УДК 517.512

В. А. Андриенко (Южноукр. пед. ун-т, Одесса)

О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ СРЕДНИХ РИССА ДВОЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ*

We indicate coefficient conditions of the classical type which ensure the summability almost everywhere of double orthogonal series by the Riesz methods of nonnegative order. We also establish some equiconvergence theorems.

Наведені коефіцієнтні умови класичного типу, які забезпечують сумовність майже скрізь подвійних ортогональних рядів методами Рісса невід'ємного порядку. Встановлені також деякі теореми рівнозбіжності.

1. Введение. В настоящей статье изучается суммируемость почти всюду двойных ортогональных рядов методами Рисса $(R, \alpha, 0)$, $(R, 0, \beta)$ и (R, α, β), где $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Указаны коэффициентные условия классического типа, достаточные для сходимости почти всюду (п. в.) средних Рисса неотрицательного порядка двойных ортогональных рядов. Получены аналоги одномерных результатов А.Н. Колмогорова [1] и С. Качмажа – А. Зигмунда [2, 3] для средних Чезаро и А. Зигмунда [4] для средних Рисса (см. также [5, с. 125 – 127, 146 – 148]), устанавливающие равносходимость п. в. лакунарных подпоследовательностей прямоугольных частных сумм и всей последовательности средних Рисса. Они обобщают соответствующие результаты Ф. Морица [6] для чезаровской суммируемости п. в. методами $(C, 1, 1)$, $(C, 1, 0)$, $(C, 0, 1)$ двойных ортогональных рядов. Без доказательства эти результаты были анонсированы в [7].

Пусть $(X, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с положительной мерой и $\psi = \{ \psi_{ik}(x) \colon i, k = 1, 2, \dots \}$ — ортонормированная система (ОНС) на X. Рассмотрим двойной ортогональный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \psi_{ik}(x), \tag{1}$$

где $\{ a_{ik} \colon i, k = 1, 2, \dots \}$ — последовательность коэффициентов, для которой

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2 < \infty. \tag{2}$$

Согласно теореме Рисса – Фишера существует функция $f(x) \in L^2 = L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ такая, что прямоугольные частные суммы ряда (1) сходятся к $f(x)$ в L^2-метрике, а ряд (1) является ее рядом Фурье.

Будем изучать $(R, \alpha, 0)$-, $(R, 0, \beta)$- и (R, α, β)-суммируемость п. в. ряда (1), т. е. сходимость п. в. средних Рисса ряда (1) порядков $\alpha > 0$, $\beta > 0$:

$$R_{mn}^{\alpha 0}(p; q; x) \equiv R_{mn}^{\alpha 0}(x) = \sum_{p_i < m} \sum_{q_k < n} \left(1 - \frac{p_i}{m}\right)^{\alpha} a_{ik} \psi_{ik}(x), \tag{3}$$

* Частично поддержана грантом №APU 061002 Международной Соросовской программы поддержки образования в области точных наук в Украине.

$$R_{mn}^{0\beta}(p;q;x) \equiv R_{mn}^{0\beta}(x) = \sum_{p_i<m}\sum_{q_k<n}\left(1-\frac{q_k}{n}\right)^{\beta} a_{ik}\psi_{ik}(x), \tag{4}$$

$$R_{mn}^{\alpha\beta}(p;q;x) \equiv R_{mn}^{\alpha\beta}(x) = \sum_{p_i<m}\sum_{q_k<n}\left(1-\frac{p_i}{m}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{q_k}{n}\right)^{\beta} a_{ik}\psi_{ik}(x), \tag{5}$$

где $m, n = 1, 2, \ldots$ и $\{0 < p_i \uparrow \infty : i = 1, 2, \ldots\}$, $\{0 < q_k \uparrow \infty : k = 1, 2, \ldots\}$ — строго возрастающие последовательности, на основе исследования поведения прямоугольных частных сумм вида

$$s_{mn}(p;q;x) \equiv s_{mn}(x) = \sum_{p_i<m}\sum_{q_k<n} a_{ik}\psi_{ik}(x),\ m, n = 1, 2, \ldots .$$

Хорошо известно, что условие (2) не гарантирует поточечную сходимость $s_{mn}(x)$ к $f(x)$. Обобщенная теорема Меньшова – Радемахера, доказанная рядом авторов (см., например, [8 – 10]), дает достаточное условие сходимости п. в. ряда (1) по любой ОНС ψ и может быть сформулирована следующим образом.

Теорема А. *Если*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2[\log(i+1)]^2[\log(k+1)]^2 < \infty,$$

то $s_{mn}(x) \to f(x)$ *п. в., когда* $\min(m, n) \to \infty$, *и существует функция* $F(x) \in L^2$ *такая, что*

$$\sup_{m,n\ge 1} |s_{mn}(x)| \le F(x) \quad \forall x \in X.$$

В связи с этой теоремой условимся о следующем соглашении. Для данной двойной последовательности $\{f_{mn}(x)\}$ функций из L^2 мы пишем: $f_{mn}(x) = o_x(1)$ п. в., если $f_{mn}(x) \to 0$ п. в., когда $\min(m, n) \to \infty$ (или $\max(m, n) \to \infty$, или $m \to \infty$, или $n \to \infty$), и существует функция $F(x) \in L^2$ такая, что

$$\sup_{m,n\ge 1} |f_{mn}(x)| \le F(x) \quad \forall x \in X.$$

С помощью „сжимающей техники" из теоремы А можно вывести следствие, представляющее самостоятельный интерес.

Следствие А. *Для любой ОНС* ψ*: если*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2[\log\log(p_i+3)]^2[\log(q_k+1)]^2 < \infty, \tag{6}$$

то

$$s_{2^l,n}(x) - f(x) = o_x(1) \ \text{п. в. при } l, n \to \infty;$$

если

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2[\log(p_i+1)]^2[\log\log(q_k+3)]^2 < \infty, \tag{7}$$

то

$$s_{m,2^t}(x) - f(x) = o_x(1) \ \text{п. в. при } m, t \to \infty;$$

если же

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2[\log\log(p_i+3)]^2[\log\log(q_k+3)]^2 < \infty, \tag{8}$$

то

$$s_{2^l,2^t}(x) - f(x) = o_x(1) \quad \textit{п. в. при } l,\ t \to \infty.$$

В данной статье логарифмы берутся по основанию 2.

