

$$\bar{l}\, x(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in R^s. \qquad (3)$$

Предположим, что $A(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица, элементы которой — непрерывные на $[a, b]$ функции; $f(t)$ — кусочно-непрерывная n-мерная вектор-функция, имеющая разрывы первого рода при $t = \tau_i$, т. е.

$$f(t) = f_i(t), \quad t \in]\tau_{i-1}, \tau_i], \quad f(a) = f_1(a),$$
$$f_i(\tau_{i-1}) = \lim_{t \to \tau_{i-1}+0} f_i(t), \quad i = \overline{1, p+1};$$

$B(t)$ — $(n \times r)$-мерная матрица, имеющая представление

$$B(t) = B_1(t), \quad t \in [\tau_0, \tau_1], \quad B(t) = B_1(t), \quad t \in]\tau_{i-1}, \tau_i], \quad i = \overline{2, p+1}.$$

Элементы матрицы $B_i(t)$ представляют собой непрерывные справа функции на полуинтервале $]\tau_{i-1}, \tau_i]$.

В импульсных условиях (2) M_i, N_i — $(k \times n)$-мерные матрицы, $d_i \in R^k$; $\bar{l}$ — линейный ограниченный векторный функционал:

$$\bar{l} = \operatorname{col}(l^1 \ldots l^s)\colon C[a, b] \backslash \{\tau_i\} \to R^s.$$

Вещественная вектор-функция $g(t, x, u, \varepsilon)$, где ε — малый положительный параметр, действует из области

$$\Omega = \{(t, x, u, \varepsilon) |\, t \in [a, b],\ \|x\| \leq \rho_1,\ \|u\| \leq \rho_2,\ \varepsilon \in]0, \varepsilon_0]\}$$

в R^n. Она кусочно-непрерывна по t на $[a, b]$ и имеет точки разрыва первого рода при $t = \tau_i$, непрерывна по x, u, ε и удовлетворяет условию Липшица

$$\| g(t, x_1, u_1, \varepsilon) - g(t, x_2, u_2, \varepsilon) \| \leq L\,(\|x_1 - x_2\| + \|u_1 - u_2\|). \qquad (4)$$

Задача (1) при $\varepsilon = 0$ с условием (3) в виде интеграла Стильтьеса рассмотрена в [1]. В [1] также построено управление $u = u(t)$, переводящее систему (1) из положения точки x_0 в положение точки x_1 за время T. В [2] кратко рассмотрено уравнение (1) при $\varepsilon = 0$, $B(t) = A(t)$, $k = n$ в (2) и условии $\dot{u} = 0$ почти всюду на $[a, b]$. Если заменить условие (2) на

$$\Delta x\big|_{t=\tau_i} = S_i x + a_i$$

и связать с задачей минимизации определенного функционала, т. е. рассмотреть задачу на оптимальное управление, то получим задачу, которая изучена в [3].

При $\varepsilon = 0$ система (1)–(3) переходит в порождающую систему, которая имеет семейство управления $u_0(t, \zeta)$ и соответствующее ему семейство решений $x_0(t, \xi)$, $t \neq \tau_i$, где векторы ζ, ξ — произвольные. Их существование и построение получено в [4].

В настоящей работе установим условия, при которых существуют управление $u = u(t, \varepsilon)$ и соответствующие ему решения $x = x(t, \varepsilon)$ такие, чтобы пара (u, x) удовлетворяла (1)–(3) и $x(t, 0) = x_0$, $u(t, 0) = u_0$.

Известно [3, 6], что если выполнено условие $\det(E + S_i) \neq 0$, где S_i — $(n \times \times n)$-мерные матрицы, то однородная импульсная задача

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x\big|_{t=\tau_i} = S_i x$$

имеет при $\tau_i < t < \tau_{i+1}$ фундаментальную матрицу

$$X(t) = U(t, \tau_i) \prod_{\tau_i \geq \tau_j > \tau_0} (E + B_j) U(\tau_j, \tau_{j-1}),$$

где $U(t, a)$ — фундаментальная матрица системы без импульсов

$$\dot{U} = A(t) U, \quad U(a, a) = E.$$

С помощью $X(t)$ строится и общее решение $x(t, c) = X(t)c + \overline{x}(t)$ неоднородной системы

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x\big|_{t=\tau_i} = S_i x + a_i,$$

где $\overline{x}(t)$ — некоторое частное решение.

