УДК 517.5

Л. Н. Божуха (Днепродзержин. техн. ун-т)

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ ФЕЙЕРА, РОГОЗИНСКОГО И КОРОВКИНА

We consider inequalities of the Jackson type in the case of approximation of periodic functions by linear means of the Fourier series of these functions in the space L_2. When solving the problem, we choose an integral of square modulus of continuity as a majorant of square deviation. We establish that, in comparison with the constant for the best approximation, a constant for the Fejér and Rogosinski polynomials is the same and a constant for the Korovkin polynomial is greater.

Розглядаються нерівності типу Джексона при наближенні періодичних функцій у просторі L_2 лінійними середніми їх рядів Фур'є. При розв'язуванні задачі як мажоранта квадрата відхилення вибирається інтеграл від квадрата модуля неперервності. Виявлено, що для поліномів Фейєра і Рогозинського константа така ж, як і у випадку найкращого наближення, а для поліномів Коровкіна більша.

Пусть L_2 — пространство измеримых 2π-периодических функций с конечной нормой

$$\|f\|_2 = \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx\right\}^{1/2}, \tag{1}$$

$L_2^{(l)}$ $(l=0,1,2,\ldots;\ L_2^{(0)}=L_2)$ — множество всех функций $f(x)\in L_2$, у которых $(l-1)$-я производная локально абсолютна непрерывна и $f^{(l)}(x)\in L_2$.

Определим модуль непрерывности r-го порядка функции $f(x)$ равенством

$$\omega_r(f,\delta)_2 = \sup\{\Delta_r(f,t)\,|\,|t|<\delta\}, \tag{2}$$

где

$$\Delta_r(f,t) = \left\|\Delta_t^r f(\cdot)\right\|_2, \qquad \Delta_t^1 f(x) = f(x+t)-f(x-t),$$

$$\Delta_t^r f(x) = \Delta_t^1\left(\Delta_t^{r-1}f(x)\right).$$

Пусть

$$f(x) = \frac{\rho_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}\rho_i\cos(ix+\varphi_i)$$

— разложение функции $f(x)\in L_2$ в ряд Фурье.

Каждой 2π-периодической функции поставим в соответствие полином $U_n(f;x;\Lambda)$ вида

$$U_n(f;x;\Lambda) = \frac{\rho_0}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^{(n)}\rho_i\cos(ix+\varphi_i), \tag{3}$$

где $\Lambda=\Lambda_n=\left\{\lambda_i^{(n)}\right\}_{i=1}^{n-1}$ — мультипликатор линейного метода суммирования рядов Фурье.

Хорошо известно, что если

$$\lambda_i^{(n)} = \lambda_{i,1}^{(n)} = 1-\frac{i}{n}, \qquad i=1,\ldots,n-1, \tag{4}$$

то $U_n(f;x;\Lambda)$ — полиномы Фейера. А если

$$\lambda_i^{(n)} = \lambda_{i,2}^{(n)} = \cos\frac{i\pi}{2n}, \qquad i = 1, \ldots, n-1, \tag{5}$$

то $U_n(f; x; \Lambda_2)$ — полиномы Рогозинского.

Пусть, кроме того, T_n — множество тригонометрических полиномов порядка $\leq n-1$,

$$E_n(f)_2 = \|f - t_n\|_2 \tag{6}$$

— наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка $\leq n-1$ в метрике L_2 и

$$E(f, U_n(\Lambda_k))_2 = \|f - U_n(f; \cdot; \Lambda_k)\|_2 \tag{7}$$

— погрешность приближения функции f линейными средними (3) в L_2. В работе [1] доказано, что для $l \geq 0$ и $0 < h < 3\pi/4$ справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(l)},\\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{2l} E_n^2(f)_2}{\int_0^{h/n} \omega_1^2\left(f^{(l)}; t\right)_2 dt} = \frac{1}{2}\frac{n}{h - \sin h}. \tag{8}$$

В данной работе доказано равенство вида (8) для полиномов Фейера, Рогозинского и Коровкина.

