УДК 517.53

Ф. Г. Абдуллаев (Мерсин. ун-т, Турция)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПО ПЛОЩАДИ ПОЛИНОМОВ В ОБЛАСТЯХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ. I

We find conditions of the interference of singularities of a weight and a boundary for polynomials orthogonal with respect to area of a domain. We obtain new estimates for the rate of growth of these polynomials depending on singularities of a weight and a boundary.

Знайдено умови інтерференції особливостей ваги та контуру для ортогональних за площею області поліномів. Отримано нові оцінки швидкості зростання цих поліномів, які залежать від особливостей ваги та контуру.

1. Введение и основные результаты. Пусть G — конечная односвязная область, ограниченная жордановой кривой $L := \partial G$, σ — двумерная мера Лебега, $h \in L^1(G, d\sigma)$ — положительная весовая функция, определенная в G.

Система полиномов $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\deg K_n = n$, каждый из которых имеет положительный старший коэффициент, называется ортонормированной по площади области G с весом h, если

$$\iint_G h(z)\, K_n(z)\, \overline{K_m(z)}\, d\sigma(z) = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \tag{1}$$

Эти полиномы введены Т. Карлеманом [1] при $h(z) \equiv 1$ в связи с известной проблемой Фабера [2] о построении ряда Тейлора для случая односвязной области по аналогии с построениями Г. Сеге [3] для случая ортогональности по кривой.

Одним из основных вопросов теории ортогональных полиномов является изучение их роста в замыкании области ортогональности. В случае ортогональности по кривой этот вопрос изучался в работах [3 – 7], а в случае ортогональности по площади — в [8 – 11].

Далее будем считать, что область G ограничена квазиконформной кривой L, а весовая функция имеет вид

$$h(z) = h_0(z)\, |z - z_1|^{\gamma_1} \ldots |z - z_m|^{\gamma_m}, \tag{2}$$

где $\{z_i\}_{i=1}^{m}$ — фиксированная система точек на L, $\gamma_i > -2$ при $i = \overline{1, m}$, а h_0 равномерно отграничена от нуля в G:

$$\exists\, c_0 > 0 \quad \forall z \in G: \quad h_0(z) \geq c_0. \tag{3}$$

Напомним, что квазиконформной кривой называется образ окружности при квазиконформном отображении плоскости на себя [12, с. 97].

Пусть $\delta > 0$, $z \in \boldsymbol{C}$,

$$D(z, \delta) := \{\xi \colon |\xi - z| < \delta\}, \quad D := D(0, 1), \quad \Delta(z, \delta) := \operatorname{ext} D(z, \delta),$$
$$\Delta := \operatorname{ext} D, \quad \Omega := \operatorname{ext} G, \quad \Omega(z, \delta) := \Omega \bigcap D(z, \delta),$$

Φ — конформное однолистное отображение Ω на Δ с обычной нормировкой $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$.

Определение 1. *Будем говорить, что* $G \in Q_\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, *если* $\Phi \in \operatorname{Lip} \alpha$.

Пусть $\{z_i\}_{i=1}^m$ — фиксированная система точек на L из формулы (2).

Определение 2. *Будем говорить, что* $G \in Q_{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_m}$, *где* $0 < \beta_i \le \alpha \le 1$, *при* $i = \overline{1, m}$, *если:*

i) *для любой последовательности попарно не пересекающихся кругов* $\{D(z_i, \delta_i)\}_{i=1}^m$ *ограничения функции* Φ *на* $\Omega(z_i, \delta_i)$ *принадлежат* $\operatorname{Lip} \beta_i$, *а ограничение*

$$\Phi \Big| \, \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^m \Omega(z_i, \delta_i) \in \operatorname{Lip} \alpha;$$

ii) *существует конечная последовательность попарно не пересекающихся кругов* $\{D(z_i, \delta_i^*)\}_{i=1}^m$ *такая, что* $\forall\, i = \overline{1, m}$, $\forall\, \xi, z \in \Omega(z_i, \delta_i^*)$ *при* $z \ne z_i \ne \xi$ *выполняется неравенство*

$$|\Phi(z) - \Phi(\xi)| \le k_i(z, \xi) |z - \xi|^\alpha, \tag{4}$$

где

$$k_i(\xi, z) = t_i \max\left(|\xi - z_i|^{\beta_i - \alpha}, |z - z_i|^{\beta_i - \alpha}\right), \tag{5}$$