2. Основные результаты. Рассмотрим средние Рисса ортогонального ряда (1) $R_{mn}^{\alpha\beta}(x)$ порядков $\alpha > 0$, $\beta > 0$, определенные равенством (5), а также средние Рисса $R_{mn}^{\alpha 0}(x)$ по отношению только к m и средние Рисса $R_{mn}^{0\beta}(x)$ по отношению только к n, определенные соответственно равенствами (3) и (4).

Следующая теорема является аналогом результатов А. Н. Колмогорова [1] для средних Чезаро и А. Зигмунда [4] для средних Рисса (см. также [5, с. 125 – 127, 146 – 148]) однократных ортогональных рядов.

Теорема 1. *Для любой ОНС* ψ*: если*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2[\log(q_k+1)]^2 < \infty, \tag{9}$$

то

$$s_{2^l,n}(x) - R_{2^l,n}^{\alpha 0}(x) = o_x(1) \quad \textit{п. в. при } l \to \infty \tag{10}$$

равномерно по n*; если*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2[\log(p_i+1)]^2 < \infty, \tag{11}$$

то

$$s_{m,2^t}(x) - R_{m,2^t}^{0\beta}(x) = o_x(1) \quad \textit{п. в. при } t \to \infty \tag{12}$$

равномерно по m*; если же*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2[\log\log(\max(p_i, q_k)+3)]^2 < \infty, \tag{13}$$

то

$$s_{2^l,2^t}(x) - R_{2^l,2^t}^{\alpha\beta}(x) = o_x(1) \quad \textit{п. в. при } l, t \to \infty. \tag{14}$$

Следующая теорема является аналогом результатов Качмажа (см. [2], а также [5, с.125, 126]) для средних арифметических однократных ортогональных рядов.

Теорема 2. *Для любой ОНС* ψ*: при условии* (9)

$$\max_{2^l < m \le 2^{l+1}} |R_{mn}^{\alpha 0}(x) - R_{2^l,n}^{\alpha 0}(x)| = o_x(1) \quad \textit{п. в. при } l \to \infty \tag{15}$$

равномерно по n*; при условии* (11)

$$\max_{2^t < n \le 2^{t+1}} |R_{mn}^{0\beta}(x) - R_{m,2^t}^{0\beta}(x)| = o_x(1) \quad \textit{п. в. при } t \to \infty \tag{16}$$

равномерно по m*; при условии* (13)

$$\max_{2^l < m \le 2^{l+1}} \max_{2^t < n \le 2^{t+1}} | R_{mn}^{\alpha\beta}(x) - R_{2^l, 2^t}^{\alpha\beta}(x) | = o_x(1) \text{ п. в. при } l, t \to \infty. \tag{17}$$

Комбинируя теоремы 1 и 2, получаем в качестве следствия следующую теорему.

Теорема 3. *Для любой ОНС* ψ: *при условии* (9) *ряд* (1) $(R, \alpha, 0)$*-суммируем п. в. на измеримом множестве* $Y \subset X$ *тогда и только тогда, когда последовательность* $\{s_{2^l, n}(x)\}$ *сходится п. в. на* Y *при* $l, n \to \infty$; *при условии* (11) *ряд* (1) $(R, 0, \beta)$*-суммируем п. в. на* Y *тогда и только тогда, когда последовательность* $\{s_{m, 2^t}(x)\}$ *сходится п. в. на* Y *при* $m, t \to \infty$, *при условии* (13) *ряд* (1) (R, α, β)*-суммируем п. в. на* Y *тогда и только тогда, когда последовательность* $\{s_{2^l, 2^t}(x)\}$ *сходится п. в. на* Y *при* $l, t \to \infty$.

Из следствия А и теоремы 3 как следствие получаем теорему 4, дающую коэффициентные условия риссовской суммируемости п. в.

Теорема 4. *Для любой ОНС* Ψ: *при условии* (6)

$$R_{mn}^{\alpha 0}(x) - f(x) = o_x(1) \text{ п. в. при } m, n \to \infty; \tag{18}$$

при условии (7)

$$R_{mn}^{0\beta}(x) - f(x) = o_x(1) \text{ п. в. при } m, n \to \infty; \tag{19}$$

при условии (8)

$$R_{mn}^{\alpha\beta}(x) - f(x) = o_x(1) \text{ п. в. при } m, n \to \infty. \tag{20}$$

Теорему 4 можно рассматривать как распространение коэффициентных критериев Д.Е. Меньшова [11], С. Качмажа [12] и А. Зигмунда [4] (см. также [5, с. 125, 126, 146 – 148]) на случай средних Рисса двойных ортогональных рядов.

3. Замечания и комментарии. 1. Теоремы 1 – 4 можно рассматривать как обобщение соответствующих результатов Ф. Морица [6] для методов $(C, 1, 0)$, $(C, 0, 1)$ и $(C, 1, 1)$.

2. Теорема 1 останется верной, если в утверждениях (10), (12) и (14) последовательности $\{2^l\}$ и $\{2^t\}$ заменить на $\{k_l\}$ и $\{\lambda_t\}$ соответственно, где $\{k_l\}$ и $\{\lambda_t\}$ — лакунарные по Адамару последовательности натуральных чисел, т. е. такие, что существуют константы p, l_0 и t_0 такие, что

$$1 < p \le k_{l+1}/k_l, \quad l \ge l_0, \quad \text{и} \quad 1 < p \le \lambda_{t+1}/\lambda_t, \quad t \ge t_0 \tag{21}$$

(ср. [5, с. 125]).

