УДК 517.5

О. Ф. Герус (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОЦЕНКИ МОДУЛЯ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ И ЕГО ПРОИЗВОДНЫХ *

In the domain bounded by a closed rectifiable Jordan curve, estimates for the module of the Cauchy-type integral and of its derivatives are obtained in terms of the contour moduli of smoothness of integrand and a metric characteristic of the curve.

Отримано оцінки модуля інтеграла типу Коші та його похідних в області, обмеженій замкненою жордановою спрямлюваною кривою, через контурні модулі гладкості підінтегральної функції та метричну характеристику кривої.

Введем следующие обозначения: Γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая диаметра d в комплексной плоскости $\mathbb{C}$; D^+ и D^- — соответственно внутренняя и внешняя области, ограниченные кривой Γ; $\Gamma_{z,\delta} := \{\zeta \in \Gamma : |\zeta - z| \le \delta\}$, $\delta > 0$; $\theta_\Gamma(z, \delta) := \operatorname{mes} \Gamma_{z,\delta}$ — криволинейная лебегова мера множества $\Gamma_{z,\delta}$;

$$\Theta_\Gamma(z, \delta) := \frac{\delta^2}{\theta_\Gamma(z, 4\delta) - \theta_\Gamma(z, \delta)};$$

$f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ — интегрируемая функция,

$$\Phi[f](z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma,$$

— интеграл типа Коши функции f.

Для описания гладкостных свойств функции f будем пользоваться N-равномерными модулями гладкости, введенными П. М. Тамразовым [1] (см. также [2, 3]) для произвольного множества $E \subset \mathbb{C}$ и произвольной конечной функции $f\colon E \to \mathbb{C}$ следующим образом.

Пусть $N \ge 1$, k — натуральное, $t \in E$, $\delta > 0$, $E_{t,\delta} := \{\zeta \in E : |\zeta - t| \le \delta\}$ и $l(k, E, t, \delta)$ — множество точечных наборов $\{z_0, \ldots, z_k\} \subset E_{t,\delta}$, удовлетворяющих условию

$$\left|\frac{z_i - z_j}{z_p - z_q}\right| \le N \qquad \forall\, i, j, p, q = 0, \ldots, k; \quad p \ne q. \tag{1}$$

Модули гладкости функции f определяются формулой

$$\omega_{k,N,E}(f, \delta) = \sup_{t \in E} \sup_{\{z_0, \ldots, z_k\} \in l(k,E,t,\delta)} |[z_0, \ldots, z_k; f, z_0]|,$$

где

$$[z_0, \ldots, z_k; f, z_0] := [z_0, \ldots, z_k]_f \prod_{j=1}^{k} (z_0 - z_j)$$

— конечная разность, а

* Выполнена при частичной поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект № 1.4/263).

$$[z_0, \ldots, z_k]_f := \sum_{q=0}^{k} f(z_q) \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq q}}^{k} (z_q - z_r)^{-1}$$

— разделенная разность функции f.

Пусть p — натуральное,

$$\Omega^p_{k,N,E,f}(\alpha, \beta) := \begin{cases} \sup\limits_{\alpha \le t \le \beta} \dfrac{\omega_{k,N,E}(f,t)}{t^p} & \text{при} \quad 0 < \alpha \le \beta; \\ \Omega^p_{k,N,E,f}(\beta,\beta) & \text{при} \quad 0 < \beta < \alpha. \end{cases}$$

Модули непрерывности (т. е. модули гладкости порядка $k = 1$) не зависят от N. Для сокращения записи в этом случае будем применять обозначения $\omega_E(f, \delta) = \omega_{1,N,E}(f, \delta)$, $\Omega_{E,f}(\alpha, \beta) = \Omega^1_{1,N,E,f}(\alpha, \beta)$.

Целью настоящей работы является доказательство оценок для модуля интеграла типа Коши $\Phi[f]$ и его производных $\Phi^{(\nu)}[f]$ произвольного натурального порядка ν в областях D^+, D^- через контурные модули гладкости $\omega_{k,N,\Gamma}(f, \cdot)$ и расстояние от точки z до кривой Γ.

В частном случае $\nu = 1$, $k = 1$ Н. И. Мусхелишвили [4] получил такую оценку для гладких кривых Γ и гельдеровых функций f.

Условимся обозначать через $c(\cdot), \ldots, c(\cdot, \ldots, \cdot)$ положительные постоянные (возможно различные), зависящие только от аргументов, указанных в скобках. Символом c без аргументов будем обозначать абсолютную постоянную.

Пусть $\rho(z, \Gamma) = \inf\limits_{\zeta \in \Gamma} |\zeta - z|$, $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$; ζ_0 — ближайшая к z точка кривой Γ; χ_E — характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{C}$ (т. е. равная 1 на E и 0 — на $\mathbb{C} \setminus E$); $M_{f,E} = \sup\limits_{z \in E} |f(z)|$, $E \in \Gamma$.

Теорема 1. *Пусть функция $f \colon \Gamma \to \mathbb{C}$ непрерывна. Тогда*

$$|\Phi[f](z)| \le c \int_0^{2d} \frac{x\,\Omega_{\Gamma,f}(\Theta_\Gamma(\zeta_0, x), x)}{x + \rho(z,\Gamma)}\, dx + \chi_{D^+}(z)\,|f(\zeta_0)| \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma. \quad (2)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ и обозначим для простоты $\rho = \rho(z, \Gamma)$. Представим кривую Γ в виде объединения $\bigcup_{n=r}^{+\infty} \Gamma_n$, где $\Gamma_n = \Gamma_{\zeta_0, a_n} \setminus \Gamma_{\zeta_0, a_{n+1}}$, $a_n = 2^{2-n}\rho$ и целое r определяется из условия $\dfrac{a_r}{2} < \max\limits_{\zeta \in \Gamma} |\zeta - \zeta_0| \le a_r$. Положим для определенности $\rho < \dfrac{d}{4}$. Тогда $r \le 0$.