а t_i *— положительная постоянная, не зависящая от* ξ *и* z.

***Замечание* 1.** Условия (4) и (5) очевидно выполняются для модельного случая:

$$i = 1, \quad \alpha = 1, \quad \Phi(z) = z^{\beta_1}, \quad z_1 = 0, \quad \Omega(z_1, \delta_1^*) = \{z \colon |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Перейдем к формулировке теорем.

Теорема 1. *Пусть* $G \in Q_\alpha$, $1/2 < \alpha \le 1$, *и в* (2) *все* $\gamma_i = 0$. *Тогда для всех* $z \in \overline{G}$ *и всех натуральных* n

$$|K_n(z)| \le c_1 n^{1/\alpha}.$$

Теорема 2. *Пусть* $G \in Q_{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_m}$, *где* $1/2 \le \beta_i \le \alpha \le 1$, *и при* $i = \overline{1, m}$

$$1 + \frac{\gamma_i}{2} = \frac{\beta_i}{\alpha}. \tag{6}$$

Тогда для всех $z \in \overline{G}$ *и всех натуральных* n

$$|K_n(z)| \le c_2 n^{1/\alpha}.$$

***Замечание* 2.** Постоянные c_1 и c_2 в сформулированных теоремах зависят только от области G и весовой функции h.

Условие (6) будем называть условием *интерференции особенностей* в точке z_i. Как показывают теоремы 1 и 2, при выполнении условий интерференции во всех „особых" точках $z_i \in L$ наличие особенностей не влияет на оценку скорости роста K_n в G.

Отметим, что оценки роста полиномов в этих теоремах получены при функциональных условиях на область G, вместо которых можно ввести более наглядные геометрические (например, условие сектора [9, с. 227]).

2. Вспомогательные факты. Не уменьшая общности, будем считать, что $0 \in G$. Пусть $L = \partial G$ — K-квазиконформная кривая. Относительно L существует $K_1 = K_1(K)$ — квазиконформное отображение $Y(\xi)$, представляющее собой антиквазиконформный гомеоморфизм $\overline{C}$ на себя со следующими свойствами (подробнее см. [12, с. 26]):

s_1) $Y(\xi)$ — непрерывно дифференцируемое отображение в $C \setminus \{L \cup \{0\}\}$;

s_2) $Y(G) = \Omega$, $Y(\Omega) = G$, $\forall\, \xi \in C$: $Y(Y(\xi)) = \xi$; $\forall\, \xi \in \Gamma$: $Y(\xi) = \xi$; $Y(0) = \infty$, $Y(\infty) = 0$;

s_3) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, \xi \in \{\xi \colon \varepsilon < |\xi| < 1/\varepsilon\} \setminus L$, $\forall\, z \in L$: $|Y(\xi) - z| \asymp |\xi - z|$; $\left|Y_{\overline{\xi}}\right| \asymp 1$, $\left|Y_{\xi}\right| \preceq 1$;

s_4) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, \xi \in D(0, \varepsilon)$: $\left|Y_{\overline{\xi}}\right| \asymp |Y(\xi)|^2$; $\left|Y_{\xi}\right| \preceq |Y(\xi)|^2$;

s_5) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, \xi \in \Delta(0, 1/\varepsilon)$: $\left|Y_{\overline{\xi}}\right| \asymp |\xi|^{-2}$; $\left|Y_{\xi}\right| \preceq |\xi|^{-2}$.