В настоящей работе рассматриваем общие импульсные условия (M_i и N_i — прямоугольные матрицы). Поэтому нет возможности составить фундаментальную матрицу вида $X(t)$ и с помощью общего решения импульсной системы найти пару (u, x), удовлетворяющую (1)–(3).

В этой работе выбран подход, в котором импульсные условия рассматриваются как внутренние краевые условия. Тогда объединяем условия (2), (3) в одно, так как это сделано в [4, 5]. Такое объединение осуществляется тривиально и оно позволяет расширить круг рассматриваемых импульсных задач.

Поскольку функционал $\bar{l}$ аддитивный, то условие (3) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{p+1} \bar{l}_i x_i(\cdot) = \alpha, \qquad \bar{l}_i : \{\dot{x}_i : \,]\tau_{i-1}, \tau_i] \to R^n\} \to R^s.$$

Пусть $\bar{l}_i$ — m-мерные векторные функционалы $l_i : \{x_i : \,]\tau_{i-1}, \tau_i] \to R^n\} \to \to R^m$, имеющие представление

$$l_1 x_1(\cdot) = [\bar{l}_1, 0_k, \ldots, 0_k]^T x_1(\cdot) + [0_s, M_1, 0_k, \ldots, 0_k]^T x_1(\tau_1);$$

$$l_i x_i(\cdot) = [0_s, \ldots, N_{i-1}, \ldots, 0_k]^T x_i(\tau_{i-1}) + [\bar{l}_i, 0_k, \ldots, 0_k]^T x_i(\cdot) + \\ + [0_s, 0_k, \ldots, M_i, \ldots, 0_k]^T x_i(\tau_i), \quad i = \overline{2, p};$$

$$l_{p+1} x_{p+1}(\cdot) = [0_s, 0_k, \ldots, 0_k, N_p]^T x_{p+1}(\tau_p) + [\bar{l}_{p+1}, 0_k, \ldots, 0_k]^T x_{p+1}(\cdot);$$

$$h = [d, d_1, \ldots, d_p]^T,$$

где 0_k и 0_s — нулевые матрицы размерности $(k \times n)$ и $(s \times n)$ соответственно. Тогда условия (2), (3) запишутся в виде

$$\sum_{i=1}^{p+1} l_i x_i(\cdot) = h, \quad h \in R^m, \quad m = s + pk. \tag{5}$$

Вместо задачи (1)–(3) рассмотрим эквивалентную задачу (1), (5), которую назовем импульсной краевой задачей с управлением.

Вопросы, связанные с краевыми задачами, в которых размерности дифференциальных систем не совпадают с размерностями краевых условий, как и в настоящей работе, подробно изучаются в [6].

2. Основные результаты. Пусть $X(t)$ — нормальная фундаментальная матрица однородной системы $\dot{x} = A(t)x$, $t \in [a, b]$, $X(a) = E_n$, E_n — n-мерная единичная матрица.

Система (1) при $t \in [\tau_0, \tau_1]$ и $t \in]\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = \overline{2, p+1}$, имеет общее решение вида

$$x_i(t) = X(t) c_i + \left(K_i(f_i + B_i u_i + g_i)\right)(t), \tag{6}$$

где

$$c_i = X^{-1}(\tau_{i-1}) x_i(\tau_{i-1}), \quad x_i(\tau_{i-1}) = \lim_{t \to \tau_{i-1}} x_i(t)$$

— постоянные векторы, K_i — операторы вида

$$(K_i \varphi)(t) = \int_{\tau_{i-1}}^{t} X(t) X^{-1}(s) \varphi(s)\, ds, \quad t \in]\tau_{i-1}, \tau_i]. \tag{7}$$

Введем обозначения

$$M = [M_1 \ldots M_{p+1}], \quad c = \mathrm{col}\,[c_0, c_1, \ldots, c_p], \tag{8}$$

где M — $(m \times (p+1)n)$-мерная матрица, $M_i = l_i X(\cdot)$ — $(m \times n)$-мерные матрицы, $c \in R^{(p+1)n}$.