Так как при повороте системы координат вокруг точки z величина $|\Phi[f](z)|$ не изменяется, без ограничения общности будем полагать $\arg(\zeta_0 - z) = 0$.

Воспользуемся равенством

$$\Phi[f](z) = \frac{1}{2\pi i} \bigcup_{n=r}^{+\infty} I(\Gamma_n, f, z) + \chi_{D^+}(z) f(\zeta_0), \quad (3)$$

где $I(\Gamma_n, f, z) = \int_{\Gamma_n} \dfrac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - z}\, d\zeta$.

Повторяя почти дословно доказательство леммы 2 из [5], получаем

$$|I(\Gamma_n, f, z)| \le \frac{c}{h}\left(\int\limits_{a_{n+2}}^{a_{n+1}} x\Omega_{\Gamma_n, f}(\Theta_{\Gamma_n}(\zeta_0, x), 4x)\,dx + a_{n+1} M_{f,\zeta_0,\Gamma_n}\right),$$

где

$$M_{f,\zeta_0,\Gamma_n} = \max_{\zeta\in\Gamma_n} |f(\zeta) - f(\zeta_0)|, \qquad h = \begin{cases} \rho & \text{при} \quad n \ge 1; \\ a_{n+2} & \text{при} \quad r \le n \le 0. \end{cases}$$

Используя технику доказательства теоремы 1 из [5], отсюда имеем

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |I(\Gamma_n, f, z)| \le \frac{c}{\rho}\int\limits_0^{\rho} x\Omega_{\Gamma, f}(\Theta_{\Gamma}(\zeta_0, x), x)\,dx, \tag{4}$$

$$\sum_{n=r}^{0} |I(\Gamma_n, f, z)| \le c\int\limits_{\rho}^{2d} \Omega_{\Gamma, f}(\Theta_{\Gamma}(\zeta_0, x), x)\,dx. \tag{5}$$

Оценка (2) следует из соотношений (3) – (5). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть функция* $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ *непрерывна*; ν, k *— натуральные,* $1 \le k \le \nu$; $N \in [k, +\infty)$. *Тогда*

$$|\Phi^{(\nu)}[f](z)| \le c(\nu, k)\int\limits_0^{2d} \frac{x^p\,\Omega^p_{k,N,\Gamma,f}(\Theta_\Gamma(\zeta_0, x), x)}{x^{\nu+1} + (\rho(z,\Gamma))^{\nu+1}}\,dx \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma, \tag{6}$$

где $p = \begin{cases} 1 & \textit{при} \quad k = 1; \\ 2 & \textit{при} \quad k > 1. \end{cases}$

При доказательстве теоремы 2 используем те же обозначения и допущения, что и при доказательстве теоремы 1. Кроме того, обозначим

$$I_\nu(\gamma, f, z) = \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{(\zeta - z)^{\nu+1}}\,d\zeta,$$

где ν — произвольное измеримое подмножество кривой Γ.

Лемма 1. *При любом натуральном* ν *и целом* $n \ge r$ *справедлива оценка*

$$|I_\nu(\Gamma_n, f, z)| \le$$

$$\le \frac{c_1(\nu)}{h^{\nu+1}}\left(\int\limits_{a_{n+2}}^{a_{n+1}} x\Omega_{\Gamma_n, f}(\Theta_{\Gamma_n}(\zeta_0, x), c_2(\nu)\,x)\,dx + a_{n+1} M_{f,\zeta_0,\Gamma_n}\right). \tag{7}$$

Доказательство. Будем следовать общей схеме доказательства леммы 2 работы [5]. Пусть $\tilde\Gamma_n$ — объединение всех дуг множества Γ_n, не имеющих с ограничивающими его окружностями других общих точек, кроме концов, γ — объединение такого конечного числа указанных дуг, что $\operatorname{mes}\gamma \ge \operatorname{mes}\tilde\Gamma_n - a_{n+1}$.

Имеем $|I_\nu(\Gamma_n, f, z)| \le |I_\nu(\Gamma_n\setminus\gamma, f, z)| + |\operatorname{Re} I_\nu(\gamma, f, z)| + |\operatorname{Im} I_\nu(\gamma, f, z)|$.

Учитывая неравенства

$$|\zeta - z| \ge h \quad \forall\, \zeta \in \Gamma_n, \qquad \operatorname{mes}(\Gamma_n\setminus\gamma) \le a_{n+1} + 2\pi a_n, \tag{8}$$

получаем

$$|I_\nu(\Gamma_n \setminus \gamma, f, z)| \le \int\limits_{\Gamma_n \setminus \gamma} \frac{|f(\zeta) - f(\zeta_0)|}{|\zeta - z|^{\nu+1}} |d\zeta| \le (1 + 4\pi) \frac{a_{n+1}}{h^{\nu+1}} M_{f, \zeta_0, \Gamma_n}. \tag{9}$$

Пусть для простоты функция f — вещественна. Оценим $|\operatorname{Im} I_\nu(\gamma, f, z)|$ ($|\operatorname{Re} I_\nu(\gamma, f, z)|$ оценивается аналогично).