В соотношениях $s_3) - s_5)$ использованы символы формальных производных, порядковых равенств и неравенств. Если $\xi = \eta + i\zeta$, то

$$Y_{\xi} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} - i\frac{\partial Y}{\partial \zeta}\right), \quad Y_{\overline{\xi}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} + i\frac{\partial Y}{\partial \zeta}\right),$$

$$a(\xi) \preceq b(\xi) \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} \exists\, c_3 > 0: \quad a(\xi) \le c_3\, b(\xi),$$

$$a(\xi) \asymp b(\xi) \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} \exists\, c_4 > 0,\ c_5 > 0: \quad c_4\, b(\xi) \le a(\xi) \le c_5\, b(\xi).$$

Отметим, что константы в порядковых соотношениях $s_3) - s_5)$ зависят от коэффициента квазиконформности кривой L и выбранного $\varepsilon > 0$.

Для функций f, аналитических в G и непрерывных в $\overline{G}$, имеет место интегральное представление В. И. Белого [12, с. 107]

$$\forall\, z \in G: \quad f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G} \frac{f(\xi)\, Y_{\overline{\xi}}}{(Y(\xi) - z)^2}\, d\sigma(\xi), \tag{7}$$

где Y — квазиконформное отражение со свойствами $s_1) - s_5)$.

Используя отражение Y, легко продолжить $\Phi : \Omega \to \Delta$ до квазиконформного гомеоморфизма $\Phi : \overline{C} \to \overline{C}$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\infty) = \infty$.

Положим для $z \in L$

$$\Phi(z) := \lim_{\xi \to z} \Phi(\xi), \quad \xi \in \Omega,$$

а при $z \in G$ считаем, что

$$\overline{\Phi(Y(z))}\, \Phi(z) = 1 \tag{8}$$

(черта в левой части последнего равенства — знак комплексного сопряжения).

Обозначим

$$L^*_{1/n} := \left\{ z \colon |\Phi(z)| = 1 - \frac{1}{n} \right\}.$$

Лемма 1. *Для любого полинома* P_n *степени* $\deg P_n \le n$ *имеет место неравенство*

$$\| P_n \|_L \le \| P_n \|_{L^*(1/n)}. \tag{9}$$

Здесь и далее $\| f \|_K = \sup \{ |f(z)| : z \in K \}$. Доказательство неравенства (9) основано на известной лемме Бернштейна – Уолша и оценке расстояния до линии уровня функции Грина области с квазиконформной границей (подробнее см. [13, с. 223]).

3. Интерференция особенностей контура и веса в случае произвольного полинома. Пусть p — положительное действительное число, а P_n — произвольный полином степени $\deg P_n \le n$. Положим

$$M_{n,p} := \left(\iint_G | P_n(z) |^p h(z) \, d\sigma(z) \right)^{1/p}.$$

Поскольку при $P_n = K_n$ из (1) следует, что $M_{n,2} = 1$, то теоремы 1 и 2 являются частными случаями следующей теоремы.

Теорема 3. *В условиях теорем* 1 *и* 2 *при любых* $p > 1$ *и* $n \in N$ *для любого* P_n, $\deg P_n \le n$, *справедлива оценка*

$$\| P_n \|_L \le c_6 n^{\frac{2}{\alpha p}} M_{n,p}, \tag{10}$$

где постоянная $c_6 = c_6(G, h, p)$.