3. Теорема 2 останется верной, если в утверждениях (15) – (17) вместо $\{2^l\}$ и $\{2^t\}$ взять соответственно последовательности $\{k_l\}$ и $\{\lambda_t\}$ натуральных чисел такие, что существуют константы q, l_1 и t_1 такие, что

$$k_{l+1}/k_l \le q < \infty, \quad l \ge l_0, \quad \text{и} \quad \lambda_{t+1}/\lambda_t \le q < \infty, \quad t \ge t_1 \tag{22}$$

(ср. [5, с. 127]).

4. Следовательно, теорема 3 останется верной, если последовательности $\{2^l\}$ и $\{2^t\}$ заменить последовательностями натуральных чисел $\{k_l\}$ и $\{\lambda_t\}$, каждая из которых удовлетворяет условиям (21) и (22).

5. Понятие сходимости, использованное в сформулированных выше теоремах, есть так называемая сходимость по Прингсхейму (см., например, [13, с. 454] или [14, с. 17]). Но теорема А, следствие А и теорема 4 остаются верными, если это понятие сходимости заменить в них регулярной сходимостью. Это послед-

нее понятие сходимости было введено Харди [15] и для двойной последовательности $\{f_{mn}\}$ оно означает выполнение следующих утверждений:

а) двойная последовательность $\{f_{mn}\}$ сходится по Прингсхейму;

б) для любого фиксированного n последовательность $\{f_{mn}\}$ как обычная последовательность (по m) сходится, и для любого фиксированного m последовательность $\{f_{mn}\}$ как обычная последовательность (по n) сходится.

Докажем, например, регулярную сходимость п. в. последовательности $\{R_{mn}^{\alpha\beta}(x)\}$ в теореме 4. Утверждение а), очевидно, выполняется, так как это есть заключение теоремы 4. Чтобы проверить выполнение п. в. утверждения б), зафиксируем, например, n. Мы можем переписать $R_{mn}^{\alpha\beta}(x)$ в виде

$$R_{mn}^{\alpha\beta}(x) = \sum_{q_k < n}\left(1 - \frac{q_k}{n}\right)^{\beta} {}^{k}R_{m}^{\alpha}(x),$$

где

$${}^{k}R_{m}^{\alpha}(x) = \sum_{p_i < m}\left(1 - \frac{p_i}{m}\right)^{\alpha} a_{ik}\psi_{ik}(x)$$

— m-е среднее Рисса порядка α однократного ортогонального ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}\psi_{ik}(x),$$

т. е. так называемой k-й строки ряда (1).

В силу (6), для каждого k

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}^{2}[\log\log(p_i + 3)]^2 < \infty,$$

откуда по теореме Зигмунда (см. [4], теорема 1) следует сходимость п. в. последовательности $\{{}^{k}R_{m}^{\alpha}(x)\}$ при $m \to \infty$ для каждого k, а следовательно, сходимость п. в. последовательности $\{R_{mn}^{\alpha}(x)\}$ при $m \to \infty$ для любого фиксированного n. Аналогичное заключение может быть получено, когда m фиксировано. Таким образом, мы установили регулярную сходимость п. в. последовательности $\{R_{mn}^{\alpha}(x)\}$ при условии (6).

6. Если $(X, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство конечной непрерывной меры, можно доказать, что оценки (18)–(20) в теореме 4 окончательны в следующем смысле (на примере оценки (20)): для любой последовательности $v(m, n) \uparrow \infty$ по каждой переменной найдется ортогональный ряд (1), удовлетворяющий условию (8), для которого всюду на X

$$\varlimsup_{m, n \to \infty} v(m, n)\left|R_{mn}^{\alpha\beta}(x) - f(x)\right| = \infty.$$

Поскольку общий случай требует отдельного рассмотрения, докажем это утверждение в частном случае, когда $X = [0, 1]^2$.

Будем конструировать искомый ортогональный ряд следующим образом. Известно (см. [16], теорема 1, случай (α)), что теорема Зигмунда (см. [4], теорема 1) окончательна, т. е. для любой последовательности $v(m) \to \infty$ существует ортогональный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x) \tag{23}$$

по некоторой ОНС $\{\varphi_i(x)\}$, $x \in [0, 1]$, с коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 [\log\log(p_i+3)]^2 < \infty \tag{24}$$

и L^2-суммой $g(x)$, для которого всюду на $[0, 1]$

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\, v(m)|g(x) - R_m^{\alpha}(x)| = \infty, \tag{25}$$

где

$$R_m^{\alpha}(x) = \sum_{p_i<m}\left(1-\frac{p_i}{m}\right)^{\alpha} c_i\varphi_i(x), \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

— средние Рисса порядка $\alpha > 0$ ряда (23). Заметим, что здесь средние Рисса определяются несколько иначе, чем в статье [16].

Рассматривая теперь полученные последовательность $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ и ОНС $\{\varphi_i(x_1)\}_{i=1}^{\infty}$, $x_1 \in [0, 1]$, определим двойную последовательность $\{a_{ik}\}$ и двойную ОНС $\{\psi_{ik}(x): i, k = 1, 2, \ldots\}$ следующим образом.

Положим

$$a_{ik} = c_i, \text{ если } k = 1, \qquad \text{и } a_{ik} = 0, \text{ если } k > 1, \tag{26}$$

$$\psi_{ik}(x) = \psi_i(x_1) r_k(x_2),\ x = (x_1, x_2) \in [0,1]^2, \tag{27}$$

где $\{r_k(x_2)\}_{k=1}^{\infty}$ — система функций Радемахера, дополненная функцией $r_1(x_2) \equiv 1$.

