УДК 517.9

О. Н. Комаренко, В. А. Троценко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТРАНСМІСІЇ З ГОЛОВНОЮ УМОВОЮ СПРЯЖЕННЯ

The existence of a solution of a variational minimax problem that is equaivalent to the transmission problem is proved. We also suggest an algorithm for the construction of approximate solutions and prove their convergence.

Для варіаційної задачі на мінімакс, яка еквівалентна задачі трансмісії, доведено існування розв'язку. Запропоновано алгоритм побудови наближених розв'язків та доведено його збіжність.

Починаючи з 60-х років, задачі трансмісії (або крайові задачі з розривними коефіцієнтами) вивчалися в багатьох роботах (див. [1 – 7]). В роботі [1] доводиться існування класичних розв'язків задачі трансмісії для рівнянь другого порядку. Задачі трансмісії для еліптичних рівнянь вищих порядків і систем рівнянь розглядались в [2 – 5]. Для них були встановлені теореми про повний набір гомеоморфізмів.

В даній роботі розробляється варіаційний метод розв'язання задач трансмісії, в яких серед умов спряження є головна умова. Досліджується еквівалентна варіаційна задача на мінімакс для функціонала, що одержується з допомогою множника Лагранжа і для якого головна умова є натуральною. Запропонований алгоритм побудови наближених розв'язків також можна застосувати до крайових задач в складних областях шляхом розбиття їх на прості підобласті, для яких знаходження координатних функцій не викликає труднощів.

В заключній частині роботи наведено приклад застосування розробленого алгоритму до однієї задачі на власні значення.

1. Постановка задачі і основні відомості. Нехай $Q \subset R^n$ — обмежена область, S — її межа. Поверхня γ розділяє Q на дві підобласті: Q_1 і Q_2, $\partial Q_k = S_k \cup \bar{\gamma}$, $k = 1, 2$. Вважаємо поверхні S, γ і ∂Q_k кусково-гладкими і ліпшицевими. Позначимо через Γ_0 множину особливих точок на $S \cup \gamma$ (точок, в яких поверхні не будуть гладкими) і нехай $\Gamma = \Gamma_0 \cup (S \cap \bar{\gamma})$.

Розглянемо наступну задачу трансмісії:

$$L_k u_k(x) := -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^k(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) + b_k(x)u_k = f_k(x), \quad x \in Q_k; \quad k = 1, 2, \tag{1}$$

$$B_k u_k(x) = \varphi_k(x), \quad x \in S_k; \quad k = 1, 2, \tag{2}$$

$$[u] := u_1(x) - u_2(x) = \psi_1(x), \quad x \in \gamma, \tag{3}$$

$$[Bu] := B_1 u_1(x) - B_2 u_2(x) = \psi_2(x), \quad x \in \gamma, \tag{4}$$

де $L_k u_k$ — формально самоспряжені, еліптичні вирази з дійсними, гладкими коефіцієнтами, визначеними в $\overline{Q}_k$; $a_{ij}^k = a_{ji}^k$; $b_k(x) > 0$, $x \in Q_k$; $B_k u_k(x) := N_k u_k(x) + \alpha_k(x) u_k(x)$; $x \in \partial Q_k \setminus \Gamma$; $k = 1, 2$, $N_k u_k(x) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \times \cos(\bar{\nu}, x_i)$ — похідна за конормаллю; $\bar{\nu}$ — орт зовнішньої нормалі до $\partial Q_k \setminus \Gamma$; $\alpha_k(x)$ — гладкі функції на $\partial Q_k \setminus \Gamma$, $\alpha_k(x) \geq 0$, $k = 1, 2$.

За допомогою інтегрування за частинами одержимо формулу Гріна

$$(L_k u_k, v_k)_{Q_k} = -\langle B_k u_k, v_k \rangle_{\partial Q_k} + [u_k, v_k]_k; \quad u_k, v_k \in C^\infty(\overline{Q}_k); \quad k = 1, 2. \tag{5}$$

Тут і нижче $(\cdot,\cdot)_{Q_k}$, $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\partial Q_k}$, $\langle \cdot,\cdot \rangle_\gamma$ — скалярні добутки (або їх подовження) відповідно в $L_2(Q_k)$, $L_2(\partial Q_k)$ і $L_2(\gamma)$, $[\cdot,\cdot]_k$ — симетрична білінійна форма

$$[u_k, v_k]_k = \int\limits_{Q_k} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + b_k u_k v_k \right) dx + \int\limits_{S_k \cup \gamma} \alpha_k u_k v_k \, dS. \tag{6}$$

Внаслідок умов, накладених вище на коефіцієнти рівнянь (1) – (4), форми $[u_k, u_k]_k$, $k = 1, 2$, будуть додатно означеними відповідно на $W_2^1(Q_k)$, а саме

$$[u_k, u_k]_k \geq \delta_k \| u_k, Q_k \|_1, \quad \delta_k > 0; \quad k = 1, 2. \tag{7}$$

Далі будемо використовувати такі простори функцій: простори Соболєва $W_2^1(Q)$, $W_2^1(Q_k)$, $k = 1, 2$; простори $W_2^{-1}(Q_k)$, спряжені до $W_2^1(Q_k)$ відносно $(\cdot, \cdot)_{Q_k}$; простори Соболєва – Слободецкого $W_2^{1/2}(\partial Q_k \setminus \Gamma)$ і $W_2^{1/2}(\gamma)$ функцій, визначених відповідно на многовидах $\partial Q_k \setminus \Gamma$ і γ, і простори $W_2^{-1/2}(\partial Q_k \setminus \Gamma)$, $W_2^{-1/2}(\gamma)$, спряжені відповідно до цих просторів відносно скалярних добутків $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial Q_k \setminus \Gamma}$ і $\langle \cdot, \cdot \rangle_\gamma$. Позначимо через $\| \cdot, Q_k \|_S$ норму в $W_2^s(Q_k)$, а через $\langle\langle \cdot, \partial Q_k \setminus \Gamma \rangle\rangle_S$ норму в $W_2^s(\partial Q_k \setminus \Gamma)$. Введемо функціональні простори для розв'язків відповідно задачі трансмісії (1) – (4) і варіаційної задачі на мінімакс

$$H^1 := W_2^1(Q_1) \times W_2^1(Q_2); \quad \mathcal{R} := H^1 \times W_2^{-1/2}(\gamma)$$

і простір для правих частин

$$\mathcal{K}^1 := \prod_{i=1}^{2} W_2^{-1}(Q_i) \times \prod_{i=1}^{2} W_2^{-1/2}(S_i) \times W_2^{1/2}(\gamma) \times W_2^{-1/2}(\gamma).$$

Задача трансмісії з однорідною умовою спряження (3) $(\psi_1 = 0)$ допускає варіаційне формулювання. Еквівалентною їй буде варіаційна задача знаходження функції $v_0 \in W_2^1(Q)$, на якій досягається мінімум функціонала

$$\Phi_0(v) := [v, v] - 2(f_0, v), \quad v \in W_2^1(Q), \tag{8}$$

де $[v, v] = [v_1, v_1]_1 + [v_2, v_2]_2$, $v_k = v|_{Q_k}$; $k = 1, 2$, $[v_k, v_k]_k$ — додатно означена форма (6), $f_0 \in (W_2^1(Q))^*$, $(W_2^1(Q))^*$ — простір, спряжений до $W_2^1(Q)$ (простір лінійних, неперервних функціоналів, визначених на $W_2^1(Q)$), (f_0, v) — значення функціонала f_0 на функції v. Ця варіаційна задача має єдиний розв'язок $v_0 \in W_2^1(Q)$ $\forall f_0 \in (W_2^1(Q))^*$ [6], який називається узагальненим розв'язком задачі трансмісії (1) – (4) при $\psi_1 = 0$. Для нього виконується співвідношення

$$[v_0, v] = (f_0, v) \quad \forall v \in W_2^1(Q).$$

Задача (1) – (4) з неоднорідними умовами зводиться до задачі з однорідною умовою (3) $(\psi_1 = 0)$ введенням нової змінної $v = u - g$, де $g = (g_1, g_2)$ $(g_k \in W_2^1(Q_k)$; $k = 1, 2$; $g_1|_\gamma - g_2|_\gamma = \psi_1)$. Позначимо праву частину задачі (1) – (4) через $F = F(f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$, або скорочено $F(f, \varphi, \psi)$.