Нам потребуется вспомогательное утверждение, доказательство которого проводится по схеме, предложенной в работе [2].

Лемма 1. *Пусть* $l = 0, 1, 2, \ldots$; $r, n = 1, 2, \ldots$; $0 < h < \pi$; $\psi(t) \geq 0$, $0 < t \leq h$, $U_n(\Lambda_k)$ — *линейный метод суммирования рядов Фурье с мультипликатором* $\lambda_{i,k}^{(n)}$. *Тогда*

$$\frac{1}{B_{n,h}^{l,r}(\psi)} \leq \sup_{\substack{f \in L_2^{(l)},\\ f \neq \text{const}}} \frac{E(f, U_n(\Lambda_k))_2^2}{\int_0^{h/n} \omega_r^2\left(f^{(l)}; t\right)_2 \psi(t)\, dt} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\min\left\{\inf_{1 \leq i \leq n-1} B_{i,h}^{l,r}(\psi) \big/ \left(1 - \lambda_{i,k}^{(n)}\right)^2, \ \inf_{i \geq n} B_{i,h}^{l,r}(\psi)\right\}}, \tag{9}$$

где

$$B_{i,h}^{l,r}(\psi) = 2^r i^{2l} \int_0^{h/n} (1 - \cos it)^r \psi(t)\, dt. \tag{10}$$

Доказательство. Для любой функции $f \in L_2$ справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\|f - U_n(f; \cdot; \Lambda_k)\|_2^2 =$$

$$= \left\| \frac{\rho_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i \cos(i \cdot + \varphi_i) - \frac{\rho_0}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i,k}^{(n)} \rho_i \cos(i \cdot + \varphi_i) \right\|_2^2 =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \lambda_{i,k}^{(n)}\right) \rho_i \cos(i \cdot + \varphi_i) + \sum_{i=n}^{\infty} \rho_i \cos(i \cdot + \varphi_i) \right\|_2^2 =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \lambda_{i,k}^{(n)}\right) \rho_i \cos(ix + \varphi_i) + \sum_{i=n}^{\infty} \rho_i \cos(ix + \varphi_i) \right]^2 dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left(1-\lambda_{i,k}^{(n)}\right)^2\rho_i^2 + \sum_{i=n}^{\infty}\rho_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\left(1-\lambda_{i,k}^{(n)}\right)^2\rho_i^2\frac{2^r i^{2l}\int_0^{h/n}(1-\cos it)^r\psi(t)\,dt}{2^r i^{2l}\int_0^{h/n}(1-\cos it)^r\psi(t)\,dt} +$$

$$+ \sum_{i=n}^{\infty}\rho_i^2\frac{2^r i^{2l}\int_0^{h/n}(1-\cos it)^r\psi(t)\,dt}{2^r i^{2l}\int_0^{h/n}(1-\cos it)^r\psi(t)\,dt}.$$

Обозначим

$$D_{k,r}^{n-1}(t) = \sum_{i=1}^{n-1}2^r i^{2l}\left(1-\lambda_{i,k}^{(n)}\right)^2\rho_i^2(1-\cos it)^r,$$

$$D_{k,r}^{n}(t) = \sum_{i=n}^{\infty}2^r i^{2l}\rho_i^2(1-\cos it)^r.$$

Тогда

$$\|f-U_n(f;\cdot;\Lambda_k)\|_2^2 \le \frac{\int_0^{h/n}D_{k,r}^{n-1}(t)\psi(t)\,dt + \int_0^{h/n}D_{k,r}^{n}(t)\psi(t)\,dt}{\min\left\{\inf_{1\le i\le n-1}B_{i,h}^{l,r}(\psi)\,/\left(1-\lambda_{i,k}^{(n)}\right)^2,\ \inf_{\,i\ge n}B_{i,h}^{l,r}(\psi)\right\}} \le$$