Имеем

$$|\operatorname{Im} I_\nu(\gamma, f, z)| \le \sum_{l=1}^{2\nu} |\operatorname{Im} I_\nu(f, \gamma_l, f, z)|, \tag{10}$$

где $\gamma_l = \left\{ \zeta \in \gamma \colon \frac{l-1}{\nu} \pi \le \arg(\zeta - z) \le \frac{l}{\nu} \pi \right\}$.

Зафиксируем произвольное $l = 1, 2, \ldots, 2\nu$ и обозначим $\tilde{\gamma} = \gamma_l$. Разобьем множество $\tilde{\gamma}$ кривыми, определяемыми уравнениями $\operatorname{Im}(\zeta - z)^{-\nu} = C_m$, $m = 0, 1, \ldots, q$; $C_0 < C_1 < \ldots < C_q$, так, чтобы концы всех образовавшихся при этом его дуг принадлежали этим кривым и выполнялось условие

$$\max_{1 \le m \le q} \Delta C_m \le 2 \min_{1 \le m \le q} \Delta C_m, \tag{11}$$

где $\Delta C_m = C_m - C_{m-1}$.

Имеем $\tilde{\gamma} = \bigcup_{m=1}^{q} \tilde{\gamma}_m$, где $\tilde{\gamma}_m = \tilde{\gamma} \cap \{ \zeta \colon C_{m-1} < \operatorname{Im}(\zeta - z)^{-\nu} \le C_m \}$. Каждое множество $\tilde{\gamma}_m$ является объединением следующих трех множеств:

1) $\tilde{\gamma}_{m,1} = \bigcup_j \tilde{\gamma}_{m,1,j}$ — объединение не более чем счетной совокупности попарно не пересекающихся открытых дуг с концами на одной и той же кривой разбиения;

2) $\tilde{\gamma}_{m,2} = \bigcup_{j=1}^{t} \tilde{\gamma}_{m,2,j}$ — объединение конечной совокупности попарно не пересекающихся открытых дуг с концами на разных кривых разбиения;

3) $\tilde{\gamma}_{m,3}$ — пересечение $\tilde{\gamma}_m$ с m-й кривой разбиения.

Очевидно, $\operatorname{Im} I_\nu(\tilde{\gamma}_{m,3}, f, z) = 0$.

Пусть $\lambda = \max\limits_{l=1,2} \max\limits_{m,j} \operatorname{mes} \tilde{\gamma}_{m,l,j}$. Учитывая равенство $\operatorname{Im} \int_{\tilde{\gamma}_{m,1,j}} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^{\nu+1}} = 0$ и неравенство (8), аналогично соотношению (10) [5] получаем

$$|\operatorname{Im} I_\nu(\tilde{\gamma}_{m,1}, f, z)| \le \frac{\omega_{\Gamma_n}(f, \lambda) \operatorname{mes} \tilde{\gamma}_{m,1}}{h^{\nu+1}}. \tag{12}$$

Рассуждая подобно доказательству неравенств (11), (12) из [5], обозначим через τ_j, $j = 1, 2, \ldots, t$, концы дуг $\tilde{\gamma}_{m,2,j}$, принадлежащие $(m-1)$-й кривой разбиения. Пусть указанные дуги занумерованы в порядке убывания величины $\operatorname{Re}(\tau_j - z)^{-\nu}$. Тогда

$$|\operatorname{Im} I_\nu(\tilde{\gamma}_{m,2}, f, z)| \le \frac{\omega_{\Gamma_n}(f, \lambda) \operatorname{mes} \tilde{\gamma}_{m,2}}{h^{\nu+1}} +$$

$$+ \frac{1}{\nu} \left(\sum_{l=1}^{[t/2]} \omega_{\Gamma_n}(f, |\tau_{2l-1} - \tau_{2l}|) + M_{f, \zeta_0, \Gamma_n} \right) \Delta C_m. \tag{13}$$

Выражение $\sum_{l=1}^{[t/2]} |\tau_{2l-1} - \tau_{2l}|$ не превышает меру пересечения $(m-1)$-й кривой разбиения с множеством $\{\zeta\colon a_{n+1} < |\zeta - \zeta_0| \le a_n\}$. Поэтому

$$\sum_{l=1}^{[t/2]} |\tau_{2l-1} - \tau_{2l}| \le c_3(\nu)\, a_{n+1}. \tag{14}$$

Оценим снизу величину $\operatorname{mes}\tilde{\gamma}_{m,2} = \sum_{j=1}^{t} \operatorname{mes}\tilde{\gamma}_{m,2,j}$. Для этого осуществим конформное отображение $w = \dfrac{1}{(\zeta - z)^{\nu}}$ плоскости переменной ζ в плоскость переменной w. Пусть $\tilde{\gamma}'_{m,2,j}$ — образ дуги $\tilde{\gamma}_{m,2,j}$ при этом отображении. Образами $(m-1)$- и m-й кривых разбиения будут прямые, параллельные мнимой оси, с расстоянием ΔC_m между ними. Следовательно, $\operatorname{mes}\tilde{\gamma}'_{m,2,j} \ge \Delta C_m$. Поэтому, учитывая неравенство (8), имеем

$$\operatorname{mes}\tilde{\gamma}_{m,2,j} = \int_{\tilde{\gamma}_{m,2,j}} |d\zeta| = \frac{1}{\nu} \int_{\tilde{\gamma}'_{m,2,j}} |w^{-(1/\nu+1)}|\,|dw| \ge \frac{h^{\nu+1}}{\nu}\Delta C_m,$$

откуда получаем

$$\operatorname{mes}\tilde{\gamma}_{m,2} \ge 2\left[\frac{t}{2}\right]\frac{h^{\nu+1}}{\nu}\Delta C_m. \tag{15}$$

Нам понадобится также оценка суммы $s = \sum_{m=1}^{q} \Delta C_m$.