Нижче також використовуються розв'язки наступних крайових задач в кожній з підобластей Q_i, $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} L_i u_i(x) &= f_i(x), \quad x \in Q_i, \\ B_i u_i(x) &= \varphi_i(x), \quad x \in S_i, \\ B_i u_i(x) &= \eta_i(x), \quad x \in \gamma, \end{aligned} \tag{9}$$

де L_i і B_i, $i = 1, 2$, — оператори задачі (1) -- (4). Праві частини $F_i = F_i(f_i, \varphi_i, \psi_i)$ для цих задач вибираються із таких просторів:

$$\mathcal{K}_i^1 := W_2^{-1}(Q_i) \times W_2^{-1/2}(S_i) \times W_2^{-1/2}(\gamma), \quad i = 1, 2.$$

Розв'язком задачі (9) називається функція $u_i \in W_2^1(Q_i)$, для якої виконуються співвідношення

$$[u_i, v_i]_i = (f_i, v_i)_{Q_i} + (\varphi_i, v_i)_{S_i} + (\eta_i, v_i)_\gamma \quad \forall v_i \in W_2^1(Q_i). \tag{10}$$

Задача (9) має розв'язок для кожної правої частини $F_i \in \mathcal{K}_i^1$. Внаслідок (7) цей розв'язок єдиний.

Введемо оператор C_i, який правій частині $F_i(f_i, \varphi_i, \eta_i) \in \mathcal{K}_i^1$ ставить у відповідність розв'язок задачі (9) $u_i \in W_2^1(Q)$, $C_i F_i = u_i$ і нехай $T_i \eta_i = C_i(0, 0, \eta_i)$, $\eta_i \in W_2^{-1/2}(\gamma)$, $i = 1, 2$.

Далі будемо позначати через $u^{(2)} = (u_1^{(2)}, u_2^{(2)})$ розв'язок задачі (1) – (4) для правої частини вигляду $F(0, 0, 0, 0, \psi_1, 0)$, $\psi_1 \neq 0$. Для цього розв'язку буде $B_1 u_1^{(2)}\big|_\gamma = -B_2 u_2^{(2)}\big|_\gamma = f'$, $f' \in W_2^{-1/2}(\gamma)$ і $u_1^{(2)} = T_1 f'$; $u_2^{(2)} = T_2(-f')$. Позначимо також $\mu_0 = B_2 \overline{u}_2^{(1)}\big|_\gamma$, де $\overline{u}^{(1)} = (\overline{u}_1^{(1)}, \overline{u}_2^{(1)})$ — розв'язок задачі (1) – (4) для правої частини вигляду $F(f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2, 0, \psi_2)$, в якій компонента $\psi_1 = 0$, а всі інші не дорівнюють одночасно нулю.

Для побудови наближених розв'язків задачі трансмісії (1) – (4) можна звести її до варіаційної задачі (8) і застосувати метод Рітца. Проте в багатьох випадках виникають труднощі при виборі відповідної системи координатних функцій, визначених в $Q = Q_1 \cup Q_2$, наприклад, у випадках областей, які мають складну конфігурацію, але розбиваються на більш прості підобласті, для яких можна легко вибрати потрібні системи координатних функцій.

Нижче розробляється такий алгоритм побудови наближених розв'язків, за яким ці розв'язки визначаються в кожній із підобластей Q_i з допомогою своєї системи координатних функцій, які можна вибирати в цих підобластях незалежно одна від другої, що в багатьох практично важливих випадках не викликає труднощів і дає можливість ефективно будувати розв'язки.

2. Варіаційна задача на мінімакс. Нижче розглядається варіаційна задача на мінімакс, яка еквівалентна задачі трансмісії (1) – (4) і функціонал якої визначається на класі функцій, розривних на γ. Цей функціонал має вигляд

$$\Phi(u, \mu) = [u, u] + 2\langle \mu, u_1 - u_2 - \psi_1 \rangle_\gamma - 2(u, F)', \tag{11}$$

де $u = (u_1; u_2)$ $(u_k \in W_2^1(Q_k);\ k = 1, 2)$, $[u, u] = [u_1, u_1]_1 + [u_2, u_2]_2$, $[u_k, u_k]_k$ — квадратичні форми, визначені вище,

$$\mu \in W_2^{-1/2}(\gamma), \quad F = F(f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2), \quad F \in \mathcal{K}^1,$$

$$(u, F)' = \sum_{k=1}^{2} \left((u_k, f_k)_{Q_k} + \langle u_k, \varphi_k \rangle_{S_k} \right) + \langle u_1, \psi_2 \rangle_\gamma.$$

Функціонал $\Phi(u, \mu)$ — опукло-вгнутий на просторі $\mathcal{R}$ [8].

Елемент $(\overline{u}, \overline{\mu}) \in \mathcal{R}$ називається сідловою точкою функціонала $\Phi(u, \mu)$, якщо виконується нерівність

$$\Phi(\overline{u}, \mu) \le \Phi(\overline{u}, \overline{\mu}) \le \Phi(u, \overline{\mu}) \quad \forall (u, \mu) \in \mathcal{R}.$$

Необхідною і достатньою умовою існування сідлової точки є співвідношення

$$\max_{\mu \in W_2^{-1/2}(\gamma)} \inf_{u \in H^1} \Phi = \min_{u \in H^1} \sup_{\mu \in W_2^{-1/2}(\gamma)} \Phi(u, \mu),$$

де максимум досягається на $\mu = \overline{\mu}$, а мінімум — на $u = \overline{u}$ [8].

Теорема 1. *Функціонал* $\Phi(u,\mu)$ $(\forall F(f,\varphi,\psi)\in\mathcal{K}^1)$ *має сідлову точку* $(\overline{u},\overline{\mu})\in\mathcal{R}$, *перша компонента якої* $u=(\overline{u}_1,\overline{u}_2)\in H^1$ *буде узагальненим розв'язком задачі трансмісії* (1) – (4), а $\overline{\mu}=B_2\overline{u}_2^{(1)}\big|_\gamma-f'$.