В силу (26) и (27), двойной ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\psi_{ik}(x) \tag{28}$$

совпадает с однократным $\sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i(x_1)$, следовательно, их L^2-суммы равны: $f(x) = g(x_1)$. Из (24) и (26) следует, что коэффициенты ряда (28) удовлетворяют условию (8), а из (26) и (27) следует, что средние Рисса $R_{mn}^{\alpha\beta}(x)$ ряда (28) имеют вид

$$R_{mn}^{\alpha\beta}(x) = \left(1-\frac{q_1}{n}\right)^{\beta}\sum_{p_i<m}\left(1-\frac{p_i}{m}\right)^{\alpha} c_i\varphi_i(x_1) = \left(1-\frac{q_1}{n}\right)^{\beta} R_m^{\alpha}(x_1). \tag{29}$$

Но тогда, в силу окончательности теоремы Зигмунда, для последовательности $v_1(m) = v(m, 1)$ найдется ортогональный ряд (23), а следовательно, соответствующий ему двойной ортогональный ряд (28) такой, что на основании (29) и (25) для всех $x \in [0, 1]^2$ выполняется соотношение

$$\overline{\lim_{m,n\to\infty}}\, v(m,n)\left|f(x) - R_{mn}^{\alpha\beta}(x)\right| = \overline{\lim_{m,n\to\infty}}\, v(m,n)\left|g(x_1) - \left(1-\frac{q_1}{n}\right)^{\beta} R_m^{\alpha}(x_1)\right| \geq$$

$$\geq \overline{\lim_{m,n\to\infty}}\, v_1(m)\left|g(x_1) - R_m^{\alpha}(x_1)\right| = \infty,$$

что и требовалось доказать.

4. Доказательство теоремы 1. Из двух первых утверждений теоремы 1 достаточно доказать первое, т. е. (10), поскольку второе утверждение, т. е. (12), доказывается точно так же.

По определению,

$$s_{2^l,n}(x) - R^{\alpha 0}_{2^l,n}(x) = \sum_{p_i<2^l}\sum_{q_k<n}\left[1-\left(1-\frac{p_i}{2^l}\right)^{\alpha}\right]a_{ik}\psi_{ik}(x), \quad l\ge 0, \qquad n\ge 1.$$

Пусть сначала $n=2^t$, $t=0,1,\ldots$. Докажем, что

$$s_{2^l,2^t}(x) - R^{\alpha 0}_{2^l,2^t}(x) = o_x(1) \qquad \text{п. в. при } l\to\infty \tag{30}$$

равномерно по t. Используя неравенство

$$1-(1-x)^{\alpha} \le \max(1,\alpha)x, \qquad 0\le x\le 1,\ \alpha>0,$$

а затем неравенство Коши, получаем

$$\left|s_{2^l,2^t}(x) - R^{\alpha 0}_{2^l,2^t}(x)\right| \le C(\alpha)\sum_{r=0}^{t}\left|\sum_{p_i<2^l}\ \sum_{2^{r-1}\le q_k<2^r}\frac{p_i}{2^l}a_{ik}\psi_{ik}(x)\right| \le$$

$$\le C(\alpha)\left\{\sum_{r=0}^{t}(r+1)^2\left[\sum_{p_i<2^l}\ \sum_{2^{r-1}\le q_k<2^r}\frac{p_i}{2^l}a_{ik}\psi_{ik}(x)\right]^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{r=0}^{t}(r+1)^{-2}\right\}^{1/2}.$$

Далее,

$$\left\{\sum_{r=0}^{t}(r+1)^2\left[\sum_{p_i<2^l}\ \sum_{2^{r-1}\le q_k<2^r}\frac{p_i}{2^l}a_{ik}\psi_{ik}(x)\right]^2\right\}^{1/2} \le F_1(x),$$

где

$$F_1(x) = \left\{\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)^2\left[\sum_{p_i<2^l}\ \sum_{2^{r-1}\le q_k<2^r}\frac{p_i}{2^l}a_{ik}\psi_{ik}(x)\right]^2\right\}^{1/2}.$$

В силу (9),

$$\int F_1^2(x)\,d\mu(x) = O(1)\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{p_i<2^l}\ \sum_{2^{r-1}\le q_k<2^r}\frac{p_i^2}{2^{2l}}a_{ik}^2\log^2 q_k =$$

$$= O(1)\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}p_i^2a_{ik}^2\log^2 q_k\sum_{2^l>p_i}\frac{1}{2^{2l}} = O(1)\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^2[\log(q_k+1)]^2 < \infty. \tag{31}$$

Здесь и в последующем интегралы берутся по всему пространству X.

Из (31) в силу теоремы Леви следует (30).

Пусть теперь $2^t<n\le 2^{t+1}$ для некоторого $t\ge 1$. Тогда

$$\left|\sum_{p_i<2^l}\sum_{q_k<n}\left[1-\left(1-\frac{p_i}{2^l}\right)^{\alpha}\right]a_{ik}\psi_{ik}(x)\right| \le \left|\sum_{p_i<2^l}\sum_{q_k<2^t}\left[1-\left(1-\frac{p_i}{2^l}\right)^{\alpha}\right]a_{ik}\psi_{ik}(x)\right| +$$

$$+\left|\sum_{p_i<2^l}\ \sum_{2^t\le q_k<n}\left[1-\left(1-\frac{p_i}{2^l}\right)^{\alpha}\right]a_{ik}\psi_{ik}(x)\right|,$$

откуда

$$\max_{2^t < n \le 2^{t+1}} \left| s_{2^l, n}(x) - R^{\alpha\, 0}_{2^l, n}(x) \right| \le \left| s_{2^l, 2^t}(x) - R^{\alpha\, 0}_{2^l, 2^t}(x) \right| + M^{(1)}_{lt}(x), \qquad (32)$$

где

$$M^{(1)}_{lt}(x) = \max_{2^t < n \le 2^{t+1}} \left| \sum_{p_i < 2^l} \sum_{2^t \le q_k < n} \left[1 - \left(1 - \frac{p_i}{2^l} \right)^{\alpha} \right] a_{ik} \psi_{ik}(x) \right| =$$

$$= \max_{2^t < n \le 2^{t+1}} \left| \sum_{s = 2^t}^{n-1} \sum_{p_i < 2^l} \sum_{s \le q_k < s+1} \left[1 - \left(1 - \frac{p_i}{2^l} \right)^{\alpha} \right] a_{ik} \psi_{ik}(x) \right|.$$

Для оценки $M^{(1)}_{lt}(x)$ положим

$$a^*_{is} = \left\{ \sum_{s \le q_k < s+1} a^2_{ik} \right\}^{1/2}, \; s = 1, 2, \ldots , \qquad (33)$$

и

$$\psi^*_{is}(x) = \begin{cases} (a^*_{is})^{-1} \sum\limits_{s \le q_k < s+1} a_{ik} \psi_{ik}(x), & \text{если } a^*_{is} \ne 0; \\ \psi_{i,\, k(s)}(x), & \text{если } a^*_{is} = 0, \end{cases} \qquad (34)$$

где $k(s)$ — наибольший из номеров k, удовлетворяющих неравенству $s \le q_k < s+1$.