$$\le \frac{\int_0^{h/n}\left(2^r\sum_{i=1}^{\infty}i^{2l}\rho_i^2(1-\cos it)^r\right)\psi(t)\,dt}{\min\left\{\inf_{1\le i\le n-1}B_{i,h}^{l,r}(\psi)\,/\left(1-\lambda_{i,k}^{(n)}\right)^2,\ \inf_{\,i\ge n}B_{i,h}^{l,r}(\psi)\right\}} =$$

$$= \frac{\int_0^{h/n}\Delta_r^2\left(f^{(l)}.\,t\right)_2\psi(t)\,dt}{\min\left\{\inf_{1\le i\le n-1}B_{i,h}^{l,r}(\psi)\,/\left(1-\lambda_{i,k}^{(n)}\right)^2,\ \inf_{\,i\ge n}B_{i,h}^{l,r}(\psi)\right\}} \le$$

$$\le \frac{\int_0^{h/n}\omega_r^2\left(f^{(l)}.\,t\right)_2\psi(t)\,dt}{\min\left\{\inf_{1\le i\le n-1}B_{i,h}^{l,r}(\psi)\,/\left(1-\lambda_{i,k}^{(n)}\right)^2,\ \inf_{\,i\ge n}B_{i,h}^{l,r}(\psi)\right\}}.$$

Оценка сверху получена. Оценка снизу следует из неравенства [2]

$$\frac{1}{B_{n,h}^{l,r}(\psi)} \le \sup_{\substack{f\in L_2^{(l)},\\ f\ne\text{const}}}\frac{E_n(f)_2^2}{\int_0^{h/n}\omega_r^2\left(f^{(l)};t\right)_2\psi(t)\,dt}.$$

и очевидного неравенства

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(l)},\\ f\ne\text{const}}}\frac{E_n(f)_2^2}{\int_0^{h/n}\omega_r^2\left(f^{(l)};t\right)_2\psi(t)\,dt} \le \sup_{\substack{f\in L_2^{(l)},\\ f\ne\text{const}}}\frac{E(f,U_n(\Lambda_k))_2^2}{\int_0^{h/n}\omega_r^2\left(f^{(l)};t\right)_2\psi(t)\,dt}.$$

Лемма доказана.

Для удобства введем обозначение

$$A_{k,i} = \frac{B_{i,h}^{l,r}(\psi)}{\left(1-\lambda_{i,k}^{(n)}\right)^2}.$$

Теорема 1. *Для* $n=1,2,\ldots;\ 0<h<3\pi/4$ *и метода суммирования Фейера* $U_n(\Lambda_1)$ *справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2,\\ f\neq\text{const}}} \frac{E(f, U_n(\Lambda_1))_2^2}{\int_0^{h/n}\omega_1^2(f;t)_2\,dt} = \frac{1}{2}\frac{n}{h-\sin h}. \tag{11}$$

Доказательство. При $i \geq n$ в работах [1, 2] доказано, что

$$B_{i,h}^{0,1} \geq \frac{2}{n}(h-\sin h). \tag{12}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \frac{n^3}{x^3}\frac{(xh/n-\sin(xh/n))}{h-\sin h}. \tag{13}$$

Покажем, что функция $\varphi(x)$ для $x\in[1, n-1]$ не возрастает. Имеем

$$\varphi'(x) = \frac{n^3}{(h-\sin h)x^3}\left(\frac{3}{x}\sin\frac{xh}{n}-\frac{h}{n}\left(\cos\frac{xh}{n}+2\right)\right) =$$

$$= \frac{n^3}{(h-\sin h)x^4}\left(3\sin\frac{xh}{n}-\frac{xh}{n}\left(\cos\frac{xh}{n}+2\right)\right) \leq$$

$$\leq \frac{n^3}{(h-\sin h)x^4}\left(3\frac{xh}{n}-3\frac{x^3h^3}{3!n^3}+3\frac{x^5h^5}{5!n^5}-\right.$$

$$\left.-\frac{xh}{n}\left(1-\frac{x^2h^2}{2!n^2}+\frac{x^4h^4}{4!n^4}-\frac{x^6h^6}{6!n^6}+2\right)\right) =$$

$$= \frac{n^3}{(h-\sin h)x^4}\frac{x^5h^5}{60n^5}\left(\frac{x^2h^2}{12n^2}-1\right) < \frac{xh^5}{60n^2(h-\sin h)}\left(\frac{h^2}{12}-1\right) <$$

$$< \frac{xh^5}{60n^2(h-\sin h)}\left(\frac{3\pi^2}{64}-1\right) < \frac{xh^5}{60n^2(h-\sin h)}(-0{,}53) < 0.$$