Доведення. Визначимо спочатку $I_1=\min\limits_u\sup\limits_\mu\Phi(u,\mu)$. Позначимо через D_1 множину функцій із H^1:

$$D_1:=\{u=(u_1;u_2),\quad u_i\in W_2^1(Q_i)\ (i=1,2),\quad u_1|_\gamma-u_2|_\gamma=\psi_1\}.$$

Очевидно,

$$\sup_{\mu\in B_2^{-1/2}(\gamma)}\Phi(u,\mu)=\begin{cases}\Phi_0(u), & u\in D_1;\\ +\infty, & u\notin D_1,\end{cases}$$

де $\Phi_0(u)=[u,u]-2(u,F)'$.

Таким чином,

$$I_1=\min_{u\in D_1}\Phi_0(u).\tag{12}$$

Запишемо довільну функцію $u\in D_1$ у вигляді $u=u^{(1)}+u^{(2)}$, де $u^{(2)}$ — розв'язок задачі (1) – (4) для правої частини вигляду $F(0,0,0,0,\psi_1,0)$. Перша функція $u^{(1)}=(u_1^{(1)},u_2^{(1)})$ не має розриву на γ, для неї $u_1^{(1)}\big|_\gamma=u_2^{(1)}\big|_\gamma$. Множина всіх таких функцій із H^1 співпадає з простором Соболева $W_2^1(Q)$.

Підставимо $u=u^{(1)}+u^{(2)}$ у функціонал $\Phi_0(u)$, і, врахувавши, що $[u^{(1)},u^{(2)}]=0$, одержимо

$$\Phi_0(u^{(1)}+u^{(2)})=\Phi_0(u^{(1)})+\Phi_0(u^{(2)}).\tag{13}$$

Таким чином, знаходження I_1 зводиться до мінімізації функціонала $\Phi_0(u^{(1)})$ на множині всіх функцій $u^{(1)}\in W_2^1(Q)$. Цей функціонал з додатно означеною формою $[u^{(1)},u^{(1)}]$ можна записати у вигляді

$$\Phi_0(u^{(1)})=\left\|u^{(1)}-\overline{u}^{(1)}\right\|^2-\left\|\overline{u}^{(1)}\right\|^2,\tag{14}$$

де $\|\cdot\|^2=[\cdot,\cdot]$, а функція $\overline{u}^{(1)}=(\overline{u}_1^{(1)},\overline{u}_2^{(1)})\in W_2^1(Q)$ — узагальнений розв'язок задачі (1) – (4) з правою частиною $F(f,\varphi,0,\psi_2)$ $(\psi_1=0)$.

Використовуючи формулу Гріна (5), яка буде справедливою для розв'язку $u_k\in W_2^1(Q_k)$ задачі (9) $(u_k=C_kF_k,\ F_k\in\mathcal{K}_k^1)$ і для довільного $v_k\in W_2^1(Q_k)$, виразимо $(u^{(2)},F)'$ через ψ_1 і $\overline{u}^{(1)}$:

$$(u^{(2)},F)'=\left[u_1^{(2)},\ C_1(f_1,\ \varphi_1,\ \psi_2-\mu_0)\right]_1+\left[u_2^{(2)},\ C_2(f_2,\ \varphi_2,\ \mu_0)\right]_2+$$
$$+\left[u_1^{(2)},\ C_1(0,\ 0,\ \mu_0)\right]_1-\left[u_2^{(2)},\ C_2(0,\ 0,\ \mu_0)\right]_2=\left[u_1^{(2)},\ \overline{u}_1^{(1)}\right]_1+\left[u_2^{(2)},\ \overline{u}_2^{(1)}\right]_2+$$
$$+\left\langle u_1^{(2)}-u_2^{(2)},\ \mu_0\right\rangle_\gamma=\left\langle f',\ \overline{u}_1^{(1)}-\overline{u}_2^{(1)}\right\rangle_\gamma+\langle\psi_1,\ \mu_0\rangle_\gamma=\langle\psi_1,\ \mu_0\rangle_\gamma.\tag{15}$$

Із (12) – (15) випливає

$$I_1=-\left\|\overline{u}^{(1)}\right\|^2+\left\|u^{(2)}\right\|^2-2\langle\psi_1,\ \mu_0\rangle_\gamma,$$

і це значення досягається на елементі $\overline{u}=(\overline{u}^{(1)}+u^{(2)})\in H^1$, який є узагальненим розв'язком задачі трансмісії.

Визначимо тепер $I_2 = \max_{\mu} \inf_{u} \Phi$. Запишемо функціонал $\Phi(u, \mu)$ у вигляді

$$\Phi(u, \mu) = \left\| u - u^* \right\|^2 - \left\| u^* \right\|^2 - 2\left[u_1^{(2)}, T_1 \mu \right]_1 + 2\left[u_2^{(2)}, T_2 \mu \right]_2, \tag{16}$$

де $u^* = (u_1^*; u_2^*)$, $u_1^* = \overline{u}_1^{(1)} - T_1(\mu - \mu_0)$, $u_2^* = \overline{u}_2^{(1)} + T_2(\mu - \mu_0)$.

Із (16) випливає

$$M(\mu) := \inf_u \Phi(u, \mu) = -\left\| u^* \right\|^2 - 2\left[u_1^{(2)}, T_1 \mu \right]_1 + 2\left[u_2^{(2)}, T_2 \mu \right]_2$$

і інфімум досягається на $u = u^*$.

Використовуючи формулу Гріна і враховуючи, що $\overline{u}_1^{(1)}\big|_\gamma = \overline{u}_2^{(1)}\big|_\gamma$, одержуємо

$$M(\mu) = -\left\| \overline{u}^{(1)} \right\|^2 + \left\| u^{(2)} \right\|^2 - \left[T_1(\mu - \mu_0 + f') \right]_1^2 - \left[T_2(\mu - \mu_0 + f') \right]_2^2 -$$
$$- 2\left(\left[u_1^{(2)}, T_1 \mu_0 \right]_1 - \left[u_2^{(2)}, T_2 \mu_0 \right]_2 \right).$$

Звідси випливає, що $\max_{\mu} M(\mu) = I_2$ досягається на $\mu = \mu_0 - f'$:

$$I_2 = -\left\| \overline{u}^{(1)} \right\|^2 + \left\| u^{(2)} \right\|^2 - 2\langle \mu_0, \psi_1 \rangle_\gamma.$$

Теорему доведено.

3. Алгоритм побудови наближених розв'язків. Для побудови наближених розв'язків варіаційної задачі на мінімакс для функціонала (11) застосуємо метод Рітца. Виберемо системи координатних функцій $\left\{ w_k^{(1)} \right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{ w_k^{(2)} \right\}_{k=1}^{\infty}$ та $\left\{ \gamma_s \right\}_{s=1}^{\infty}$, які повні відповідно у просторах $W_2^1(Q_1)$, $W_2^1(Q_2)$ та $L_2(\gamma)$.

Наближені розв'язки задачі будемо шукати у вигляді

$$u^{n,m} = \left(u_1^{(n)}; u_2^{(m)} \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{(1)} w_k^{(1)}; \sum_{k=1}^{m} a_k^{(2)} w_k^{(2)} \right),$$
$$\mu^{(p)} = \sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_k, \tag{17}$$

де вектори $\alpha = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_m^{(2)})$ та $c = (c_1, \ldots, c_p)$ є невідомими.