Доказательство. В силу (7) и неравенства Гельдера

$$\forall z \in G: \; |P_n(z)| \le \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{|P_n(\xi)| h^{1/p}(\xi) \left| Y_{\overline{\xi}} \right|}{h^{1/p}(\xi) |Y(\xi) - z|^2} d\sigma(\xi) \le \frac{1}{\pi} M_{n,p} \left(\iint_G \frac{\left| Y_{\overline{\xi}} \right|^q h^{1-q}(\xi)}{|Y(\xi) - z|^{2q}} d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{q}},$$

где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Обозначим $f(\xi, z) := \dfrac{\left| Y_{\overline{\xi}} \right| h(\xi)^{\frac{1-q}{q}}}{|Y(\xi) - z|^2}$. Для доказательства (10) достаточно убедиться в том, что

$$\left(\iint_G f^q(\xi, z) \, d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{q}} \preceq n^{\frac{2}{\alpha p}}$$

при $z \in L^*_{1/n}$. Заметим, кроме того, что в (10) можно считать показатель степени $n \ge 2$ (или даже $n \ge n_0$, где n_0 — фиксированное число). Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$\forall n \ge 2: \quad L^*_{1/n} \subset G \,|\, \overline{D(0, \varepsilon)}.$$

Тогда согласно неравенству Минковского

$$\left(\iint_G f^q(\xi, z) \, d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\iint_{D(0,\varepsilon)} f^q(\xi, z) \, d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\iint_{G \setminus D(0,\varepsilon)} f^q(\xi, z) \, d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{q}} := I_1 + I_2.$$

Оценим I_1. Согласно свойству s_4) в $D(0,\varepsilon)$ $\left|Y_{\bar\xi}\right| \asymp |\dot{Y}(\xi)|^2$. При $z \in L^*_{1/n}$ и $\xi \in D(0,\varepsilon)$

$$|Y(\xi)-z| = |Y(\xi)|\left|1-\frac{z}{Y(\xi)}\right| \asymp |Y(\xi)| \succeq 1.$$

Наконец, в силу (2) и (3) $h^{-1}(\xi) \preceq 1$ в $D(0,\varepsilon)$. Следовательно, $I_1 \preceq 1$.

Перейдем к оценке I_2. Пусть $\Im_{Y(\xi)}$ — якобиан отражения Y, вычисленный в точке ξ. В силу свойства s_3)

$$\forall\, \xi_1, \xi \in (G \,|\, D(0,\varepsilon)) \cup Y(G \,|\, D(0,\varepsilon)):$$
$$\Im_{Y(\xi)} \preceq 1 \quad \text{и} \quad \Im_{Y(\xi_1)} \preceq 1.$$

Пусть $\xi_1 = Y(\xi)$, тогда в силу свойства s_2)

$$\Im_{Y(\xi)}\, \Im_{Y(\xi_1)} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\Im_{Y(\xi)}} = \Im_{Y(\xi_1)} \le 1.$$

Следовательно, при $\xi \in G \,|\, D(0,\varepsilon)$

$$\Im_{Y(\xi)} \asymp 1 \quad \text{и} \quad Y_{\bar\xi} \asymp 1$$

(последнее вытекает непосредственно из свойства s_3).

Таким образом, после замены переменных получаем

$$I_2 \asymp \left(\iint\limits_{G\setminus D(0,\varepsilon)} \frac{\Im_{Y(\xi)}\, h^{1-q}(\xi)}{|Y(\xi)-z|^{2q}}\, d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\iint\limits_{Y(G\setminus D(0,\varepsilon))} \frac{h^{1-q}(Y(\xi))}{|\xi-z|^{2q}}\, d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (11)$$

Далее для простоты ограничимся случаями: $m = 0$ — весовая функция не имеет особых точек и $m = 1$ — одна особая точка $z_1 \in L$. При $m = 1$ считаем $\gamma := \gamma_1$ и $\beta := \beta_1$.

При $m = 0$ из (3) получаем

$$h(Y(\xi)) = h_0(Y(\xi)) \ge c_0 \quad \text{и} \quad h^{1-q}(Y(\xi)) \le c_0^{1-q} \preceq 1.$$

Следовательно, при $m = 0$

$$I_2 \preceq \left(\iint\limits_{Y(G\setminus D(0,\varepsilon))} \frac{d\sigma(\xi)}{|\xi-z|^{2q}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Оценим расстояние между точками $z \in L^*_{1/n}$ и $\xi \in Y(G\setminus D(0,\varepsilon))$.