Пусть $a_n \le \dfrac{\rho}{\nu}$. В этом случае только множества γ_1 и $\gamma_{2\nu}$ будут непустыми. Если, например, $\tilde{\gamma} = \gamma_1$, то множество $\tilde{\gamma}$ принадлежит замыканию области, ограниченной положительной вещественной полуосью и кривой разбиения, содержащей точку $\zeta = z + \rho e^{i\alpha}$, где $\alpha < \dfrac{\pi}{2\nu}$. Тогда образ множества $\tilde{\gamma}$ лежит между двумя параллельными прямыми: вещественной осью и прямой $\operatorname{Im} w = -\dfrac{1}{\rho^{\nu}}\sin\nu\alpha$. Поэтому s не превышает расстояние между указанными прямыми. Пусть L — длина дуги $\{\zeta\colon \zeta = z + \rho e^{i\varphi},\ \varphi \in [0, \alpha]\}$, L' — длина ее образа в плоскости переменной w. Тогда $s < L' = L \cdot |w'(\zeta_0)| = L\dfrac{\nu}{\rho^{\nu+1}} < \dfrac{\pi\nu a_{n+1}}{\rho^{\nu+1}}$.

При $\dfrac{\rho}{\nu} < a_n \le 2\rho$ имеем $s \le \dfrac{2}{\rho^{\nu}} < \dfrac{4\nu a_{n+1}}{\rho^{\nu+1}}$.

Если же $a_n > 2\rho$, то при $\zeta \in \tilde{\gamma}$ будет $|\zeta - z| > \dfrac{a_{n+1}}{2} \Rightarrow |w| < \dfrac{2^{\nu}}{a_{n+1}^{\nu}} \Rightarrow$ $\Rightarrow s < a_{n+1} / a_{n+2}^{\nu+1}$.

Таким образом, во всех случаях имеем

$$s \le 4\nu\frac{a_{n+1}}{h^{\nu+1}}. \tag{16}$$

Применяя лемму 1 из [5] с учетом неравенства (14), а затем оценку (15), получаем

$$\sum_{l=1}^{[t/2]} \omega_{\Gamma_n}(f, |\tau_{2l-1} - \tau_{2l}|) \le 2c_3(\nu)\, a_{n+1} \Omega_{\Gamma_n, f}\left(\frac{c_3(\nu)\, a_{n+1}}{[t/2]},\ c_3(\nu)\, a_{n+1}\right) \le$$

$$\le 2c_3(\nu)\, a_{n+1} \Omega_{\Gamma_n, f}\left(\frac{2c_3(\nu)\, a_{n+1} h^{\nu+1} \Delta C_m}{\nu \operatorname{mes} \tilde{\gamma}_{m,2}},\ c_3(\nu)\, a_{n+1}\right). \tag{17}$$

Из неравенств (12), (13) и (17) следует

$$|\operatorname{Im} I_\nu(\tilde{\gamma}, f, z)| \le \frac{\omega_{\Gamma_n}(f, \lambda) \operatorname{mes} \tilde{\gamma}}{h^{\nu+1}} + \frac{s}{\nu} M_{f, \zeta_0, \Gamma_n} +$$

$$+ \sum_{m \in E} \frac{2c_3(\nu)\, a_{n+1} \Delta C_m}{\nu} \Omega_{\Gamma_n, f}\left(\frac{2c_3(\nu)\, a_{n+1} h^{\nu+1} \Delta C_m}{\nu \operatorname{mes} \tilde{\gamma}_{m,2}},\ c_3(\nu)\, a_{n+1}\right), \tag{18}$$

где E — множество тех m, для которых $\tilde{\gamma}_{m,2}$ содержит больше чем одну дугу.

На основании неравенств (11), (16) и свойств 1, 2 [5] функции $\Omega_{\Gamma_n, f}$ последнее слагаемое мажоранты в оценке (18) оценивается выражением

$$\frac{32c_3(\nu)\, a_{n+1}^2}{h^{\nu+1}} \Omega_{\Gamma_n, f}\left(\frac{16c_3(\nu)\, a_{n+1}^2}{\theta_{\Gamma_n}(\zeta_0, a_n) - \theta_{\Gamma_n}(\zeta_0, a_{n+1})},\ c_3(\nu)\, a_{n+1}\right) \le$$

$$\le \frac{128c_3(\nu)}{h^{\nu+1}} \int_{a_{n+2}}^{a_{n+1}} x \Omega_{\Gamma_n, f}(\Theta_{\Gamma_n}(\zeta_0, x), 2c_3(\nu)\, x)\, dx. \tag{19}$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, из соотношений (9), (10), (16), (18) и (19) получаем оценку (7). Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим вначале случай $k = 1$. На основании очевидного равенства $\Phi^{(\nu)}[f](z) = \dfrac{\nu!}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{(\zeta - z)^{\nu+1}} d\zeta$ имеем

$$|\Phi^{(\nu)}[f](z)| \le \frac{\nu!}{2\pi} \sum_{n=r}^{+\infty} |I_\nu(\Gamma_n, f, z)|. \tag{20}$$