Тогда получим ОНС $\{ \psi^*_{is}(x) : i, s = 1, 2, \ldots \}$. Из (33) и (34) видно, что

$$M^{(1)}_{lt}(x) \le \sum_{p_i < 2^l} \max_{2^t < n \le 2^{t+1}} \left| \sum_{s = 2^t}^{n-1} \left[1 - \left(1 - \frac{p_i}{2^l} \right)^{\alpha} \right] a^*_{is} \psi^*_{is}(x) \right|.$$

Теперь, применяя при каждом фиксированном $p_i < 2^l$ неравенство Меньшова–Радемахера (см., например, [5, с. 87, 88]), получаем

$$\int [M^{(1)}_{lt}(x)]^2 \, d\mu(x) = O(1) t^2 \sum_{p_i < 2^l} \sum_{s = 2^t}^{2^{t+1}} p_i^2 2^{-2l} (a^*_{is})^2 =$$

$$= O(1) t^2 \sum_{p_i < 2^l} p_i^2 2^{-2l} \sum_{s = 2^t}^{2^{t+1}} \sum_{s \le q_k < s+1} a^2_{ik} = O(1) \sum_{p_i < 2^l} p_i^2 2^{-2l} \sum_{2^t \le q_k < 2^{t+1}} a^2_{ik} \log^2 q_k .$$

Полагая

$$F_2(x) = \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} [M^{(1)}_{lt}(x)]^2 \right\}^{1/2},$$

так же, как и в случае (31), имеем

$$\int F_2^2(x) \, d\mu(x) = O(1) \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{p_i < 2^l} p_i^2 2^{-2l} \sum_{2^t \le q_k < 2^{t+1}} a^2_{ik} \log^2 q_k =$$

$$= O(1) \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p_i < 2^l} p_i^2 2^{-2l} a^2_{ik} \log^2 q_k < \infty.$$

Отсюда, согласно теореме Леви, следует, что

$$M^{(1)}_{lt}(x) = o_x(1) \quad \text{п. в.,} \quad \text{когда } \max(l, t) \to \infty. \qquad (35)$$

Теперь из (30), (32) и (35) получаем (10).

Для доказательства (14) заметим, что

$$s_{2^l,2^t}(x) - R^{\alpha\beta}_{2^l,2^t}(x) = s_{2^l,2^t}(x) - R^{\alpha 0}_{2^l,2^t}(x) + s_{2^l,2^t}(x) - R^{0\beta}_{2^l,2^t}(x) -$$

$$- \sum_{p_i<2^l}\sum_{q_k<2^t}\left[1-\left(1-\frac{p_i}{2^l}\right)^{\alpha}\right]\left[1-\left(1-\frac{q_k}{2^t}\right)^{\beta}\right]a_{ik}\psi_{ik}(x).$$

Далее доказательство (14) состоит из трех частей.

1. Докажем сначала, что если

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^2[\log\log(q_k+3)]^2 < \infty, \tag{36}$$

то

$$s_{2^l,2^t}(x) - R^{\alpha 0}_{2^l,2^t}(x) = o_x(1) \quad \text{п. в.} \quad \text{при } l\to\infty \tag{37}$$

равномерно по t.

Это утверждение является следствием утверждения (10). Действительно, полагая

$$a^*_{ir} = \left\{\sum_{2^{q_r-1}<q_k\le 2^{q_r}} a_{ik}^2\right\}^{1/2}$$

и

$$\psi^*_{ir}(x) = \begin{cases}(a^*_{ir})^{-1}\sum\limits_{2^{q_r-1}<q_k\le 2^{q_r}} a_{ik}\psi_{ik}(x), & \text{если } a^*_{ir}\ne 0;\\ \psi_{i,k(r)}(x), & \text{если } a^*_{ir}=0,\end{cases}$$

где $k(r)$ — наибольший из номеров k, удовлетворяющих неравенству $2^{q_r-1} < q_k \le 2^{q_r}$, получаем ОНС $\{\psi^*_{ir}(x)\}$, $i=1,2,\ldots;\ r=0,1,2,\ldots$. В силу (36)

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}(a^*_{ir})^2[\log(q_r+1)]^2 < \infty.$$

Следовательно, на основании (10) имеем

$$s^*_{2^l,m}(x) - R^{*\alpha 0}_{2^l,m}(x) = o_x(1) \quad \text{п. в. при } l\to\infty \tag{38}$$

равномерно по m, где

$$s^*_{2^l,m}(x) - R^{*\alpha 0}_{2^l,m}(x) = \sum_{p_i<2^l}\sum_{q_r<m}\left[1-\left(1-\frac{p_i}{2^l}\right)^{\alpha}\right]a^*_{ir}\psi^*_{ir}(x) =$$

$$= \sum_{p_i<2^l}\sum_{q_k<2^m}\left[1-\left(1-\frac{p_i}{2^l}\right)^{\alpha}\right]a_{ik}\psi_{ik}(x) = s_{2^l,2^m}(x) - R^{\alpha 0}_{2^l,2^m}(x).$$

Таким образом, утверждения (37) и (38) равносильны.

2. Аналогично выводим, что если

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^2[\log\log(p_i+3)]^2 < \infty, \tag{39}$$

то

$$s_{2^l,2^t}(x) - R^{0\beta}_{2^l,2^t}(x) = o_x(1) \quad \text{п. в.} \quad \text{при } t \to \infty$$

равномерно по l.