При $m = 0$ $\Phi \,|\, \Omega \in \operatorname{Lip}\alpha$ и из условий s_1) и s_3) следует, что вне $D(0,\varepsilon)$ модуль непрерывности функции $\Phi(z)$, продолженной по формуле (8), может возрасти не более чем в конечное число раз. Следовательно, и после продолжения $\Phi(z) \in \operatorname{Lip}\alpha$.

Пусть $z \in L^*_{1/n}$ и $\xi \in Y(G\setminus D(0,\varepsilon))$, тогда

$$\frac{1}{n} \le |\Phi(\xi)| - |\Phi(z)| \le |\Phi(\xi) - \Phi(z)| \preceq |\xi - z|^{\alpha}. \quad (12)$$

Следовательно, $|\xi - z| \succeq n^{-1/\alpha}$ и

$$I_2 \preceq \left(\iint\limits_{|\xi - z| \geq n^{-1/\alpha}} \frac{d\sigma(\xi)}{|\xi - z|^{2q}} \right)^{\frac{1}{q}} \preceq n^{\frac{2}{\alpha p}}. \tag{13}$$

Таким образом, при $m = 0$ из последнего неравенства и неравенства $I_1 \preceq 1$ следует (10).

Пусть $m = 1$ — на L имеется точка z_1, в которой выполняется условие интерференции (6). (Заметим, что по условию теоремы $\beta \leq \alpha$ и, следовательно, $\gamma \leq 0$.) Используя условие s_3), (2), (3) и (11), получаем

$$I_2 \preceq \left(\iint\limits_{Y(G \setminus D(0,\varepsilon))} \frac{d\sigma(\xi)}{|Y(\xi) - z_1|^{\gamma(q-1)} |\xi - z|^{2q}} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp \left(\iint\limits_{Y(G \setminus D(0,\varepsilon))} \frac{|\xi - z_1|^{\gamma(1-q)} d\sigma(\xi)}{|\xi - z|^{2q}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Отметим, что $\gamma(1-q) \geq 0$, так как $\gamma \leq 0$ и $q > 1$.

Последний интеграл, стоящий в скобках, обозначим через $\tilde{I}_2$ и оценим его при различных расположениях z и z_1. Для этого зафиксируем $\delta > 0$ и введем в рассмотрение множества

$$E_1 := \overline{Y(G \,|\, D(0, \varepsilon))} \cap \overline{D(z_1, \delta)}, \qquad E_2 := Y(G \,|\, D(0, \varepsilon)) \cap \Delta(z_1, \delta),$$
$$E_{11} := \{\xi \in E_1 \colon |\xi - z_1| \geq |\xi - z|\}, \qquad E_{12} := \{\xi \in E_1 \colon |\xi - z_1| < |\xi - z|\}.$$

Используя введенные множества, представим интеграл $\tilde{I}_2$ в виде

$$\tilde{I}_2 = \left(\iint\limits_{E_1} + \iint\limits_{E_2} \right) \frac{|\xi - z_1|^{\gamma(1-q)}}{|\xi - z|^{2q}} d\sigma(\xi) := I_{21} + I_{22}.$$

Оценим I_{22}. Пусть $R := \max\{|\xi| \colon \xi \in Y(G \,|\, D(0, \varepsilon))\}$, $r := \max\{|\xi| \colon z \in L\}$. При $z_1 \in L$ и $\xi \in E_2$, учитывая, что $\gamma(1-q) \geq 0$, получаем

$$(\delta)^{\gamma(1-q)} \leq |\xi - z_1|^{\gamma(1-q)} \leq (|\xi| + |z_1|)^{\gamma(1-q)} \leq (R + r)^{\gamma(1-q)}.$$