Так как

$$a_{n+1} M_{f, \zeta_0, \Gamma_n} \le \frac{1}{2} \int_{a_n}^{a_{n-1}} x \Omega_{\Gamma, f}(\Theta_\Gamma(\zeta_0, x), x)\, dx,$$

из оценки (7) получаем

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |I_\nu(\Gamma_n, f, z)| \le$$

$$\le \frac{c_1(\nu)}{\rho^{\nu+1}} \left(\frac{3}{2} \int_0^{4d} x \Omega_{\Gamma, f}(\Theta_\Gamma(\zeta_0, x), x)\, dx + \int_0^\rho x \Omega_{\Gamma, f}(x, c_2(\nu)\, x)\, dx\right) \le$$

$$\le \frac{c_1(\nu)}{\rho^{\nu+1}} \left(\frac{5}{2} \int_0^\rho x \Omega_{\Gamma, f}(\Theta_\Gamma(\zeta_0, x), x)\, dx + \right.$$

$$\left. + \rho^{\nu+1} c_4(\nu) \int_\rho^{2d} \frac{\Omega_{\Gamma, f}(\Theta_\Gamma(\zeta_0, x), x)}{x^\nu} dx\right), \tag{21}$$

$$\sum_{n=r}^{0} |I_\nu(\Gamma_n, f, z)| \le c_1(\nu) 2^{\nu+1} \sum_{n=r}^{0} \left(\int_{a_{n+2}}^{a_{n+1}} \frac{\Omega_{\Gamma,f}(\Theta_\Gamma(\zeta_0, x), c_2(\nu)x)}{x^\nu} dx + \right.$$

$$\left. + 2^{2\nu+1} \int_{a_n}^{a_{n-1}} \frac{\Omega_{\Gamma,f}(\Theta_\Gamma(\zeta_0, x), x)}{x^\nu} dx \right) \le$$

$$\le c_5(\nu) \int_{\rho}^{2d} \frac{\Omega_{\Gamma,f}(\Theta_\Gamma(\zeta_0, x), x)}{x^\nu} dx. \tag{22}$$

Из соотношений (20), (21) и (22) следует утверждение теоремы 2 для $k = 1$.

Пусть теперь $1 < k \le \nu$, $N \in [4k, +\infty)$. Обозначим $\gamma_1 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Gamma_n$, $\gamma_2 = \bigcup_{n=r}^{0} \Gamma_n$, $f^*(\zeta) = f(\zeta) - P_{k-1}(\zeta)$, где $P_{k-1}(\zeta)$ — произвольный полином степени $k-1$. Ввиду очевидного равенства $\Phi^{(\nu)}[f](z) = \frac{\nu!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f^*(\zeta) - f^*(\zeta_0)}{(\zeta - z)^{\nu+1}} d\zeta$, применяя лемму 1, получаем

$$|I_\nu(\gamma_1, f^*, z)| \le$$

$$\le \frac{c_1(\nu)}{\rho^{\nu+1}} \left(\int_0^\rho x \Omega_{\gamma_1, f^*}(\Theta_{\gamma_1}(\zeta_0, x), c_2(\nu)x) dx + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1} M_{f^*, \zeta_0, \Gamma_n} \right). \tag{23}$$

Воспользуемся оценкой (10′) из работы [3] и тем, что модули гладкости порядка k функций f и f^* равны между собой. Тогда

$$\Omega_{\gamma_1, f^*}(\Theta_{\gamma_1}(\zeta_0, x), c_2(\nu)x) \le$$

$$\le c(k) \left(x \Omega^2_{k,N,\gamma_1,f}(\Theta_{\gamma_1}(\zeta_0, x), x) + \int_x^{8\rho} \frac{\omega_{k,N,\gamma_1}(f, y)}{y^2} dy + \frac{M_{f^*, \gamma_1}}{2\rho} \right), \tag{24}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1} M_{f^*, \zeta_0, \Gamma_n} \le \frac{1}{2} \int_0^{4\rho} \omega_{\gamma_1}(f^*, x) dx \le$$

$$\le c(k) \int_0^{4\rho} x \left(\int_x^{8\rho} \frac{\omega_{k,N,\gamma_1}(f, y)}{y^2} dy + \frac{M_{f^*, \gamma_1}}{2\rho} \right) dx. \tag{25}$$

Чтобы оценить M_{f^*, γ_1}, отметим, что γ_1 является $(k, 2k, \zeta_0)$-равномерным множеством (определение см. в [3, с. 840]). Построим $(k-1)$-равномерный (т. е. удовлетворяющий условию вида (1) с заменой N на $k-1$) точечный набор $\{x_0, \ldots, x_{k-1}\} \subset \gamma_1$ следующим образом. Пусть $\gamma_{1,0}$ — одна из дуг, на которые точка ζ_0 разбивает содержащую ее связную компоненту множества γ_1. Положим $x_0 = \zeta_0$ и для $q = 1, 2, \ldots, k-1$ обозначим $\gamma_{1,q} = \gamma_{1,q-1} \setminus \gamma_{1,q-1}(x_{q-1}, x_q)$, где $\gamma_{1,q-1}(x_{q-1}, x_q)$ — дуга кривой $\gamma_{1,q-1}$, соединяющая точки x_{q-1} и x_q, а x_q — точка множества $\left\{\zeta \in \gamma_{1,q-1} \colon |\zeta - z_{q-1}| = \frac{2\rho}{k-1}\right\}$ с максимальным $\gamma_{1,0}$-расстоянием от точки x_{q-1}.