Після підстановки у функціонал $\Phi(u, \mu)$ замість u і μ виразів (17) одержимо функцію Φ_1 від аргументів a і c:

$$\Phi_1(a, c) = (Aa, a)_{R^{n+m}} + 2\sum_{i=1}^{p} c_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{(1)} \left\langle \gamma_i, w_k^{(1)} \right\rangle_\gamma - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{m} a_j^{(2)} \left\langle \gamma_i, w_j^{(2)} \right\rangle_\gamma - \langle \gamma_i, \psi_1 \rangle_\gamma \right) - 2\left(u^{n,m}, F \right)',$$

де $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n+m}$ — матричний оператор в R^{n+m}, елементи якого

$$\alpha_{ij} = \left[w_i^{(1)}, w_j^{(1)} \right]_1, \quad i, j = \overrightarrow{1, n}, \quad \alpha_{n+i, n+j} = \left[w_i^{(2)}, w_j^{(2)} \right]_2, \quad i, j = \overrightarrow{1, m},$$
$$\alpha_{i, n+j} = \alpha_{n+j, i} = 0, \quad i = \overrightarrow{1, n}, \quad j = \overrightarrow{1, m}.$$

Функція $\Phi_1(a, c)$ буде опукло-вгнутою на просторі $R^{n+m} \times R^p$ [9]. Коефіцієнти наближеного розв'язку (17) покладемо рівними компонентам сідлової точки (a_0, c_0) функціонала $\Phi_1(a, c)$ і позначимо цей розв'язок через $\overline{u}_p^{n,m} =$

$= (\,\overline{u}_{1,p}^{\,n,m};\ \overline{u}_{2,p}^{\,n,m}),\ \ \overline{\mu}_p^{\,n,m}$. Оскільки $\Phi_1(a, c)$ — диференційовна функція, то в її сідловій точці повинна задовольнятися наступна система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial a_k^{(1)}} \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)}\alpha_{ik} + \sum_{j=1}^{p} c_j\left\langle \gamma_j, w_k^{(1)}\right\rangle_\gamma -$$
$$- \left(\left(w_k^{(1)}, f_1\right)_{Q_1} + \left\langle w_k^{(1)}, \varphi_1\right\rangle_{S_1} + \left\langle w_k^{(1)}, \psi_2\right\rangle_\gamma\right) = 0, \quad k = \overrightarrow{1, n},$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial a_k^{(2)}} \equiv \sum_{i=1}^{m} a_i^{(2)}\alpha_{n+i,\, n+k} - \sum_{j=1}^{p} c_j\left\langle \gamma_j, w_k^{(2)}\right\rangle_\gamma - \tag{18}$$
$$- \left(\left(w_k^{(2)}, f_2\right)_{Q_2} + \left\langle w_k^{(2)}, \varphi_2\right\rangle_{S_2}\right) = 0, \quad k = \overrightarrow{1, m},$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial c_s} \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)}\left\langle \gamma_s, w_i^{(1)}\right\rangle_\gamma - \sum_{j=1}^{m} a_j^{(2)}\left\langle \gamma_s, w_j^{(2)}\right\rangle_\gamma - \langle \gamma_s, \psi_1\rangle_\gamma = 0, \quad s = \overrightarrow{1, p}.$$

Визначник цієї системи залежить від вибору системи координатних функцій $\left\{w_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{n}$, $\left\{w_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{m}$, $\{\gamma_s\}_{s=1}^{p}$ і невідомо, коли він не дорівнює нулю. Тому розглянемо питання існування сідлових точок для функції $\Phi_1(a, c)$ з позицій теорії сідлових функцій [9]. Далі використовується наступна теорема.

Теорема 2 [9, с. 409]. *Якщо для опукло-вгнутої функції* $G(x, y)$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, *однозначно виконуються дві умови*:

а) *всі функції від* x *вигляду* $f_y(x) = G(x, y)$ (y *фіксується*) *не мають спільних рецесивних напрямків;*

б) *всі функції від* y *вигляду* $g_x(y) = G(x, y)$ *також не мають спільних рецесивних напрямків,*

то функція $G(x, y)$ *має сідлову точку.*

Нехай M_γ — лінійна оболонка, яка натягнута на систему граничних значень на поверхні γ координатних функцій $\left\{w_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{n}$, $\left\{w_i^{(2)}\right\}_{i=1}^{m}$. Запишемо координатні функції γ_i, $i = \overrightarrow{1, p}$, у вигляді $\gamma_i = \gamma_i^{(1)} + \gamma_i^{(2)}$; де $\gamma_i^{(1)}$ — ортогональна проекція γ_i на підпростір M_γ. Позначимо через r максимальне число лінійно незалежних функцій серед проекцій $\gamma_i^{(1)}$, $i = \overrightarrow{1, p}$; $r \le p$.

Лема. *У випадку* $r = p$ *функція* $\Phi_1(a, c)$ *має сідлову точку* (a_0, c_0) *і визначник системи* (18) *не дорівнює нулю, а у випадку* $r < p$ *цей визначник дорівнює нулю.*

Доведення. Функцію $f_c(a) = \Phi_1(a, c)$ можна записати у вигляді

$$f_c(a) = (Aa, a)_{R^{n+m}} + (a, c^{(0)})_{R^{n+m}} + \alpha_0,$$

де $(\cdot,\cdot)_{R^{n+m}}$ — скалярний добуток в R^{n+m}, A — додатний оператор, $c^{(0)} \in R^{n+m}$ і не залежить від a, α_0 — стала.

Рецесивна функція для $f_c(a)$ має такий вигляд [9]:

$$f_c\theta^+(y) = \begin{cases} (y, c^{(0)})_{R^{n+m}} & \forall y \in \{y,\ Ay = 0\}; \\ +\infty & \forall y \notin \{y,\ Ay = 0\}. \end{cases}$$

Звідси видно, що внаслідок додатності оператора A функції $f_c(a)$ ($\forall c \in R^p$) взагалі не мають рецесивних напрямків $y \ne 0$.

Функцію $g_a(c) = \Phi_1(a, c)$ можна зобразити у вигляді

$$g_a(c) = (c, c^*(a))_{R^p} + \alpha_1,$$

де α_1 — стала, $c^*(a) = 2\left(\sum_{k=1}^{n+m} a'_k d_k - d_0\right)$, $a'_k = a_k^{(1)}$, $k = \overrightarrow{1, n}$, $a'_{n+j} = - a_j^{(2)}$, $j = \overrightarrow{1, m}$; d_k — вектори вигляду

$$d_0 = \left(\langle\gamma_1, \psi_1\rangle_\gamma, \ldots, \langle\gamma_p, \psi_1\rangle_\gamma\right),$$

$$d_k = \left(\left\langle\gamma_1, w_k^{(1)}\right\rangle_\gamma, \ldots, \left\langle\gamma_p, w_k^{(1)}\right\rangle_\gamma\right), \quad k = \overrightarrow{1, n},$$

$$d_{n+j} = \left(\left\langle\gamma_1, w_j^{(2)}\right\rangle_\gamma, \ldots, \left\langle\gamma_p, w_j^{(2)}\right\rangle_\gamma\right), \quad j = \overrightarrow{1, m}.$$

Рецесивною функцією для $g_a(c)$ буде функція $g_a\theta^+(y) = \left(y, c^*(a)\right)_{R^p}$, і її рецесивні напрямки визначаються розв'язками нерівності

$$(y, c^*(a))_{R^p} \geq 0. \tag{19}$$

Позначимо через E множину всіх векторів $c_1^*(a) = \sum_{k=1}^{n+m} a_k d_k$. Вона є лінійною оболонкою, що натягнута на вектори $\{d_k\}_{k=1}^{n+m}$. Якщо серед функцій $\left\{\gamma_i^{(1)}\right\}_{i=1}^p$ найбільше число лінійно незалежних функцій дорівнює r, то і серед всіх векторів d_k, $k = \overrightarrow{1, n+m}$, найбільше число лінійно незалежних векторів також буде дорівнювати r. Таким чином, множина E всіх векторів $c_1^*(a)$ є r-вимірним підпростором в R^p і має місце розклад $R^p = E \otimes E^\perp$, де $E^\perp$ — підпростір, ортогональний до E. Із цього розкладу і (19) випливає, що у випадку $r = p$ функції $g_a(c)$ не мають спільних рецесивних напрямків і на підставі наведеної вище теореми функція $\Phi_1(a, c)$ має сідлову точку. Першу частину леми доведено.