Следовательно,

$$I_{22} \preceq \iint\limits_{E_2} |\xi - z|^{-2q} d\sigma(\xi).$$

Если $z \in D(z_1, \delta/2)$, то при $\xi \in E_2$ и $|z - \xi| \geq \delta/2$

$$\iint\limits_{E_2} |\xi - z|^{-2q} d\sigma(\xi) \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^{2q} \sigma(E_2). \tag{14}$$

Пусть $z \in \Delta(z_1, \delta/2)$. Согласно условию теоремы 2 $G \in Q_{\alpha,\beta}$, и в силу п. i) определения 2, используя условие s_3), видим, что вне $D(0, \varepsilon) \cup D(z_1, \delta/2)$ продолженная по формуле (8) функция $\Phi \in \operatorname{Lip} \alpha$. Рассуждая, как при доказательстве порядковых неравенств (12), (13), при $z \in \Delta(z_1, \delta/2)$ получаем неравенство $I_{22} \preceq n^{\frac{2q}{\alpha p}}$. Отсюда и из (14) при любом z $I_{22} \preceq n^{\frac{2q}{\alpha p}}$.

Оценим I_{21}:

$$I_{21} = \left(\iint\limits_{E_{11}} + \iint\limits_{E_{12}} \right) \frac{|\xi - z_1|^{\gamma(1-q)}}{|\xi - z|^{2q}} d\sigma(\xi) := I_{211} + I_{212}.$$

На E_{12} $|\xi - z_1| \le |\xi - z|$. Следовательно, учитывая, что $\gamma(1-q) \ge 0$, получаем

$$I_{212} \le \iint\limits_{E_{12}} |\xi - z|^{\gamma(1-q)-2q} d\sigma(\xi).$$

Так как $\alpha \ge \beta$, то $\Phi \in \operatorname{Lip}\beta$ вне $D(0, \varepsilon)$ и аналогично (12) при $z \in L^*_{1/n}$ и $\xi \in E_{12}$

$$|\xi - z| \succeq n^{-\frac{1}{\beta}}. \tag{15}$$

Следовательно,

$$I_{212} \preceq \iint\limits_{|\xi - z| \ge n^{-\frac{1}{\beta}}} |\xi - z|^{\gamma(1-q)-2q} d\sigma(\xi) \preceq n^{\frac{(2+\gamma)(q-1)}{\beta}}.$$

Используя условие интерференции $\dfrac{2}{\alpha} = \dfrac{2+\gamma}{\beta}$ и сопряженность p и q, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, имеем $I_{212} \preceq n^{\frac{2q}{\alpha p}}$.

Осталось показать, что

$$I_{211} := \iint\limits_{E_{11}} \frac{|\xi - z_1|^{\gamma(1-q)}}{|\xi - z|^{2q}} d\sigma(\xi) \preceq n^{\frac{2q}{\alpha p}}.$$

Для этого рассмотрим взаимное расположение точек z_1, z и $\xi \in E_{11}$.

Пусть

$$d_n := \min\left\{|z_1 - \tau| : \tau \in L^*_{1/n}\right\},$$
$$r_n := \min\left\{|z_1 - \xi| : \xi \in E_{11}\right\}, \tag{16}$$
$$\gamma_n := \min\left\{|z - \xi| : \xi \in E_{11}\right\}.$$

Легко видеть, что $2r_n \ge d_n$.

В самом деле, пусть $r_n = |z_1 - \xi_1|$, $\xi_1 \in E_{11}$, тогда

$$d_n \le |z - z_1| \le |z - \xi_1| + |\xi_1 - z_1| \le 2|\xi_1 - z_1| = 2\, r_n,$$

так как по определению $E_{11}: |z - \xi_1| \le |z_1 - \xi_1|$.