Пусть $P_{k-1}(\zeta)$ — интерполяционный полином функции f с узлами $x_0, \ldots$

$\ldots, x_{k-1}$. Тогда с помощью оценки (9′) из [3] для произвольных $\zeta \in \gamma_1$ и $x \in \in [0, \rho]$ имеем

$$|f^*(\zeta)| = |[\zeta, x_0, \ldots, x_{k-1}; f^*, \zeta]| \leq c(k)\,\omega_{k,2k,\gamma_1}(f, 4\rho) \leq$$

$$\leq c(k)\,\omega_{k,N,\Gamma}(f, 4\rho) \leq c(k)\,\rho \int\limits_x^{8\rho} \frac{\omega_{k,N,\Gamma}(f, y)}{y^2}\,dy. \tag{26}$$

Подставляя в соотношение (23) оценки (24), (25) с учетом неравенства (26), а затем меняя порядок интегрирования в повторных интегралах, получаем

$$|I_\nu(\gamma_1, f^*, z)| \leq c(\nu, k) \int\limits_0^{8\rho} \frac{x^2\,\Omega^2_{k,N,\Gamma,f}(\Theta_\Gamma(\zeta_0, x), x)}{\rho^{\nu+1}}\,dx. \tag{27}$$

Аналогичными рассуждениями доказывается оценка

$$|I_\nu(\gamma_2, f^*, z)| \leq c(\nu, k) \int\limits_\rho^{2d} \frac{\Omega^2_{k,N,\Gamma,f}(\Theta_\Gamma(\zeta_0, x), x)}{x^{k-1}}\,dx. \tag{28}$$

Из соотношений (27), (28) следует оценка (6) для $k > 1$, $N \in [4k, +\infty)$. Для $N \in [k, 4k)$ указанная оценка легко выводится из уже доказанного с помощью неравенства (33) из [3]. Теорема 2 доказана.

Определение 1. *Кривая Γ называется регулярной (или K-регулярной) кривой, если существует положительная постоянная K такая, что для всех $z \in \Gamma$ и $\delta > 0$ верно неравенство $\theta_\Gamma(z, \delta) \leq K\delta$.*

Из теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть функция $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ непрерывна. Тогда*:

а) *если кривая Γ K-регулярна, то*

$$|\Phi[f](z)| \leq c(K) \int\limits_0^{2d} \frac{\omega_\Gamma(f, x)}{x + \rho(z, \Gamma)}\,dx + \chi_{D^+}(z)\,M_{f,\Gamma} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma; \tag{29}$$

б) *если $\dfrac{\omega_\Gamma(f, x)}{x}$ не убывает, то оценка вида (29) справедлива с абсолютной постоянной c.*

Доказательство. В случае а) для всех $x \in (0, 2d]$ имеем $\theta_\Gamma(\zeta_0, 4x) \leq \leq 4Kx$, $\theta_\Gamma(\zeta_0, x) \geq x$, откуда $\theta_\Gamma(\zeta_0, x) \geq \dfrac{x}{4K-1}$ и, следовательно,

$$\Omega_{\Gamma,f}(\Theta_\Gamma(\zeta_0, x), x) \leq c(K)\,\frac{\omega_\Gamma(f, x)}{x}.$$

В случае б) имеем $\Omega_{\Gamma,f}(\Theta_\Gamma(\zeta_0, x), x) = \dfrac{\omega_\Gamma(f, x)}{x}$ по определению.

Таким образом, оценка (29) следует из (2). Теорема 3 доказана.

Аналогично теореме 3 из теоремы 2 выводится такое утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда*:

а) *если кривая Γ K-регулярна, то*

$$|\Phi^{(\nu)}[f](z)| \leq c(\nu, k, K) \int\limits_0^{2d} \frac{\omega_{k,N,\Gamma}(f, x)}{x^{\nu+1} + (\rho(z, \Gamma))^{\nu+1}}\,dx \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma; \tag{30}$$

б) *если* $\dfrac{\omega_{k,N,\Gamma}(f,x)}{x^p}$ *не убывает, то оценка вида* (30) *справедлива с постоянной* $c(\nu, k)$.

Определение 2 [1]. *Пусть* $\sigma \geq 1$, $\gamma \geq 0$. *Нормальной мажорантой класса* (σ, γ) *называется каждая неубывающая функция* $\mu\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, *удовлетворяющая условию*

$$\mu(t\delta) \leq \sigma t^{\gamma}\mu(\delta) \quad \forall\, t>1 \quad \forall\, \delta>0.$$

Следующее утверждение решает вопрос неулучшаемости по порядку оценки (30).