Поскольку $\varphi(n)=1$, то для любого $n = 1, 2, \ldots, n-1$ $\varphi(i)>1$. Следовательно,

$$A_{1,i} = \frac{2n^2}{i^3}\left(\frac{ih}{n}-\sin\frac{ih}{n}\right) > \frac{2}{n}(h-\sin h) = B_{n,h}^{0,1}(1).$$

Таким образом,

$$\min\left\{\frac{\inf_{1\leq i\leq n-1}B_{i,h}^{0,1}(1)}{\left(1-\lambda_{i,1}^{(n)}\right)^2},\ \inf_{i\geq n}B_{i,h}^{0,1}(1)\right\} = B_{n,h}^{0,1}(1),$$

что вместе с неравенством (12) и утверждением леммы завершает доказательство теоремы.

Теорема 2. *Для* $n = 1, 2, \ldots$; $0 < h < \pi/2$ *и метода суммирования Рогозинского* $U_n(\Lambda_2)$ *справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2,\\ f\neq\text{const}}} \frac{E(f, U_n(\Lambda_2))_2^2}{\int_0^{h/n}\omega_1^2(f;t)_2\,dt} = \frac{1}{2}\frac{n}{h-\sin h}. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $n = 1, 2, \ldots, n-1$, тогда

$$A_{2,i} = \frac{2(ih/n-\sin(ih/n))}{i(1-\cos(ih/2n))^2} >$$

$$> 2\left(\frac{ih}{n}-\frac{ih}{n}+\frac{i^3h^3}{3!n^3}-\frac{i^5h^5}{5!n^5}\right)\left(i\left(1-1+\frac{i^2h^2}{2!(2n)^2}\right)^2\right)^{-1} =$$

$$= 2\frac{2}{3}\frac{1}{hi^2}\frac{(2n)^4}{n^3}\left(1-\frac{i^2h^2}{20n^2}\right) > 2\frac{2}{3}\frac{1}{nh}2^4\left(1-\frac{h^2}{20}\right) \geq$$

$$\geq 2\frac{2}{3}\frac{1}{nh}2^4\left(1-\frac{\pi^2}{80}\right) > \frac{2h}{n}\frac{32\cdot 16}{3\cdot 9\pi^2}\left(1-\frac{\pi^2}{80}\right) >$$

$$> \frac{2h}{n}\cdot 1{,}92\cdot 0{,}87 > \frac{2h}{n} > \frac{2(h-\sin h)}{n} = B_{n,h}^{0,1}(1).$$

Отсюда и из (12) следует

$$\min\left\{\frac{\inf_{1\leq i\leq n-1} B_{i,h}^{0,1}(1)}{\left(1-\lambda_{i,2}^{(n)}\right)^2},\ \inf_{i\geq n} B_{i,h}^{0,1}(1)\right\} = B_{n,h}^{0,1}(1).$$

Используя лемму 1, завершаем доказательство теоремы.