Подставляя решение (6) в импульсно-краевое условие (5), получаем алгебраическую относительно вектора c систему с матрицей M (8), т. е.

$$Mc = h - \sum_{i=1}^{p+1} \left(l_i K_i(f_i + B_i u_i + \varepsilon g_i)\right)(\cdot). \tag{9}$$

Рассмотрим случай, когда выполнено условие А:

$$\operatorname{rank} M = k_1 < \min(m, (p+1)n).$$

Пусть M^+ — единственная $((p+1)n \times m)$-мерная матрица, псевдообратимая по Муру–Пенроузу к матрице M [7, 8, 6]. Через P и P^* обозначим ортопроекторы

$$P: R^{(p+1)n} \to \ker(M) \quad \text{и} \quad P^*: R^m \to \ker(M^*), \quad M^* = M^T.$$

Поскольку $\operatorname{rank} P = (p+1) - k_1 = q$, $\operatorname{rank} P^* = m - k_1 = d$, то через P_q будем обозначать $((p+1)n \times q)$-мерную матрицу, которая получается из P и имеет q линейно независимых столбцов, а через P_d^* — $(d \times m)$-мерную матрицу, составленную из d линейно независимых строк матрицы P^*.

Для решения системы (9), а следовательно, и решения задачи (1), (5) достаточно, чтобы выполнялось условие

$$P_d^* \left(h - \sum_{i=1}^{p+1} (l_i K_i (f_i + B_i u_i + \varepsilon g_i))(\cdot) \right) = 0. \tag{10}$$

При выполнении этого условия система (9) имеет решение

$$c = P_q c_q + M^+ \left(h - \sum_{i=1}^{p+1} (l_i K_i (f_i + B_i u_i + \varepsilon g_i))(\cdot) \right), \quad c \in R^q. \tag{11}$$

Обозначим через $\tilde{l}$ оператор

$$(\tilde{l}\varphi)(\cdot) = \sum_{i=1}^{p+1} (l_i K_i \varphi_i)(\cdot) = \sum_{i=1}^{p+1} l_i \int_{\tau_{i-1}}^{(\cdot)} X(\cdot) X^{-1}(s) \varphi_i(s)\, ds. \tag{12}$$

С учетом (12) условие (10) примет вид

$$P_d^* (\tilde{l} B u)(\cdot) = P_d^* (h - (\tilde{l}(f + \varepsilon g))(\cdot)). \tag{13}$$

Обозначим через $G_i(t)$ $(n \times r)$-мерную матрицу

$$G_i(t) = X^{-1}(t) B_i(t).$$

Управление $u_i(t)$ будем искать в виде [1]

$$u_i(t) = G_i^*(t)\eta_i + v_i(t), \quad \eta_i \in R^n, \quad G_i^* = G_i^T, \tag{14}$$

где η_i, $i = \overline{1, p+1}$, — постоянные векторы, а $v_i(t)$ — r-мерные функции, суммируемые с квадратом на $]\tau_{i-1}, \tau_i]$ и удовлетворяющие интегральному уравнению

$$P_d^* \sum_{i=1}^{p+1} l_i \int_{\tau_{i-1}}^{(\cdot)} X(\cdot) G_i(s) v_i(s)\, ds = 0. \tag{15}$$

Подставляя (14) в (13) и учитывая (15), для определения $(p+1)n$-мерного вектор-столбца $\eta = \operatorname{col}(\eta_1 \ldots \eta_{p+1})$ получаем систему

$$Q\eta = P_d^* (h - (\tilde{l}(f + \varepsilon g))(\cdot)), \tag{16}$$

где $Q = P_d^* R = [Q_1 Q_2 \ldots Q_{p+1}]$ — $(d \times (p+1)n)$-мерная постоянная матрица, $R = [R_1 R_2 \ldots R_{p+1}]$,

$$R_i = l_i \int_{\tau_{i-1}}^{(\cdot)} X(\cdot) G_i(s) G_i^*(s)\, ds \text{ — } (m \times n)\text{-мерные матрицы.}$$