Отсюда в полном соответствии с рассуждениями, проведенными при оценках (12) и (15), получаем

$$r_n \succeq n^{-\frac{1}{\beta}}. \tag{17}$$

Рассмотрим два вспомогательных множества A и B:

$$A := \{\xi : |\xi - z| \ge |z_1 - z|\}, \quad B := \{\xi : |\xi - z| \le |z_1 - z|\}.$$

Пусть $\xi \in E_{11} \cap A$, тогда

$$|\xi - z| \le |z_1 - \xi| \le |z_1 - z| + |z - \xi| \le 2|\xi - z|.$$

Следовательно, на $E_{11} \cap A$

$$1 \le \frac{|z_1-\xi|}{|\xi-z|} \le 2. \tag{18}$$

На множестве $E_{11}\cap B$

$$|\xi-z_1| \le |z_1-z|+|\xi-z| \le 2|z_1-z|$$

и, учитывая, что $\gamma(1-q)\ge 0$, имеем

$$|\xi-z_1|^{\gamma(1-q)} \le 2^{\gamma(1-q)}|z_1-z|^{\gamma(1-q)}. \tag{19}$$

Перейдем к оценке интеграла I_{211}. Используя неравенства (17) – (19) и обозначения (16), получаем

$$I_{211} \le \left(\iint\limits_{E_{11}\cap A} + \iint\limits_{E_{11}\cap B}\right)\frac{|\xi-z_1|^{\gamma(1-q)}}{|\xi-z|^{2q}}d\sigma(\xi) \le$$

$$\le 2^{2q}\iint\limits_{E_{11}\cap A}|\xi-z_1|^{\gamma(1-q)-2q}d\sigma(\xi) + 2^{\gamma(1-q)}|z_1-z|^{\gamma(1-q)}\iint\limits_{E_{11}\cap B}\frac{d\sigma(\xi)}{|\xi-z|^{2q}} \preceq$$

$$\preceq \iint\limits_{|\xi-z_1|\ge r_n}|\xi-z_1|^{\gamma(1-q)-2q}d\sigma(\xi) + |z_1-z|^{\gamma(1-q)}\iint\limits_{|\xi-z|\ge\gamma_n}\frac{d\sigma(\xi)}{|\xi-z|^{2q}} \preceq$$

$$\preceq n^{\frac{(2+\gamma)(q-1)}{\beta}} + |z_1-z|^{\gamma(1-q)}(\gamma_n)^{-2q+2} = n^{\frac{2q}{\alpha p}} + \left(|z_1-z|^{-\frac{\gamma}{p}}\gamma_n^{-\frac{2}{p}}\right)^q.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать неравенство

$$|z_1-z|^{-\frac{\gamma}{p}}\gamma_n^{-\frac{2}{p}} \preceq n^{\frac{2}{\alpha p}}$$

или эквивалентное ему неравенство

$$|z_1-z|^{-\frac{\gamma}{2}}\gamma_n^{-1} \preceq n^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{20}$$

Используем п. ii) определения 2. Будем считать, что постоянная δ, зафиксированная при определении множеств $E_1, E_2, \ldots$, совпадает с $\delta_1^*/2$ из п. ii), так что в $\Omega(z_1, 2\delta)$ выполняются соотношения (4) и (5). Тогда для продолженной с помощью отражения Y функции Φ в $D(z_1, 2\delta)$ по-прежнему имеют место (4) и (5) с некоторой постоянной $\tilde t_1$, возможно отличной от t_1. При оценке $(\gamma_n)^{-1}|z_1-z|^{-\gamma/2}$ достаточно рассматривать случай $z\in D(z_1,2\delta)$, иначе $\gamma_n\ge\delta$ и

$$(\gamma_n)^{-1}|z-z_1|^{-\gamma/2} \le \delta^{-1}(\operatorname{diam} G)^{-\gamma/2}.$$

Пусть $\xi_1\in E_{11}$ и $|z-\xi_1|=\gamma_n$, тогда

$$\frac{1}{n} \le |\Phi(z)-\Phi(\xi_1)| \le \tilde t_1\gamma_n^{\alpha}\max\left(|\xi_1-z_1|^{\beta-\alpha};\, |z-z_1|^{\beta-\alpha}\right).$$