У випадку $r < p$ підпростір $E^\perp$ не буде тривіальним і вектори $y \in E^\perp$, для яких $(y, d_0)_{R^p} = 0$, будуть визначати спільні рецесивні напрямки для всіх функцій $g_a(c)$ ($\forall a \in R^{n+m}$). Для цього випадку нижче, при доведенні збіжності наближених розв'язків, буде показано, що визначник системи (18) дорівнює нулю.

Зауваження. Якщо вибрати лінійно незалежні координатні функції $\{\gamma_i\}_{i=1}^p$ серед граничних значень координатних функцій $\left\{w_k^{(1)}\right\}_{k=1}^n$ і $\left\{w_k^{(2)}\right\}_{k=1}^m$ на поверхні γ, то буде виконуватись умова леми: $r = p$ і функція $\Phi_1(a, c)$ буде мати сідлову точку.

4. Збіжність алгоритму. Дослідимо збіжність наближених розв'язків $(\bar{u}_p^{n,m};\ \bar{\mu}_p^{n,m})$ варіаційної задачі на мінімакс для функціонала $\Phi(u, \mu)$. Проортонормуємо системи координатних функцій $\left\{w_k^{(1)}\right\}_{k=1}^\infty$ і $\left\{w_k^{(2)}\right\}_{k=1}^\infty$ відповідно в скалярних добутках $[\cdot,\cdot]_1$, $[\cdot,\cdot]_2$ і залишимо для одержаних функцій попередні позначення. Функція $\Phi_1(a, c)$ у сідловій точці (a_0, c_0) досягає мінімаксу

$$\Phi_1(a_0, c_0) = \max_{c \in R^p} \min_{a \in R^{n+m}} \Phi_1(a, c).$$

Враховуючи ортонормованість функцій $\left\{w_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ і $\left\{w_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty}$, запишемо функцію $\Phi_1(a, c)$ у такому вигляді:

$$\Phi_1(a,c) = \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^{(1)} - \left[u_1^*, w_k^{(1)}\right]_1\right)^2 - \sum_{k=1}^{n}\left[u_1^*, w_k^{(1)}\right]_1^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}\left(a_k^{(2)} - \left[u_2^*, w_k^{(2)}\right]_2\right)^2 - \sum_{k=1}^{m}\left[u_2^*, w_k^{(2)}\right]_2^2 - 2\left\langle \mu^{(p)}, \psi_1\right\rangle_\gamma, \qquad (20)$$

де

$$u_1^*(c) = \overline{u}_1^{(1)} + \delta u_1(c), \qquad u_2^*(c) = \overline{u}_2^{(1)} + \delta u_2(c),$$

$$\overline{u}_1^{(1)} = C_1(f_1, \varphi_1, \psi_2 - \mu_0), \qquad \overline{u}_2^{(1)} = C_2(f_2, \varphi_2, \mu_0),$$

$$\delta u_i(c) = T_i\left((-1)^i(\mu^{(p)} - \mu_0)\right), \qquad i = 1, 2.$$

Позначимо $m(c) := \min\limits_{\alpha \in R^{n+m}} \Phi_1(a, c) \quad \forall c \in R^p$. Із (20) випливає

$$m(c) = -\sum_{k=1}^{n}\left[u_1^*, w_k^{(1)}\right]_1^2 - \sum_{k=1}^{m}\left[u_2^*, w_k^{(2)}\right]_2^2 -$$

$$- 2\left[T_1\mu^{(p)}, T_1 f'\right]_1 + 2\left[T_2\mu^{(p)}, T_2(-f')\right]_2.$$

Мінімакс функції $\Phi_1(a, c)$ дорівнює $\max\limits_{c \in R^p} m(c)$ і досягається при $c = c_0$, що є розв'язком системи рівнянь

$$\frac{\partial m(c)}{\partial c_s} = 0, \qquad s = \overrightarrow{1, p}. \qquad (21)$$

Запишемо систему (21) в разгорнутому вигляді:

$$\sum_{i=1}^{p} c_i\left(\sum_{k=1}^{n}\left[v_i^{(1)}, w_k^{(1)}\right]_1\left[v_s^{(1)}, w_k^{(1)}\right]_1 + \sum_{k=1}^{m}\left[v_i^{(2)}, w_k^{(2)}\right]_2\left[v_s^{(2)}, w_k^{(2)}\right]_2\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\overline{u}_1^{(1)}, w_k^{(1)}\right]_1\left[v_s^{(1)}, w_k^{(1)}\right]_1 - \sum_{k=1}^{m}\left[\overline{u}_2^{(1)}, w_k^{(2)}\right]_2\left[v_s^{(2)}, w_k^{(2)}\right]_2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\left[T_1\mu_0, w_k^{(1)}\right]_1\left[v_s^{(1)}, w_k^{(1)}\right]_1 + \sum_{k=1}^{m}\left[T_2\mu_0, w_k^{(2)}\right]_2\left[v_s^{(2)}, w_k^{(2)}\right]_2 -$$

$$- \langle \gamma_s, \psi_1\rangle_\gamma, \qquad s = \overrightarrow{1, p}, \qquad (22)$$

де $v_s^{(1)} = T_1\gamma_s$, $v_s^{(2)} = T_2\gamma_s$.

Враховуючи, що $\left[v_i^{(1)}, w_k^{(1)}\right]_1 = \left\langle \gamma_i, w_k^{(1)}\right\rangle_\gamma$, $\left[v_i^{(2)}, w_k^{(2)}\right]_2 = \left\langle \gamma_i, w_k^{(2)}\right\rangle_\gamma$, запишемо рівняння (22) у вигляді

$$\sum_{i=1}^{p} c_i\left(d_i^{(1)}, d_s^{(1)}\right)_{R^{n+m}} = \left(F_0, d_s^{(1)}\right)_{R^{n+m}} - \langle \gamma_s, \psi_1\rangle_\gamma, \qquad (23)$$

де через $d_i^{(1)}$ позначені вектори

$$d_i^{(1)} = \left(\left\langle \gamma_i, w_1^{(1)}\right\rangle_\gamma, \ldots, \left\langle \gamma_i, w_n^{(1)}\right\rangle_\gamma, \left\langle \gamma_i, w_i^{(2)}\right\rangle_\gamma, \ldots, \left\langle \gamma_i, w_m^{(2)}\right\rangle_\gamma\right).$$

Неважко бачити, що максимальне число лінійно незалежних серед векторів

$d_s^{(1)}$, $s = \overrightarrow{1, p}$, дорівнює розмірності r лінійної оболонки, натягнутої на множину проекцій всіх функцій γ_s, $s = \overrightarrow{1, p}$, на підпростір M_γ. Звідси випливає, що у випадку $r = p$ визначник системи (23) не дорівнює нулю і існує єдиний розв'язок c_0 цієї системи, а у випадку $r < p$ цей визначник буде дорівнювати нулю. З останнього випливає також, що у випадку $r < p$ і визначник системи (18) дорівнює нулю. Таким чином, доведено другу частину леми.