Пусть выполнено условие В:

$$\operatorname{rank} M = k_2 < \min(d, (p+1)n).$$

Тогда ранг $((p+1)n \times d)$-мерной псевдообратной матрицы Q^+ также будет

k_2, а ранги ортопроекторов $P_1: R^{p+1} \to \ker(Q)$ и $P_1^*: R^d \to \ker(Q^*)$ будут $\operatorname{rank} P_1 = (p+1)n - k_2 = q_1$ и $\operatorname{rank} P_1^* = d - k_2 = d_1$ соответственно. Обозначим через P_{1q_1} и P_{1d_1} $((p+1)n \times q_1)$- и $(d_1 \times d)$-мерные матрицы, которые составлены из q_1 линейно независимых столбцов матрицы P_1 и d_1 линейно независимых строк матрицы P_1^* соответственно.

Общее решение уравнения (16) имеет вид

$$\eta = P_{1q_1}\overline{\eta} + Q^+ P_d^*(h - (\tilde{l}(f + \varepsilon g))(\cdot)), \qquad \overline{\eta} \in R^{q_1}, \tag{17}$$

тогда и только тогда, когда

$$P_1^* P_d^*(h - (\tilde{l}(f + \varepsilon g))(\cdot)) = 0.$$

Последнее равенство всегда выполняется, если выполняется условие C:

$$P_1^* P_d^* = 0.$$

Через $[Q^+ P_d^*(\tilde{l} g)(\cdot)]_{n_1}$ обозначим первые n строк вектор-столбца $Q^+ P_d^*(\tilde{l} g)(\cdot)$, через $[Q^+ P_d^*(\tilde{l} g)(\cdot)]_{n_2}$ — вторые n строк и т. д., через $[Q^+ P_d^*(\tilde{l} g)(\cdot)]_{n_{p+1}}$ — последние n строк. Очевидно, $n_1 + n_2 + \ldots + n_{p+1} = (p+1)n$.

Подставляя компоненты вектора η из (17) в (14), получаем вид управления на каждом промежутке $]\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = \overline{1, p+1}$:

$$\begin{gathered} u_i(t, \varepsilon) = u_{0i}(t, \zeta_i) - \varepsilon G_i^*(t)[Q^+ P_d^*(\tilde{l} g)(\cdot)]_{n_i}, \\ u_{0i}(t, \zeta_i) = G_i^*(t)\zeta_i + G_i^*(t)[Q^+ P_d^* h_1]_{n_i} + v_i(t). \end{gathered} \tag{18}$$

Матричная запись управления на интервале $[a, b]$ имеет вид

$$\begin{gathered} u(t, \varepsilon) = u_0(t, \zeta) - \varepsilon \tilde{G}^*(t) Q^+ P_d^*(\tilde{l} g)(\cdot), \\ u_0(t, \zeta) = \tilde{G}^*(t)\zeta + \tilde{G}^*(t) Q^+ P_d^* h_1 + v(t), \qquad t \neq \tau_i, \end{gathered} \tag{19}$$

где $\tilde{G}^*(t) = \operatorname{diag}[G_1^*(t), G_2^*(t), \ldots, G_{p+1}^*(t)]$, $G_i^*(t)$ — $(r \times n)$-мерные матрицы, $\zeta = P_{1q_1}\overline{\eta}$, $h_1 = h - (\tilde{l}(f + \varepsilon g))(\cdot)$, $v(t) = \operatorname{col}(v_1(t) \ldots v_{p+1}(t))$. Отметим, что суммируемые функции $v_i(t)$ получаются из интегрального уравнения (15).

Подставив (18) и (11) в (6), получим решения системы (1), (5) на промежутке $]\tau_{i-1}, \tau_i]$:

$$\begin{gathered} x_i(t, \varepsilon) = x_{0i}(t, \xi_i) - \varepsilon\{X(t)[M^+(\tilde{l} g)(\cdot)]_{n_i} + (K_i \psi_i)(t)\}, \\ x_{0i} = X(t)\xi_i + X(t)[M^+ \tilde{h}]_{n_i} + (K_i(f_i + B_i u_{0i}))(t), \end{gathered} \tag{20}$$