Следовательно,

$$(\gamma_n)^{-1} \preceq n^{1/\alpha}\max\left(|\xi_1-z_1|^{\beta/\alpha-1};\, |z-z_1|^{\beta/\alpha-1}\right).$$

По (6) $\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{\beta}{\alpha}-1$ и, значит,

$$\frac{(\gamma_n)^{-1}}{|z_1 - z|^{\gamma/2}} \le n^{\alpha} \max\left(\left|\frac{z_1 - z}{\xi_1 - z_1}\right|^{-\gamma/2}; 1\right). \tag{21}$$

Заметим, что при $\xi_1 \in E_{11}$

$$|z_1 - z| \le |z - \xi_1| + |z_1 - \xi_1| \le 2|\xi_1 - z_1|.$$

А так как $\gamma \le 0$, то

$$\left|\frac{z_1 - z}{\xi_1 - z_1}\right|^{-\gamma/2} \le 2^{-\gamma/2}.$$

Из (21) получаем

$$\frac{(\gamma_n)^{-1}}{|z_1 - z|^{\gamma/2}} \preceq n^{\alpha} \max\left(2^{-\gamma/2}; 1\right) = n^{\alpha} 2^{-\gamma/2} \preceq n^{\alpha}.$$

Неравенство (20), а значит, и теорема доказаны.

1. *Carleman T.* Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen // Ark. mat., astron. och fys. – 1922-1923. – **17**, № 9. – P. 1 – 30.
2. *Faber G.* Über polynomische Entwicklungen // Math. Ann. – 1903. – **57**. – S. 389 – 408.
3. *Szegö G.* Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören // Mat. Z. – 1921. – **9**. – S. 218 – 270.
4. *Суетин П. К.* Основные свойства многочленов, ортогональных по контуру // Успехи мат. наук. – 1996. – **21**, вып 2 (128). – С. 41 – 88.
5. *Суетин П. К.* Некоторые оценки ортогональных по контуру многочленов при особенностях веса и контура // Сиб. мат. журн. – 1967. – **8**, № 5. – С. 1070 – 1078.
6. *Кузьмина А. Л.* Асимптотическое представление многочленов, ортогональных по кусочно-аналитической кривой // Функцион. анализ и теория функций. – 1963. – **1**. – С. 42 – 50.
7. *Fauth G.* Über die Approximation analytischer Funktionen durch Teilsummen ihrer Szegö-Entwickling // Mutt. Math. Semin. Giessen. – 1966. – № 67. – P. 1 – 83.
8. *Абдуллаев Ф. Г.* Об ортогональных полиномах с разрывными весами // Изв. Ан АзССР. Сер. ФМТ. – 1985. – № 2. – С. 3 – 7.
9. *Abdullayev F. G.* Uniform convergence of the generalized Bieberbach polinomials in regions with non-zero angels // Acta Math. hung. – 1997. – **77** (**3**). – P. 223 – 246.
10. *Абдуллаев Ф. Г., Андриевский В. В.* Об ортогональных полиномах в областях с квазиконформной границей // Изв. Ан АзССР. Сер. ФМТ. – 1983. – № 1. – С. 7 – 11.
11. *Суетин П. К.* Многочлены, ортогональные по площади, и многочлены Бибербаха // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1971. – **100**. – 92 с.
12. *Andrievskii V. V., Belyi V. I., Dzyadyk V. K.* Conformal invariants in constructive theory of functions of complex variable. – Atlanta: World Federation Publ. Comp., 1995. – 200 p.
13. *Andrievskii V. V., Blatt H. P.* Zeros of polynomials in the complex plane. – Eichstätt: Katholische Univ. Eichstätt, 1997. – 238 p.

Получено 07.06.99