Рассмотрим теперь известный метод Коровкина (см., например, [4, 5]). Он получается, если мультипликаторы (обозначим их $\lambda_{i,3}^{(n)}$) имеют вид

$$\lambda_i^{(n)} = \lambda_{i,3}^{(n)} = \left(1-\frac{i}{n+1}\right)\cos\frac{i\pi}{n+1} + \frac{1}{n+1}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n+1}\sin\frac{i\pi}{n+1}. \tag{15}$$

Оказывается, что здесь ситуация несколько иная, чем в предыдущих двух теоремах. Здесь все зависит от поведения функции

$$\xi_h(x) = \frac{x\left(1-(1-x)\cos\pi x-\pi^{-1}\sin\pi x\right)^2}{2(hx-\sin hx)}. \tag{16}$$

И так как функция достигает максимума внутри промежутка $(0; 1)$, то результат будет иным.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $0 < h < 3\pi/4$, *функция* $\xi_h(x)$ *задана равенством* (16) *и* $x_h \in (0, 1)$ — *точка, в которой данная функция достигает максимума. Тогда при* $n \to \infty$ *выполняется равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2,\\ f\neq\mathrm{const}}}\frac{E(f, U_n(\Lambda_3))_2^2}{\int_0^{h/n}\omega_1^2(f;t)_2\,dt} = n(\xi_h(x_h)+o(1)). \tag{17}$$

Доказательство. Докажем сначала, что максимум функции достигается внутри интервала $(0, 1)$.

Проводя непосредственные вычисления, получаем

$$\xi_h'(x) = \frac{\left(1-(1-x)\cos\pi x-\pi^{-1}\sin\pi x\right)}{2(hx-\sin hx)^2}C_h(x),$$

где

$$C_h(x) = -\sin hx + xh\cos hx + 2\pi hx^2(1-x)\sin\pi x +$$

$$+ \cos x(\pi-h)\left(\frac{1}{2\pi}-\pi x(1-x)-\frac{(1-x)hx}{2}\right) +$$

$$+ \cos x(\pi+h)\left(-\frac{1}{2\pi}+\pi x(1-x)-\frac{(1-x)hx}{2}\right) +$$

$$+ \sin x(\pi-h)\left(-\frac{1-x}{2}-\frac{hx}{2\pi}\right) + \sin x(\pi+h)\left(\frac{1-x}{2}-\frac{hx}{2\pi}\right).$$

Оценим производную функции в точке 1:

$$\xi_h'(1) = \frac{C_h(1)}{2(h-\sin h)^2} = \frac{h\cos h - \sin h}{2(h-\sin h)^2} \le$$

$$\le \frac{h^3\left(h^2/8-1\right)}{6(h-\sin h)^2} < \frac{h^3}{6(h-\sin h)^2}\left(\frac{9\pi^2}{128}-1\right) \le \frac{-0{,}31h^3}{6(h-\sin h)^2} < 0.$$

Поскольку $\xi_h(+0)=0$ и $\xi_h(1) = (2(h-\sin h))^{-1} > 0$ и $\xi_h'(1) < 0$, то максимум функции достигается внутри промежутка $(0, 1)$ (более подробные исследования показывают, что при каждом h функция $\xi_h(x)$ имеет одну и только одну точку локального максимума x_h на отрезке $(0, 1)$).

Далее покажем справедливость соотношения (17). Величина $A_{3,i}$ равна

$$A_{3,i} = \frac{B_{i,h}^{0,1}(1)}{\left(1-\lambda_{i,3}^{(n)}\right)^2} =$$

$$= 2\left(\frac{ih}{n}-\sin\frac{ih}{n}\right)\frac{1}{i}\left(1-\left(1-\frac{i}{n+1}\right)\cos\frac{i\pi}{n+1}+\frac{1}{n+1}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n+1}\sin\frac{i\pi}{n+1}\right)^{-2}.$$

Используя доказанный факт максимума функции $\xi_h(x)$ в точке $x_h \in (0, 1)$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le i\le n-1}\frac{1}{nA_{3,i}} = \lim_{n\to\infty}\max_{1/n\le i/n\le (n-1)/n}\frac{1}{nA_{3,\,n\cdot i/n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\max_{0<x<1}\frac{1}{nA_{3,\,nx}} = \max_{0<x<1}\left(\xi_h(x)+o(1)\right) = \xi_h(x_h)+o(1).$$