Доведемо тепер теорему, з якої випливає, що існують послідовності цілих чисел $\{(n_k, m_k, p_k)\}_{k=1}^{\infty}$, що прямують до нескінченності, для яких відповідні послідовності наближених розв'язків збігаються до точного розв'язку в метриці простору $\mathcal{R}$.

Теорема 3. *Нехай системи координатних функцій* $\left\{w_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{w_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ *повні відповідно у просторах* $W_2^1(Q_1)$, $W_2^1(Q_2)$, $L_2(\gamma)$ *і існує така послідовність множин цих функцій*

$$\left\{\left(\left\{w_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{n_i}, \ \left\{w_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{m_i}, \ \left\{\gamma_k\right\}_{k=1}^{p_i}\right)\right\}_{i=1}^{\infty},$$

для кожної з яких відповідна функція $\Phi_1(a, c)$ *має сідлову точку (див. лему) і всі числа* n_i, m_i, p_i *прямують до нескінченності, коли* $i \to \infty$. *Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує таке число* L, *що при довільному* $p_i > L$ *знайдуться такі числа* N_{p_i} *і* M_{p_i}, *для яких при* $n > N_{p_i}$ *і* $m > M_{p_i}$ *буде* $\langle\langle \overline{\mu}_{p_i}^{n,m} - \mu_0 + f', \ \gamma \rangle\rangle_{-1/2} \le \varepsilon$, $\left\| \overline{u}_{k,p_i}^{n,m} - \overline{u}_k, Q_k \right\|_1 \le \varepsilon$, $k = 1, 2$.

Доведення. Враховуючи, що системи координатних функцій $\left\{w_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ і $\left\{w_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ є повними і ортонормованими, запишемо рівняння (22) у вигляді

$$\sum_{k=1}^{p} c_k\left(\left[v_k^{(1)}, v_s^{(1)}\right]_1 + \left[v_k^{(2)}, v_s^{(2)}\right]_2 + \varepsilon_{k,s}^{n,m}\right) =$$

$$= \left[T_1(\mu_0 - f'), v_s^{(1)}\right]_1 + \left[T_2(\mu_0 - f'), v_s^{(2)}\right]_2 + \varepsilon_s^{n,m}, \quad s = \overrightarrow{1, p}, \tag{24}$$

де величини $\varepsilon_{k,s}^{n,m} \to 0$, $\varepsilon_s^{n,m} \to 0$ при $n, m \to \infty$.

Звідси випливає, що розв'язок $\left\{c_{k,p}^{n,m}\right\}_{k=1}^{p}$ системи (24), який визначає сідлову точку функції $\Phi_1(a, c)$, прямує до розв'язку наступної системи рівнянь при n, $m \to \infty$:

$$\sum_{i=1}^{p} c_1\left(\left[v_i^{(1)}, v_s^{(1)}\right]_1 + \left[v_i^{(2)}, v_s^{(2)}\right]_2\right) =$$

$$= \left[T_1(\mu_0 - f'), v_s^{(1)}\right]_1 + \left[T_2(\mu_0 - f'), v_s^{(2)}\right]_2, \quad s = \overrightarrow{1, p}. \tag{25}$$

Внаслідок лінійної незалежності функцій γ_s, $s = \overrightarrow{1, p}$, визначник цієї системи не дорівнює нулю і вона має єдиний розв'язок $\overline{c}_i^{(p)}$, $i = \overrightarrow{1, p}$. Система рівнянь (25) є системою Рітца варіаційної задачі на мінімум для функціонала

$$F_3(u) = \left\| u_1 - \overline{u}_1^* \right\|_1^2 + \left\| u_2 - \overline{u}_2^* \right\|_2^2,$$

де $\overline{u}_1^* = T_1(\mu_0 - f')$, $\overline{u}_2^* = T_2(\mu_0 - f')$.

Звідси випливає, внаслідок повноти в $L_2(\gamma)$ системи функцій $\{\gamma_s\}_{s=1}^{\infty}$, що функція $\overline{u}^{(p)} = \sum_{i=1}^{p} c_i^{(p)}(T_1\gamma_i;\, T_2\gamma_i)$ при $p \to \infty$ збігається до функції $\overline{u}^* = (\overline{u}_1^*, \overline{u}_2^*)$ за нормою простору H^1, а $\overline{\mu}^{(p)} = \sum_{i=1}^{p} \overline{c}_i^{(p)}\gamma_i \to (\mu_0 - f')$ за нормою простору $W_2^{-1/2}(\gamma)$.

Тепер, враховуючи також неперервність оператора, який ставить у відповідність функції відрізок її узагальненого ряду Фур'є, неважко завершити доведення теореми.

5. Застосування запропонованого алгоритму до однієї задачі на власні значення. Розглянемо задачу на власні значення з параметром у крайовій умові:

$$\mathcal{M}u(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{1}{r}u = 0 \quad \text{в } G,$$
$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \kappa u\right)\right|_{L_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{L} = 0. \tag{26}$$

До цієї задачі зводиться вивчення власних антисиметричних коливань ідеальної рідини в порожнинах, які мають форму тіла обертання [10, 11]. Тут за вісь Ox вибрана вісь симетрії порожнини, L та L_0 — лінії перетину меридіонального перерізу із змочуваною поверхнею порожнини та вільною незбуреною поверхнею рідини відповідно, $\overline{n}$ — орт зовнішньої нормалі до межі області G. Однорідна задача (26) еквівалентна варіаційній задачі [10] для функціонала

$$\Phi_0(u) = \iint_G \left(r\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right] + \frac{1}{r}u^2 \right) dx\,dr - \kappa \int_{L_0} r u^2\, dr,$$

визначеного на класі функцій із простору $\tilde{W}_2^1(G)$, в якому норма $\|\cdot\|_{\tilde{W}_2^1(G)}$ на гладких функціях задається формулою

$$\|u\|^2_{\tilde{W}_2^1(G)} = \iint_G \left(r\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right] + \frac{1}{r}u^2 \right) dx\,dr.$$

На основі варіаційного формулювання задачі (26) та методу Трефтца було розв'язано багато задач визначення динамічних характеристик рідини, яка коливається в осесиметричних посудинах [10]. Проте для посудин, в яких радіус вільної поверхні рідини значно менший поздовжнього розміру, збіжність послідовних наближень суттєво уповільнюється, що призводить до втрати стійкості обчислювального процесу. До числа таких посудин відносяться і видовжені посудини, частина поверхні яких співпадає з циліндричною поверхнею. Для такого класу посудин розв'язок задачі (26) може бути ефективно побудований, якщо виходити при цьому з позицій розглянутого вище алгоритму [12].