Теорема 5. *Пусть* ν, k — *натуральные*, $1 \leq k \leq \nu$; $N \in [k, +\infty)$; μ — *нормальная мажоранта класса* (σ, k); D — *произвольная из двух областей, ограниченных кривой* Γ. *Тогда существует функция* $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$, *удовлетворяющая условию*

$$\omega_{k,N,\Gamma}(f,\delta) \leq c(\sigma,k,N)\mu(\delta) \quad \forall\, \delta>0, \tag{31}$$

и существуют точки $z_1 \in D$, $\zeta_0 \in \Gamma$ *такие, что отрезок* $[z_1, \zeta_0) = \{z \in \mathbb{C} : z = z_1 + \lambda(\zeta_0 - z_1),\ \lambda \in [0,1)\}$ *содержится в области* D *и справедлива оценка*

$$|\Phi^{(\nu)}[f](z)| \geq$$

$$\geq c(\sigma,k,\Gamma,\zeta_0)\int_0^{2d}\frac{\mu(x)}{x^{\nu+1}+(\rho(z,\Gamma))^{\nu+1}}\,dx \quad \forall\, z \in [z_1, \zeta_0). \tag{32}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку ζ_0 кривой Γ, в которой существует касательная. Предположим для простоты, что $\zeta_0 = 0$ и направление внешней относительно области D нормали к кривой Γ в точке ζ_0 совпадает с положительным направлением вещественной оси. Очевидно, существует зависящее от кривой Γ и точки $\zeta_0 \in \Gamma$ число $a>0$ такое, что для произвольного x, принадлежащего отрезку вещественной оси $[-a, a]$, и произвольного $\zeta \in \Gamma$ верно неравенство

$$|x \pm \zeta| \geq \frac{1}{2}(|x| + |\zeta|). \tag{33}$$

Докажем, что функция

$$f(\zeta) = \frac{2^k}{\pi i}\int_0^{a}\frac{\mu(x)\zeta^{k+1}}{(x-\zeta)(x+\zeta)^{k+1}}\,dx, \quad \zeta \in \Gamma,$$

удовлетворяет условию (31).

Для произвольных $\delta > 0$ и $\zeta \in \Gamma$ рассмотрим N-равномерный (т. е. удовлетворяющий условию вида (1)) точечный набор $\{\zeta_0, \ldots, \zeta_k\} \subset \Gamma_{\zeta,\delta}$. Возможны два случая:

1) $|\zeta_j| \leq 6\delta \quad \forall\, j = 0, \ldots, k$;

2) $|\zeta_j| \geq 4\delta \quad \forall\, j = 0, \ldots, k$.

В первом случае, полагая для определенности $6\delta < a$, воспользуемся определением конечной разности, N-равномерностью данного точечного набора и неравенством (33), а затем свойствами монотонности и нормальности функции μ. Тогда

$$|[\zeta_0, \ldots, \zeta_k; f, \zeta_0]| \leq \frac{2^k}{\pi} N^{k-1} \sum_{q=0}^{k} \int_0^a \frac{\mu(x)\,|\zeta_q|^{k+1}}{|x-\zeta_q|\,|x+\zeta_q|^{k+1}}\,dx \leq$$

$$\leq c(k, N) \sum_{q=0}^{k} \int_0^a \frac{\mu(x)\,|\zeta_q|^{k+1}}{(x+|\zeta_q|)^{k+2}}\,dx \leq$$

$$\leq c(k, N) \sum_{q=0}^{k} \left(\int_0^{|\zeta_q|} \frac{\mu(x)}{|\zeta_q|}\,dx + |\zeta_q|^{k+1} \int_{|\zeta_q|}^{a} \frac{\mu(x)}{x^{k+2}}\,dx \right) \leq$$

$$\leq c(k, N, \sigma) \sum_{q=0}^{k} \mu(|\zeta_q|)\left(2 - \frac{|\zeta_q|}{a}\right) \leq c(k, N, \sigma)\mu(\delta). \tag{34}$$

Во втором случае обозначим через $\mathcal{G}$ замкнутую выпуклую оболочку набора $\{\zeta_0, \ldots, \zeta_k\}$. В силу (33) $\mathcal{G}$ не пересекается с отрезком $[-a, a]$ и справедливо неравенство

$$|x \pm z| \geq \frac{1}{5}(|x| + |z|) \qquad \forall\, x \in [-a, a], \quad \forall\, z \in \mathcal{G}. \tag{35}$$

Для произвольного фиксированного $x \in [-a, a]$ функция

$$\varphi(x, z) = \frac{z^{k+1}}{(x-z)(x+z)^{k+1}}$$

является аналитической по переменной z в замкнутой области $\mathcal{G}$. Поэтому имеем (см. [6, с. 40])

$$|[\zeta_0, \ldots, \zeta_k]_{\varphi(x,\cdot)}| \leq \frac{1}{k!} \max_{z \in \mathcal{G}} \left| \frac{\partial^k \varphi(x, z)}{\partial z^k} \right|. \tag{36}$$

Из формулы

$$\frac{\partial^k \varphi(x, z)}{\partial z^k} = \frac{z P_{2k}(x, z)}{(x-z)^{k+1}(x+z)^{2k+1}},$$

где $P_{2k}(x, z)$ — полином степени $2k$ от переменных x, z, следует

$$\left| \frac{\partial^k \varphi(x, z)}{\partial z^k} \right| \leq c(k) \frac{|z|\,(|z|^{2k} + |x|^{2k})}{|x-z|^{k+1}|x+z|^{2k+1}}. \tag{37}$$

Обозначим $|z^*| = \max\limits_{z \in \mathcal{G}} |z|$. Тогда, используя соотношения (37), (35), получаем

$$\max_{z \in \mathcal{G}} \left| \frac{\partial^k \varphi(x, z)}{\partial z^k} \right| \leq c(k) \frac{|z^*|\,(|z^*|^{2k} + |x|^{2k})}{(|x| + |z^*|)^{3k+2}}. \tag{38}$$

Применяя неравенства (36), (38), аналогично (34) имеем

$$|[\zeta_0, \ldots, \zeta_k; f, \zeta_0]| \leq c(k)\,\delta^k \int_0^a \mu(x)\,|[\zeta_0, \ldots, \zeta_k]_{\varphi(x,\cdot)}|\,dx \leq$$

$$\leq c(\sigma, k)\mu(\delta). \tag{39}$$

Неравенство (31) следует из соотношений (34), (39).