где

$$\psi_i = B_i G_i^*[Q^+ P_d^*(\tilde{l} g)(\cdot)]_{n_i} - g_i, \qquad \tilde{h} = h - (\tilde{l}(f + B u_0))(\cdot). \tag{21}$$

Матричная запись решения на интервале $[a, b]$ имеет вид

$$\begin{gathered} x(t, \varepsilon) = x_0(t, \xi) - \varepsilon[\tilde{X}(t) M^+(\tilde{l} g)(\cdot) + (\tilde{K}\psi)(t)], \\ x_0(t, \xi) = \tilde{X}(t)\xi + \tilde{X}(t) M^+ \tilde{h} + (\tilde{K}(f + B u_0))(t), \qquad t \neq \tau_i, \end{gathered} \tag{22}$$

где $\tilde{X}(t) = \operatorname{diag}[X(t), X(t), \ldots, X(t)]$,

$$\psi = \psi(t, x, u, \varepsilon), \quad \xi = P_q c, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{p+1})^T, \quad \xi_i \in R^n.$$

Используя (21), вектор-функцию $\psi = (\psi_1 \ldots \psi_{p+1})$ и $(\tilde{K}\psi)(t)$ запишем в виде

$$\psi = B\tilde{G}^* Q^+ P_d^* (\tilde{l}\, g)(\cdot) - g\,,$$
$$(\tilde{K}\psi) = \operatorname{col}\big((K_1\psi_1)(t)\,(K_2\psi_2)(t) \ldots (K_{p+1}\psi_{p+1})(t)\big). \tag{23}$$

Соотношения (19) и (22) представляют собой систему интегральных уравнений для определения управления $u(t, \varepsilon)$ и соответствующего ему решения $x(t, \varepsilon)$.

Покажем, что для любых $v_i \in L_2\,]\tau_{i-1}, \tau_i]$, удовлетворяющих уравнению (15), системы (19), (22) имеют единственное решение при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, где ε_0 — некоторая положительная постоянная. При этом решение системы дает искомое управление $u(t, \varepsilon)$ и решение $x(t, \varepsilon)$. Для доказательства этого утверждения обозначим

$$z(t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} x(t, \varepsilon) \\ u(t, \varepsilon) \end{bmatrix}, \quad z_0(t, w) = \begin{bmatrix} x_0(t, \xi) \\ u_0(t, \zeta) \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R_1(t, z, \varepsilon) \\ R_2(t, z, \varepsilon) \end{bmatrix},$$

где

$$R_1 = \tilde{X}(t) M^+ (\tilde{l}\, g)(\cdot) - (\tilde{K}\psi)(t), \quad R_2 = -\tilde{G}^*(t) Q^+ P_d^* (\tilde{l}\, g)(\cdot). \tag{24}$$

Объединяя уравнения (19), (22), получаем, что $z = [x\, u]^T$ является решением операторного уравнения

$$z(t) = F(z), \tag{25}$$

где

$$F(z) = z_0(t, w) + \varepsilon R(t, z, \varepsilon). \tag{26}$$

Сначала выясним вопрос о необходимых условиях существования $z(t, \varepsilon)$. Из изложенного выше видно, что при выполнении условия А порождающая задача разрешима тогда и только тогда, когда существует семейство управлений $u_0(t, \zeta)$ вида (19) и функции $f(t)$, $B(t) \in C([a, b] \backslash \{\tau_i\})$, $h \in R^m$, удовлетворяющие условию

$$P_d^* (h - (\tilde{L}(f + Bu_0))(\cdot)) = 0. \tag{27}$$

На этом семействе управлений $u_0(t, \zeta)$ порождающей задаче соответствует семейство решений $x_0(t, \xi)$ из (22).