Нехай область G розділена лінією γ на дві підобласті: G_1 і G_2. При цьому область G_1 буде обмежена віссю Ox, лініями L_0, L_1 та γ, а область G_2 — віссю Ox, лініями L_2 та γ ($L = L_1 \cup L_2$). Позначимо розв'язки вихідної задачі в підобластях G_1 і G_2 відповідно через u_1 та u_2. Для забезпечення їх гладкого спряження на лінії γ повинні виконуватись умови

$$(u_1 - u_2)|_\gamma = 0, \quad \left.\left(\frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \frac{\partial u_2}{\partial n_2}\right)\right|_\gamma = 0, \tag{27}$$

де $\overline{n}_1$ і $\overline{n}_2$ — орти зовнішніх нормалей до областей G_1 та G_2 на лінії γ.

Введемо до розгляду функціонал

$$\Phi(u,\mu,\kappa) = \sum_{i=1}^{2}\int_{G_i}\left(r\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_i}{\partial r}\right)^2\right]+\frac{1}{r}u_i^2\right)dx\,dr -$$
$$- \kappa\int_{L_0} r u_i^2\,dr + \int_{\gamma}\mu(u_1-u_2)r\,dS, \tag{28}$$

де $\mu(r)$ — довільна функція, яка визначена на лінії γ.

Рівняннями Ейлера для функціонала (28) є вихідні рівняння і граничні умови задачі (26), а також умови спряження (27) на границі γ підобластей G_1 та G_2.

Будемо знаходити наближені розв'язки у вигляді розвинень

$$u_1^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k w_k^{(1)}, \quad u_2^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} b_k w_k^{(2)}, \quad \mu^{(p)} = \sum_{k=1}^{p} c_k \gamma_k, \tag{29}$$

де $\left\{w_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{w_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ — повні системи координатних функцій у просторах $\tilde{W}_2^1(G_1)$, $\tilde{W}_2^1(G_2)$ та $L_2(\gamma, r\,dr)$ відповідно.

Однорідну алгебраїчну систему відносно коефіцієнтів a_k, b_k та c_k отримаємо із умови стаціонарності функціонала (28):

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} a_k\alpha_{ik}^{(1)} + \sum_{k=1}^{p} c_k c_{ik}^{(1)} = 0, \quad i=\overrightarrow{1,n},\\
&\sum_{k=1}^{m} b_k\beta_{ik}^{(2)} + \sum_{k=1}^{p} c_k c_{ik}^{(2)} = 0, \quad i=\overrightarrow{1,m},\\
&\sum_{k=1}^{n} a_k\alpha_{ik}^{(3)} + \sum_{k=1}^{m} b_k\beta_{ik}^{(3)} = 0. \quad i=\overrightarrow{1,p},
\end{aligned}\tag{30}$$

де

$$\alpha_{ik}^{(1)} = -\int_{G_1} M w_k^{(1)} w_i^{(1)}\,dx\,dr + \int_{L_0} r\left(\frac{\partial w_k^{(1)}}{\partial x} - \kappa w_k^{(1)}\right) w_i^{(1)}\,dS +$$
$$+ \int_{L_1} r\frac{\partial w_k^{(1)}}{\partial n_1} w_i^{(1)}\,dS + \int_{\gamma} r\frac{\partial w_k^{(1)}}{\partial n_1} w_i^{(1)}\,dS,$$
$$c_{ik}^{(1)} = \frac{1}{2}\int_{\gamma} r\gamma_k w_i^{(1)}\,dS, \quad c_{ik}^{(2)} = -\frac{1}{2}\int_{\gamma} r w_i^{(2)}\gamma_k\,dS,$$

$$\beta_{ik}^{(2)} = -\int_{G_2} M w_k^{(2)} w_i^{(2)}\,dx\,dr + \int_{L_2} r\frac{\partial w_k^{(2)}}{\partial n_2} w_i^{(2)}\,dS + \int_{\gamma} r\frac{\partial w_k^{(2)}}{\partial n_2} w_i^{(2)}\,dS,$$
$$\alpha_{ik}^{(3)} = \frac{1}{2}\int_{\gamma} r w_k^{(1)}\gamma_i dS, \quad \beta_{ik}^{(3)} = -\frac{1}{2}\int_{\gamma} r w_k^{(2)}\gamma_i dS.$$

Матриця коефіцієнтів системи рівнянь (30) є симетричною і вирази для її коефіцієнтів в деяких випадках можуть бути суттєво спрощені шляхом раціонального вибору систем координатних функцій для апроксимації розв'язків u_1 і u_2 відповідно в областях G_1 і G_2 та множника Лагранжа μ.

Розглянемо циліндричну посудину з довільним осесиметричним днищем. В цьому випадку область G_1 буде мати форму прямокутника з висотою h_1. В зв'язку з цим для підобласті G_1 координатну систему функцій $\left\{w_i^{(1)}\right\}$ доцільно вибрати у вигляді

$$w_i^{(1)}(x,r) = [k_i \operatorname{ch} k_i(x-h_1) + \kappa \operatorname{sh} k_i(x-h_1)] J_1(k_i r),$$

де $J_1(z)$ — функція Бесселя першого роду і першого порядку, k_i — i-й корінь рівняння $J_1'(z)=0$. При цьому початок системи координат (x,r) вибрано в точці перетину осі Ox із лінією γ.

Вибрані координатні функції $w_i^{(1)}$ задовольняють вихідне рівняння та граничні умови на лініях L_0 і L_1. За координатні функції в області G_2 виберемо повну систему частинних розв'язків рівняння $Mu=0$, які широко використовуються для розв'язання варіаційним методом задач про коливання рідини в однозв'язних осесиметричних порожнинах [10]. В змінних (x,r) ці функції є многочленами вигляду

$$w_1^{(2)} = r, \;\; w_2^{(2)} = xr, \;\; w_3^{(2)} = x^2 r - \frac{1}{4}r^3.$$

Подальше обчислення функцій $w_k^{(2)}$ і їх перших похідних базується на використанні рекурентних формул:

$$w_k^{(2)} = \frac{2k-1}{2k+1} x w_{k-1}^{(2)} - \frac{k-2}{k+1}(x^2+r^2) w_{k-2}^{(2)},$$

$$r\frac{\partial w_k^{(2)}}{\partial r} = k w_k^{(2)} - (k-1) x w_{k-1}^{(2)}, \quad \frac{\partial w_k^{(2)}}{\partial x} = (k-1) w_{k-2}^{(2)}.$$

В свою чергу, для множника Лагранжа μ координатні функції γ_i виберемо у вигляді

$$\gamma_i = \left.\frac{\partial w_i^{(1)}}{\partial x}\right|_{x=0} = \left(k_1^2 \operatorname{sh} k_i h_1 + \kappa k_i \operatorname{ch} k_i h_1\right) J_1(k_i r).$$