3. Наконец, докажем, что при условии (2)

$$A^{(1)}_{lt}(x) = \sum_{p_i<2^l}\sum_{q_k<2^t}\left[1-\left(1-\frac{p_i}{2^l}\right)^{\alpha}\right]\left[1-\left(1-\frac{q_k}{2^t}\right)^{\beta}\right]a_{ik}\,\psi_{ik}(x) = o_x(1) \ \text{п. в.}, \tag{40}$$

когда $\max(l,t)\to\infty$.

Действительно,

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\int[A^{(1)}_{lt}(x)]^2\,d\mu(x) = O(1)\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{p_i<2^l}\sum_{q_k<2^t}p_i^2q_k^2 2^{-2(l+t)}a_{ik}^2 =$$

$$= O(1)\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}p_i^2\,q_k^2\,a_{ik}^2\sum_{2^l\ge p_i}2^{-2l}\sum_{2^t\ge q_k}2^{-2t} = O(1)\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^2 < \infty,$$

откуда в силу теоремы Леви следует (40).

5. Доказательство теоремы 2. Как и в теореме 1, достаточно доказать, что при условии (9) имеет место (15); утверждение (16) при условии (11) доказывается аналогично. Более того, докажем, что

$$A^{(2)}_{ln}(x) \equiv \left\{\sum_{m=2^l+1}^{2^{l+1}}\left|R^{\alpha 0}_{mn}(x) - R^{\alpha 0}_{m-1,n}(x)\right|^2\right\}^{1/2} = o_x(1) \quad \text{п. в.} \tag{41}$$

при $l\to\infty$ равномерно по n. Поскольку

$$\max_{2^l<n\le 2^{l+1}}\left|R^{\alpha 0}_{mn}(x) - R^{\alpha 0}_{m-1,n}(x)\right| \le A^{(2)}_{ln}(x),$$

то (15) немедленно следует из (41). Доказательство проводим в два шага, используя представление

$$R^{\alpha 0}_{mn}(x) - R^{\alpha 0}_{m-1,n}(x) = \sum_{p_i<m}\sum_{q_k<n}\beta_i(m)\,a_{ik}\,\psi_{ik}(x), \tag{42}$$

$$m = 2,3,\ldots;\ n = 1,2,\ldots,$$

где

$$\beta_i(m) = \beta_i(\alpha,m) = \begin{cases}\left(1-\dfrac{p_i}{m}\right)^{\alpha} - \left(1-\dfrac{p_i}{m-1}\right)^{\alpha}, & \text{если } p_i<m-1;\\[2ex] \left(1-\dfrac{p_i}{m}\right)^{\alpha}, & \text{если } m-1\le p_i<m.\end{cases} \tag{43}$$

1. Докажем сначала (41) в частном случае $n=2^t$, т. е. докажем, что

$$A^{(2)}_{l,2^t}(x) = o_x(1) \quad \text{п. в.} \quad \text{при } l\to\infty \text{ равномерно по } t. \tag{44}$$

С этой целью (см. (41) и (42)) с помощью неравенства Коши получаем

$$A^{(2)}_{l,2^t}(x) = \left\{\sum_{m=2^l+1}^{2^{l+1}}\left|\sum_{r=0}^{t}\sum_{p_i<m}\sum_{2^{r-1}\le q_k<2^r}\beta_i(m)\,a_{ik}\,\psi_{ik}(x)\right|^2\right\}^{1/2} \le$$

$$\le \frac{\pi}{\sqrt{6}}\left\{\sum_{m=2^l+1}^{2^{l+1}}\sum_{r=0}^{t}(r+1)^2\left|\sum_{p_i<m}\sum_{2^{r-1}\le q_k<2^r}\beta_i(m)\,a_{ik}\,\psi_{ik}(x)\right|^2\right\}^{1/2}.$$

Положим

$$F_3(x) = \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)^2 \left| \sum_{p_i < m} \sum_{2^{r-1} \le q_k < 2^r} \beta_i(m) a_{ik} \psi_{ik}(x) \right|^2 \right\}^{1/2}$$

и заметим, что (см. (43))

$$\beta_i^2(\alpha, m) \le \beta_i(2\alpha, m) \quad \text{и} \quad \sum_{m > p_i} \beta_i(\alpha, m) = 1. \tag{45}$$

В силу (45) и (9),

$$\int F_3^2(x) d\mu(x) = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)^2 \sum_{p_i < m} \sum_{2^{r-1} \le q_k < 2^r} \beta_i^2(\alpha, m) a_{ik}^2 \le$$

$$\le \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p_i < m} \sum_{2^{r-1} \le q_k < 2^r} \beta_i(2\alpha, m) a_{ik}^2 \log^2 4q_k =$$

$$= \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2 \log^2 4q_k \sum_{m > p_i} \beta_i(2\alpha, m) \le \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2 \log^2 4q_k < \infty. \tag{46}$$

Отсюда в силу теоремы Леви следует (44).

2. Мы поступаем здесь подобно шагу 2 при доказательстве теоремы 1. Пусть $t \ge 1$. Тогда, в силу (42),

$$\max_{2^t < n \le 2^{t+1}} A_{ln}^{(2)}(x) \le A_{l,2^t}^{(2)}(x) + \left\{ \sum_{m=2^l+1}^{2^{l+1}} [M_{mt}^{(2)}(x)]^2 \right\}^{1/2}, \tag{47}$$

где

$$M_{mt}^{(2)}(x) = \max_{2^t < n \le 2^{t+1}} \left| \sum_{p_i < m} \sum_{2^t < q_k < n} \beta_i(\alpha, m) a_{ik} \psi_{ik}(x) \right|.$$

Определяя, как в (33) и (34), последовательность $\{a_{is}^*\}$ и ОНС $\{\psi_{is}^*(x) : i, s = 1, 2, \ldots\}$, получаем

$$M_{mt}^{(2)}(x) = \max_{2^t < n \le 2^{t+1}} \left| \sum_{s=2^t}^{n-1} \sum_{p_i < m} \beta_i(\alpha, m) a_{is}^* \psi_{is}^*(x) \right|.$$