Необходимое условие существования семейства решений $z(t, \varepsilon)$ задачи (1), (5), которое при $\varepsilon = 0$ обращается в порождающее решение $z_0(t, w)$, дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть задача* (1), (5), *имеет решение* $z(t, w, \varepsilon)$, *которое при* $\varepsilon = 0$ *обращается в порождающее решение* $z_0(t, w^*)$ *задачи* (1), (5) *с константой* $w = w^*$. *Тогда векторная константа* w^* *удовлетворяет уравнению*

$$P_d^* \tilde{l}\, (B\tilde{G}^* Q^+ P_d^* \tilde{l}\, g(\cdot, z_0(\cdot, w^*), 0) + g(\cdot, z_0(\cdot, w^*), 0)) = 0. \tag{28}$$

Доказательство. Пусть $z(t, w, \varepsilon)$ — решение системы (1), (5), которое при $\varepsilon = 0$ обращается в $z_0(t, w^*)$ с константой $w = w^*$. Тогда выполняется условие (13):

$$P_d^* (h - (\tilde{l}\,(f + Bu + \varepsilon g))(\cdot)) = 0.$$

Подставляя в него (19), находим

$$P_d^*(h - \tilde{l}(f + Bu_0 - \varepsilon B\tilde{G}^* Q^+ P_d^* \tilde{l}\, g(\cdot, z(\cdot, w, \varepsilon), \varepsilon) + \varepsilon g(\cdot, z(\cdot, w, \varepsilon), \varepsilon))) = 0.$$

Учитывая (27), получаем, что нелинейная функция $g(t, z, \varepsilon)$ удовлетворяет условию

$$P_d^* \tilde{l}(B\tilde{G}^* Q^+ P_d^* \tilde{l}\, g(\cdot, z(\cdot, w, \varepsilon), \varepsilon) + g(\cdot, z(\cdot, w, \varepsilon), \varepsilon)) = 0. \tag{29}$$

Пусть $\varepsilon \to 0$. Поскольку $g(t, z, \varepsilon)$ — непрерывная вектор-функция по z и ε, а $\tilde{l}$ — линейный ограниченный функционал, то переходя в (29) к пределу при $\varepsilon \to 0$ и учитывая, что $z(t, w, \varepsilon) \to z_0(t, w^*)$, получаем (28).

Следовательно, вектор $w \in R^{2(p+1)n}$ удовлетворяет уравнению

$$P_d^* \tilde{l}(B\tilde{G}^* Q^+ P_d^* \tilde{l}\, g(\cdot, z_0(\cdot, w), 0) + g(\cdot, z_0(\cdot, w), 0)) = 0. \tag{30}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* A – C *и вектор* w^* *удовлетворяет системе* (30), *а вектор* w — *системе* (29). *Тогда для каждой суммируемой функции* $v_i(t)$, $t \in]\tau_{i-1}, \tau_i]$, *удовлетворяющей уравнению* (15), *существует постоянная* $\varepsilon_0 > 0$ *такая, что при* $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ *система* (25) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть вектор $w^* = [\zeta^* \zeta^*]^T$ удовлетворяет системе (30). Тогда если $\mu > 0$ достаточно мало и w такое, что $\| w - w^* \| \le \mu$, то отображение

$$F(z) = z_0(t, w^*) + \varepsilon R(t, z(t, w, \varepsilon), \varepsilon) \tag{31}$$

при $\|z\| \le \rho$, $t \in [a, b]$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ и функциях $v_i(t)$, удовлетворяющих (15), имеет единственную неподвижную точку $z^*(t, w^*)$, которая определяется с помощью итерационного процесса:

$$\begin{gathered} z^0(t) = 0, \\ z^{k+1}(t) = z_0(t, w^*) + \varepsilon R(t, z^k, \varepsilon). \end{gathered} \tag{32}$$

Этот факт можно доказать, если ввести банахово пространство B из кусочно-непрерывных функций $z(t)$ на интервале $[a, b]$ с точками разрыва первого рода при $t = \tau_i$ и нормами для элементов $\|z\| = \|x\| + \|u\|$, $\|x\| = \max\limits_i \sup |x_i(t)|$, $\|u\| = \max\limits_i \sup |u_i(t)|$ и матриц $\|A(s)\| = \max\limits_i \sup \sum_{j=1}^n |a_{ij} s|$.

На основании (4), (12), (23) и (7) можно показать, что $F(z)$ из (31) является оператором сжатия с постоянной $\theta \in (0, 1)$ при $t \in [a, b] \setminus \{\tau_i\}$, $\|z\| \le \rho$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Тогда $F(z)$ имеет (см., например, [9]) единственную неподвижную точку z^* такую, что $z^*(t, w) = F(z^*(t, w))$.