При вибраних координатних функціях коефіцієнти алгебраїчної системи (30) набирають вигляду

$$\alpha_{ii}^{(1)} = \left(k_i^2 \operatorname{sh} k_i h_1 - \kappa k_i \operatorname{ch} k_i h_1\right)\left(k_i \operatorname{ch} k_1 h - \kappa \operatorname{sh} k_i h_1\right) \int_0^1 r J_1^2(k_i r)\, dr,$$

$$\alpha_{ik}^{(1)} = 0 \;\; (i \neq k), \quad c_{ik}^{(1)} = -\frac{1}{2}\alpha_{ik}^{(1)}, \quad \alpha_{ik}^{(3)} = -\frac{1}{2}\alpha_{ik}^{(1)},$$

$$c_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(k_j^2 \operatorname{sh} k_j h_1 - \kappa k_j \operatorname{ch} k_j h_1\right) \int_0^1 r J_1(k_j r) \left. w_1^{(2)}\right|_{x=0} dr, \tag{31}$$

$$\beta_{ik}^{(2)} = \int_{L_2} r \frac{\partial w_k^{(2)}}{\partial n_2} dS + \int_0^1 r \left.\left(\frac{\partial w_k^{(2)}}{\partial x} w_i^{(1)}\right)\right|_{x=0} dr, \quad \beta_{ik}^{(3)} = c_{ki}^{(2)}.$$

Враховуючи співвідношення (31), із системи рівнянь (30) одержуємо

$$a_i = \frac{1}{2} c_i, \quad c_i = \frac{4}{\alpha_{ii}^{(1)}} \sum_{k=1}^m b_k c_{ki}^{(2)}, \quad n = p, \quad i = \overrightarrow{1,n}.$$

При цьому коефіцієнти b_k і параметр κ будуть визначатись із рівнянь

$$\sum_{j=1}^m b_j \left(\beta_{ij}^{(2)} + 4\sum_{k=1}^n \frac{c_{ik}^{(2)} c_{jk}^{(2)}}{\alpha_{kk}^{(1)}}\right) = 0, \quad i = \overrightarrow{1,m}. \tag{32}$$

Таким чином, знаходження частот і форм власних коливань рідини в розглядуваних порожнинах зводиться до розв'язання задачі лінійної алгебри, причому порядок одержаної системи рівнянь (32) співпадає з числом наближень для апроксимації вихідної функції в області G_2.

Враховуючи, що

$$w_{2k+1}^{(2)}\Big|_{x=0} = (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2k+2)} r^{2k+1}, \quad w_{2k}^{(2)}\Big|_{x=0} = 0,$$

а також вирази для інтегралів

$$\int_0^1 r^2 J_1(k_i r)\,dr = \frac{J_1(k_i)}{k_i^2}, \quad \int_0^1 r J_1^2(k_i r)\,dr = \frac{k_i^2-1}{2k_i^2} J_1^2(k_i),$$

$$\int_0^1 r^{p+1} J_1(k_i r)\,dr = \frac{1-p^2}{k_i^2}\int_0^1 r^{p-1} J_1(k_i r)\,dr + \frac{p}{k_i^2} J_1(k_i),$$

для обчислення коефіцієнтів $c_{ij}^{(2)}$ одержимо формули

$$c_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(k_j^2 \operatorname{sh} k_j h_1 - \kappa k_j \operatorname{ch} k_j h_1\right)(-1)^s \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2s-1)}{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2s+2)} \int_0^1 r^{(2s+1)} J_1(k_i r)\,dr, & i = 2s+1; \\ 0, \quad i = 2s \end{cases}$$

$$(s = 1, 2, \ldots),$$

$$c_{1j}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(k_j^2 \operatorname{sh} k_j h_1 - \kappa \operatorname{ch} k_j h_1\right)\frac{J_1(k_j)}{k_j^2},$$

$$\int_0^1 r^{2m} J_1(k_i r)\,dr = \left[\sum_{j=1}^{m-1} \frac{2j+1}{k_i^{2(m-j+1)}} \prod_{s=1}^{m-j}\left(1-(2(m-s)+1)^2\right) + \frac{2m-1}{k_i^2}\right] J_1(k_i).$$

Визначення коефіцієнтів $\beta_{ij}^{(2)}$ зручно проводити на основі квадратурної формули Гаусса.

Наведемо деякі результати розрахунків для циліндричної посудини, яка має днище у формі півкулі. В табл. 1 і 2 показана збіжність власних значень відповідно κ_1 і κ_2 в залежності від числа координатних функцій у розкладах (29) при $h_1 = 0{,}5$ і одиничному радіусі циліндра.

Таблиця 1

m	n				
	1	2	3	4	5
1	1,95514	1,96109	1,96252	1,96307	1,96334
2	1,82661	1,83548	1,83760	1,83841	1,83881
3	1,79886	1,80180	1,80237	1,80257	1,80267
4	1,79404	1,79443	1,79446	1,79447	1,79447
5	1,79361	1,79369	1,79369	1,79369	1,79369
6	1,79361	1,79367	1,79367	1,79368	1,79368
7	1,79360	1,79367	1,79367	1,79368	1,79368

Ці результати свідчать про те, що для визначення з високим ступенем точності перших двох частот коливань рідини в розкладах для функцій u_1 і u_2 достатньо взяти по чотири-п'ять членів.

В табл. 3 для $h_1 = 0{,}5$; $m = 7$ та $n = 5$ наведені значення функцій u_1 і u_2 та їх перших похідних в напрямку осі Ox на лінії γ, які ілюструють точність виконання умов спряження.

Чисельна реалізація запропонованого алгоритму в наведеному вище прикладі підтвердила справедливість результатів даної роботи і доцільність використання цього підходу для розв'язання конкретних задач математичної фізики.

Таблиця 2

m	n			
	2	3	4	5
2	5,38220	5,38220	5,38220	5,38221
3	5,37670	5,37682	5,37686	5,37688
4	5,35917	5,36063	5,36117	5,36143
5	5,34361	5,34632	5,34720	5,34759
6	5,3350	5,33748	5,33787	5,33801
7	5,33243	5,33304	5,33307	5,33307
8	5,33144	5,33155	5,33155	5,33156
9	5,33121	5,33123	5,33123	5,33123

Таблиця 3

r	u_1	u_2	$\frac{\partial u_1}{\partial x}$	$\frac{\partial u_2}{\partial x}$
0,2	0,1970	0,1969	0,323	0,322
0,4	0,3753	0,3753	0,614	0,612
0,6	0,5184	0,5184	0,830	0,833
0,8	0,6124	0,6123	0,957	0,956
1,0	0,6472	0,6483	0,970	0,948

1. *Ильин В. А., Шишмарев И. А.* Метод потенциалов для задач Дирихле и Неймана в случае уравнений с разрывными коэффициентами // Сиб. мат. журн. – 1961. – **2**, № 1. – С. 46 – 58.
2. *Schechter M.* A generalization of the problem of transmission // Ann. Soc. norm. supér. Pisa. – 1960. – **14**. – P. 207 – 236.
3. *Шефтель З. Г.* Энергетические неравенства и общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // Сиб. мат. журн. – 1965. – **6**, № 3. – С. 636 – 668.
4. *Ройтберг Б. Я., Ройтберг Я. А.* Эллиптические граничные задачи в негладких областях // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 5. – С. 701 – 709.
5. *Ройтберг Б. Я.* Задачи трансмиссии в областях с негладкими границами // Допов. НАН України. – 1996. – № 3. – С. 15 – 20.
6. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
7. *Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
8. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. – 400 с.
9. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 471 с.
10. *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости – Киев: Наук. думка, 1984. – 229 с.
11. *Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л.В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. – Киев: Наук. думка, 1969. – 251 с.
12. *Комаренко А. Н., Троценко В. А.* К вариационным методам решения задач о колебаниях жидкости в полостях сложной геометрии // Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 66 – 74.

Одержано 23.12.97,
після доопрацювання — 09.06.98