Применяя для каждого фиксированного $p_i < m$ неравенство Меньшова – Радемахера, имеем

$$\int [M_{mt}^{(2)}(x)]^2 d\mu(x) = O(1) t^2 \sum_{p_i < m} \sum_{s=2^t}^{2^{t+1}} \beta_i^2(\alpha, m)(a_{is}^*)^2 =$$

$$= O(1) \sum_{p_i < m} \sum_{2^t < q_k \le 2^{t+1}} a_{ik}^2 \beta_i(2\alpha, m) \log^2 q_k.$$

Полагая теперь

$$F_4(x) = \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} [M_{mt}^{(2)}(x)]^2 \right\}^{1/2},$$

как и в (46), получаем

$$\int F_4^2(x)\,d\mu(x) = O(1)\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{p_i<m}\sum_{2^t<q_k\le 2^{t+1}} a_{ik}^2\beta_i(2\alpha, m)\log^2 q_k =$$

$$= O(1)\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2\log^2 q_k < \infty.$$

Отсюда по теореме Леви следует, что

$$\sum_{m=2^l+1}^{2^{l+1}}[M_{mt}^{(2)}(x)]^2 = o_x(1) \quad \text{п. в. при} \quad l\to\infty \tag{48}$$

равномерно по t.

Теперь из (44), (47) и (48) следует утверждение (41).

Для доказательства утверждения (17) теоремы рассмотрим тождество

$$R_{mn}^{\alpha\beta}(x) - R_{2^l,2^t}^{\alpha\beta}(x) = \left[R_{mn}^{\alpha\beta}(x) - R_{m,2^t}^{\alpha\beta}(x) - R_{2^l,n}^{\alpha\beta}(x) + R_{2^l,2^t}^{\alpha\beta}(x)\right] +$$

$$+ \left[R_{m,2^t}^{\alpha\beta}(x) - R_{2^l,2^t}^{\alpha\beta}(x)\right] + \left[R_{2^l,n}^{\alpha\beta}(x) - R_{2^l,2^t}^{\alpha\beta}(x)\right],$$

из которого непосредственно вытекает неравенство

$$\max_{2^l<m\le 2^{l+1}}\max_{2^t<n\le 2^{t+1}}\left|R_{mn}^{\alpha\beta}(x) - R_{2^l,2^t}^{\alpha\beta}(x)\right| \le$$

$$\le \max_{2^l<m\le 2^{l+1}}\max_{2^t<n\le 2^{t+1}}\left|R_{mn}^{\alpha\beta}(x) - R_{m,2^t}^{\alpha\beta}(x) - R_{2^l,n}^{\alpha\beta}(x) + R_{2^l,2^t}^{\alpha\beta}(x)\right| +$$

$$+ \max_{2^l<m\le 2^{l+1}}\left|R_{m,2^t}^{\alpha\beta}(x) - R_{2^l,2^t}^{\alpha\beta}(x)\right| + \max_{2^t<n\le 2^{t+1}}\left|R_{2^l,n}^{\alpha\beta}(x) - R_{2^l,2^t}^{\alpha\beta}(x)\right| \le$$

$$\le \left\{\sum_{m=2^l+1}^{2^{l+1}}\sum_{n=2^t+1}^{2^{t+1}}\left|R_{mn}^{\alpha\beta}(x) - R_{m-1,n}^{\alpha\beta}(x) - R_{m,n-1}^{\alpha\beta}(x) + R_{m-1,n-1}^{\alpha\beta}(x)\right|^2\right\}^{1/2} +$$

$$+ \left\{\sum_{m=2^l+1}^{2^{l+1}}\left|R_{m,2^t}^{\alpha\beta}(x) - R_{m-1,2^t}^{\alpha\beta}(x)\right|^2\right\}^{1/2} + \left\{\sum_{n=2^t+1}^{2^{t+1}}\left|R_{2^l,n}^{\alpha\beta}(x) - R_{2^l,n-1}^{\alpha\beta}(x)\right|^2\right\}^{1/2} \equiv$$

$$\equiv A_{lt}^{(3)}(x) + A_{lt}^{(4)}(x) + A_{lt}^{(5)}(x).$$

В соответствии с этим неравенством дальнейшее доказательство состоит из трех частей.

1. Докажем сначала, что

$$A_{lt}^{(3)}(x) = o_x(1) \quad \text{п. в.,} \quad \text{когда } \max(l,t)\to\infty. \tag{49}$$

Доказательство основывается на легко проверяемом тождестве (см. (42) и (43)):

$$A_{lt}^{(3)}(x) = \left\{\sum_{m=2^l+1}^{2^{l+1}}\sum_{n=2^t+1}^{2^{t+1}}\left|\sum_{p_i<m}\sum_{q_k<n}\beta_i(\alpha,m)\gamma_k(\beta,n)a_{ik}\psi_{ik}(x)\right|^2\right\}^{1/2}, \tag{50}$$

где $\beta_i(\alpha, m)$ определены в (43), а $\gamma_k(\beta, n)$ определяются аналогично:

$$\gamma_k(n) = \gamma_k(\beta, n) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{q_k}{n}\right)^\beta - \left(1-\dfrac{q_k}{n-1}\right)^\beta, & \text{если } q_k < n-1; \\ \left(1-\dfrac{q_k}{n}\right)^\beta; & \text{если } n-1 \le q_k < n, \end{cases}$$

и имеют свойства, аналогичные (45):

$$\gamma_k^2(\beta, n) \le \gamma_k(2\beta, n) \quad \text{и} \quad \sum_{n > q_k} \gamma_k(\beta, n) = 1. \tag{51}$$

Положим

$$F_5(x) = \left\{\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} [A_{lt}^{(3)}(x)]^2\right\}^{1/2}.$$

В силу (50), (45) и (51),

$$\int F_5^2(x)\,d\mu(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{m=2^l+1}^{2^{l+1}} \sum_{n=2^t+1}^{2^{t+1}} \sum_{p_i<m} \sum_{q_k<n} \beta_i^2(\alpha, m)\gamma_k^2(\beta, n) a_{ik}^2 \le$$

$$\le \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{p_i<m} \sum_{q_k<n} \beta_i(2\alpha, m)\gamma_k(2\beta, n) a_{ik}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2 \sum_{p_i<m} \beta_i(2\alpha, m) \sum_{q_k<n} \gamma_k(2\beta, n) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2 < \infty.$$

Отсюда в силу теоремы Леви следует (49).