Постоянную K можно подобрать так, чтобы выполнялось неравенство $F(0) \le K$. Выбираем ρ таким образом, чтобы $K \le \rho(1 - \theta)$. Тогда неподвижную точку z^* определим с помощью итерационного процесса (32). При этом выполняется неравенство

$$\| z^*(t, w) - z^k(t, w) \| \le \theta^k \rho.$$

Подставив решение $z^*(t, w)$ из (32) в (29), найдем $w = w(\varepsilon)$, $w(0) = w^*$. Затем, подставив $w = w(\varepsilon)$ в (31), определим единственное решение уравнения (25). При этом решение уравнения (25) дает искомое управление $u(t)$ и требуемое решение $x(t)$ задачи (1), (5).

***Замечание* 1.** Допустим, что матрица M имеет полный ранг. Пусть $k_1 = (p+1)n$, $m > (p+1)n$, тогда $q = 0$ и $P = 0$. Система (9) имеет единственное решение $c = M^+(h - \tilde{l}(f + Bu + \varepsilon g))$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (10). Дальнейшие рассуждения совпадают с изложенными выше. Для $x(t, \varepsilon)$ получается единственное представление. Каждому управлению в виде (14), где η зависит от q_1-мерного постоянного вектора, соответствует единственное решение системы (1), удовлетворяющее условию (5).

Пусть $k_1 = m$, $(p+1)n > m$, тогда $d = 0$ и $P^* = 0$. Система (9) всегда разрешима. Вектор c имеет представление (11). В этом случае управление произвольное. Каждому произвольному управлению отвечает семейство решений системы (1), удовлетворяющее условию (5) и зависящее от q-мерного произвольного постоянного вектора.

Пусть $k_1 = m = (p+1)n$. Тогда матрица M квадратная и $\det M \neq 0$, $M^+ = M^{-1}$. Система (9) имеет единственное решение. Управление — произвольное. Каждому произвольному управлению отвечает единственное решение системы (1), удовлетворяющее условию (5).

***Замечание* 2.** Допустим, что матрица Q имеет полный ранг. Пусть $k_2 = (p+1)n$, $d > (p+1)n$. Тогда $q_1 = 0$, $P_1 = 0$. Уравнение (16) имеет единственное решение. Каждому управлению в виде (14), где η определяется единственным образом, отвечает семейство решений системы (1), удовлетворяющее условию (5) и зависящее от q-мерного постоянного вектора.

Если $k_2 = d$, $(p+1)n > d$, то $d_1 = 0$, $P_1^* = 0$. Уравнение (16) всегда разрешимо и его решение имеет вид (17). В этом случае каждое допустимое управление можно представить в виде (14), однако вектор η зависит от q_1 произвольных постоянных. Каждому такому управлению соответствует семейство решений системы (1), удовлетворяющее условию (5) и зависящее от q-мерного постоянного вектора.

Если $k_2 = d = (p+1)n$, то матрица Q квадратная и $\det Q \neq 0$, а $Q^+ = Q^{-1}$. Уравнение (16) имеет единственное решение. Каждому управлению вида (14) отвечает семейство решений системы (1).

1. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 495 с.
2. *Conti R.* On ordinary differential equations with interface conditions // J. Different. Equat. – 1968. – **4**, № 4. – P. 4–11.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 287 с.
4. *Karandjulov L. I.* A boundary-value problem with a finite number of impulses for a controlled system // Сб. докл. Юбилейн. сес. „50 години Технически университет" (София, 11, 12 окт. 1995 г.). – София, 1995. – С. 125–131.
5. *Karandjulov L. I.* Multipoint boundary-value problem with impulse effects // Ukr. Mat. J. – 1995. – **47**, № 6. – P. 770–774.
6. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно обратные операторы и нетеровые краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – **13**. – 320 с.
7. *Penrose R.* A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1955. – **55**, № 3. – P. 406–413.
8. *Generalized* inverses and applications / Ed. M. Z. Nashed. – New York etc.: Acad. Press, 1976. – 1054 p.
9. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

Получено *19.08.97*,
после доработки – 16.04.98