Оценку снизу приведем для функции $\cos[nx_h]t$ при $x_h \in (0, 1)$. Тогда

$$E(\cos[nx_h]\cdot, U_n(\Lambda_3))_2^2 = \left(1-\lambda_{[nx_h],3}^{(n)}\right)^2 =$$

$$= \left(1-\left(1-\frac{[nx_h]}{n+1}\right)\cos\frac{\pi[nx_h]}{n+1}-\frac{1}{n+1}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n+1}\sin\frac{\pi[nx_h]}{n+1}\right)^2$$

и

$$\int_0^{h/n}\omega_1^2(\cos[nx_h]\cdot, t)_2\,dt = \int_0^{h/n}2\left(\sup_{|u|\le t}(1-\cos[nx_h]u)\right)dt =$$

$$= \int_0^{h/n}2(1-\cos[nx_h]t)\,dt = \frac{2}{[nx_h]}\left(\frac{h[nx_h]}{n}-\sin\frac{h[nx_h]}{n}\right).$$

Учитывая, что

$$[nx_h] = nx_h - \{nx_h\}$$

и $0 \le \{nx_h\} < 1$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E(\cos[nx_h]\cdot, U_n(\Lambda_3))_2^2}{n\int_0^{h/n}\omega_1^2(\cos[nx_h]\cdot, t)_2\,dt} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(x_h-\frac{\{nx_h\}}{n}\right)\frac{P_x(n)}{2(x_hh-\{nx_h\}h/n-\sin(x_hh-\{nx_h\}h/n))},$$

где

$$P_n(x) = \left(1-\left(1-\frac{n}{n+1}x_h+\frac{\{nx_h\}}{n+1}\right)\cos\left(\frac{n}{n+1}\pi x_h-\frac{\pi\{nx_h\}}{n+1}\right) - \right.$$
$$\left. -\ \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{n}{n+1}\pi x_h-\frac{\pi\{nx_h\}}{n+1}\right)\right)^2.$$

Тогда

$$\frac{E(\cos[nx_h]\cdot, U_n(\Lambda_3))_2^2}{n\int_0^{h/n}\omega_1^2(\cos[nx_h]\cdot, t)_2\,dt} =$$

$$= \frac{x_h\left(1-(1-x)\cos\pi x_h-\pi^{-1}\sin\pi x_h\right)^2}{2(x_h h-\sin x_h h)} + o(1) = \xi_h(x_h)+o(1).$$

Таким образом, учитывая это равенство и то, что

$$\min\left\{\frac{\inf_{1\le i\le n-1}B_{i,h}^{0,1}(1)}{\left(1-\lambda_{i,3}^{(n)}\right)^2},\ \inf_{i\ge n}B_{i,h}^{0,1}(1)\right\} = (n(\xi_h(x_h)+o(1)))^{-1},$$

с помощью леммы 1 завершаем доказательство утверждения.

Замечание. В частности,

$$\xi_{\pi/2}(x_{\pi/2}) \approx \xi_{\pi/2}(0{,}57) \approx 0{,}967857 >$$
$$> \frac{1}{2(\pi/2-\sin(\pi/2))} \approx 0{,}8756931$$

и

$$\xi_{5\pi/8}(x_{5\pi/8}) \approx \xi_{5\pi/8}(0{,}58) \approx 0{,}40581608 >$$
$$> \frac{1}{2(5\pi/8-\sin(5\pi/8))} \approx 0{,}30319799.$$

1. *Тайков Л.В.* Неравенства, содержащие наилучшее приближение и модуль непрерывности из L_2 // Мат. заметки. – 1976. – **20**, № 3. – С. 433–438.
2. *Лигун А.А.* Некоторые неравенства между наилучшим приближением и модулем непрерывности в пространстве L_2 // Там же. – 1978. – **24**, № 6. – С. 785–792.
3. *Коровкин П.П.* Линейные операторы и теория приближений. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
4. *Степанец И.И.* Равномерное приближение тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 339 с.
5. *Стечкин С.Б.* О некоторых экстремальных свойствах положительных тригонометрических полиномов // Мат. заметки. – 1970. – **7**, № 4. – С. 411–423.

Получено 14.09.98,
После доработки — 15.03.99