Для доказательства оценки (32) воспользуемся равенством

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus [-a, a],$$

где

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^a \frac{\mu(x)}{x - z}\, dx\,, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus [0, a], \tag{40}$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=0}^{k} \sum_{j=0}^{p} \binom{k+1}{j} z^p \int_0^a \frac{\mu(x)\, x^{k-p}}{(x+z)^{k+1}}\, dx\,, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus [-a, 0]. \tag{41}$$

Пусть $B(\zeta_0, \varepsilon)$ — замыкание ε-окрестности точки ζ_0. При любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция f_1 — аналитическая в области $D \setminus B(\zeta_0, \varepsilon)$ и непрерывна в ее замыкании, а функция f_2 — аналитическая в области $(\mathbb{C} \setminus \overline{D}) \setminus B(\zeta_0, \varepsilon)$ и непрерывна в ее замыкании. Отсюда путем предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ с учетом представлений (40), (41) заключаем, что $\Phi[f](z) = f_1(z)$ для всех $z \in D$ и, следовательно,

$$\Phi^{(\nu)}[f](z) = \frac{\nu!}{2\pi i} \int_0^a \frac{\mu(x)}{(x - z)^{\nu+1}}\, dx \qquad \forall\, z \in D. \tag{42}$$

Обозначим $z_1 = -\dfrac{a}{2}$. Для произвольного $z \in [z_1, \zeta_0)$ на основании неравенства (33) имеем $\rho(z, \Gamma) \ge \dfrac{|z|}{2}$. Поэтому из соотношения (42) получаем

$$|\Phi^{(\nu)}[f](z)| = \frac{\nu!}{2\pi} \int_0^a \frac{\mu(x)}{(x + |z|)^{\nu+1}}\, dx \ \ge$$

$$\ge\ c(\nu) \int_0^a \frac{\mu(x)}{x^{\nu+1} + (\rho(z, \Gamma))^{\nu+1}}\, dx \qquad \forall\, z \in [z_1, \zeta_0),$$

откуда следует оценка (32). Теорема 5 доказана.

Неулучшаемость по порядку оценки (29) устанавливается следующей теоремой.

Теорема 6. *Пусть* μ *— нормальная мажоранта класса* $(\sigma, 1)$. *Тогда для произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует зависящее от* ε, μ, Γ *число* $M_0 > 0$ *такое, что для произвольного* $M \ge M_0$ *существует функция* $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$, *удовлетворяющая условиям* $M_{f,\Gamma} \le M(1 + \varepsilon)$,

$$\omega_\Gamma(f, \delta) \le c(\sigma)\mu(\delta) \qquad \forall\, \delta > 0, \tag{43}$$

существуют точки $z_1 \in D$, $\zeta_0 \in \Gamma$ *такие, что* $[z_1, \zeta_0) \subset D$, *и справедлива оценка*

$$|\Phi[f](z)| \ \ge\ c(\sigma, \Gamma, \zeta_0) \int_0^{2d} \frac{\mu(x)}{x + \rho(z, \Gamma)}\, dx + \chi_{D^+} M \qquad \forall\, z \in [z_1, \zeta_0). \tag{44}$$

Доказательство. В случае $D = D^-$ достаточно применить доказательство предыдущей теоремы, полагая $k=1$, $\nu=0$. Если же $D = D^+$, положим $M_0 = \dfrac{M_{\varphi,\Gamma}}{\varepsilon}$ и для произвольного $M \geq M_0$ рассмотрим функцию $f(\zeta) = \varphi(\zeta) - iM$, $\zeta \in \Gamma$, где

$$\varphi(\zeta) = \frac{2}{\pi i}\int_0^a \frac{\mu(x)\zeta^2}{(x-\zeta)(x+\zeta)^2}\,dx.$$

Тогда $M_{f,\Gamma} \leq M_{\varphi,\Gamma} + M \leq (1+\varepsilon)M$.

Функция f удовлетворяет условию (43) в силу того, что согласно доказанному выше, указанному условию удовлетворяет функция φ. Кроме того, $\Phi[f](z) = \Phi[\varphi](z) - iM$ для всех $z \in D$, откуда при $z \in [z_1, \zeta_0)$, ввиду положительности выражения $i\Phi[\varphi](z)$, имеем

$$|\Phi[f](z)| = |\Phi[\varphi](z)| + M. \tag{45}$$

А так как для $|\Phi[\varphi](z)|$ верна оценка вида (32) с $\nu = 0$, $k = 1$, то из (45) следует (44). Теорема 6 доказана.

1. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения. – Киев: Наук. думка, 1975. – 272 с.
2. *Тамразов П. М.* Конечно-разностные гладкости и полиномиальные приближения. – Киев, 1975. – 24 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 75-10).
3. *Tamrazov P. M.* Finite-difference smoothnesses and approximation // Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 19. Fourier Analysis and Approxim. Theory. – Budapest, 1976. – P. 827–843.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
5. *Герус О. Ф.* Оценка модуля непрерывности интеграла типа Коши в области и на ее границе // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 10. – С. 1321–1328.
6. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967. – 376 с.

Получено 26.11.97