2. Докажем, что при условии (36)

$$A_{lt}^{(4)}(x) = o_x(1) \quad \text{п. в.} \quad \text{при } l \to \infty \quad \text{равномерно по } t. \tag{52}$$

Используя представления (42) и

$$R_{mn}^{\alpha\beta}(x) - R_{m-1,n}^{\alpha\beta}(x) = \sum_{p_i<m} \sum_{q_k<n} \beta_i(\alpha, m)\left(1-\frac{q_k}{n}\right)^\beta a_{ik}\,\psi_{ik}(x),$$

$$m = 2, 3, \ldots;\; n = 1, 2, \ldots,$$

записываем

$$R_{m,2^t}^{\alpha\beta}(x) - R_{m-1,2^t}^{\alpha\beta}(x) = R_{m,2^t}^{\alpha 0}(x) - R_{m-1,2^t}^{\alpha 0}(x) -$$

$$- \sum_{p_i<m} \sum_{q_k<2^t} \beta_i(\alpha, m)\left[1 - \left(1-\frac{q_k}{2^t}\right)^\beta\right] a_{ik}\,\psi_{ik}(x).$$

Следовательно (см. (41)),

$$A_{lt}^{(4)}(x) \le A_{l,2^t}^{(2)}(x) + A_{lt}^{(6)}(x), \tag{53}$$

где

$$A_{lt}^{(6)}(x) = \left\{\sum_{m=2^l+1}^{2^{l+1}} \left|\sum_{p_i<m} \sum_{q_k<2^t} \beta_i(\alpha, m)\left[1 - \left(1-\frac{q_k}{2^t}\right)^\beta\right] a_{ik}\,\psi_{ik}(x)\right|^2\right\}^{1/2}.$$

Теперь, используя ту же „сжимающую" технику, что и в ч.1 доказательства (14) в теореме 1, из оценки (41) выводим, что при условии (36)

$$A^{(2)}_{l,2^t}(x) = o_x(1) \quad \text{п. в.} \quad \text{при } l \to \infty \quad \text{равномерно по } t. \tag{54}$$

Наконец, нетрудно доказать, что при условии (2) верна оценка

$$A^{(6)}_{lt}(x) = o_x(1) \quad \text{п. в., когда} \quad \max(l, t) \to \infty. \tag{55}$$

Действительно, полагая

$$F_6(x) = \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \left| \sum_{p_i < m} \sum_{q_k < 2^t} \beta_i(\alpha, m) \left[1 - \left(1 - \frac{q_k}{2^t} \right)^{\beta} \right] a_{ik} \psi_{ik}(x) \right|^2 \right\}^{1/2},$$

в силу (45) и (51), получаем

$$\int F_6^2(x)\, d\mu(x) = O(1) \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{p_i < m} \sum_{q_k < 2^t} \beta_i(2\alpha, m) q_k^2 2^{-2t} a_{ik}^2 =$$

$$= O(1) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2 q_k^2 \sum_{m > p_i} \beta_i(2\alpha, m) \sum_{2^t > q_k} 2^{-2t} = O(1) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2 < \infty.$$

Отсюда в силу теоремы Леви следует (55), а из (53) – (55) вытекает (52).

3. Утверждение о том, что при условии (39) имеет место оценка

$$A^{(5)}_{lt}(x) = o_x(1) \quad \text{п. в.} \quad \text{при } t \to \infty \quad \text{равномерно по } l,$$

доказывается так же, как и (52).

1. *Kolmogoroff A. N.* Une contribution à l'étude de la convergeance des séries de Fourier // Fund. math. – 1924. – **5**. – P. 96 – 97.
2. *Kaczmarz S.* Über die Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen // Math. Ann. – 1925. – **96**. – S. 148 – 151.
3. *Zygmund A.* Sur l'application de la primière moyenne arithmètique dans la thèorie des séries orthogonales // Fund. math. – 1927. – **10**. – P. 356 – 362.
4. *Zygmund A.* Sur la sommation des séries de fonctions orthogonales // Bull. Int. Acad. Pol. Sci. Lett. (Cracovie). Sér. A. – 1927. – №. 6. – P. 295 – 308.
5. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 360 с.
6. *Móricz F.* On the a. e. convergence of the arithmetic means of double orthogonal series // Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. – **297**. – P. 763 – 776.
7. *Андриенко В. А.* Суммируемость двойных ортогональных рядов методами Рисса // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 2. – С. 3 – 5.
8. *Agnew P. R.* On double orthogonal series // Proc. London Math. Soc. – 1932. – **33**. – P. 420 – 434.
9. *Панджакидзе Ш. П.* О теореме Меньшова – Радемахера для двойных ортогональных рядов // Сообщ. АН ГССР. – 1965. – **39**. – С. 277 – 282.
10. *Móricz F.* On the convergence in a restricted sense of multiple series // Anal. Math. – 1979. – **5**.– P. 135 – 147.
11. *Menchoff D. E.* Sur les séries de fonctions ortogonales. II // Fund. math. – 1926. – **8**. – P. 56 – 108.
12. *Kaczmarz S.* Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen // Math. Z. – 1927. – **26**. – S. 99 – 105.
13. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 540 с.
14. *Жижиашвили Л. В.* Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа. – Тбилиси: Тбилис. ун-т, 1983. – 116 с.
15. *Hardy G. H.* On the convergence of certain multiple series // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1916 – 1919. – **19**. – P. 86 – 95.
16. *Андриенко В. А.* О скорости приближения средними Рисса ортогональных рядов // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 5. – С. 3 – 14.

Получено 09.01.97