УДК 519.21

В. О. Гасаненко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ДЕЯКІ ТОЧНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ПЕРЕБУВАННЯ ВІНЕРІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ

New exact relations are proved for probability of containment of the Wiener process between two boundaries dependent on time. The method of proving is based on the study of heat conduction equation in a domain determined by these function-boundaries. The relations are given as series.

Доведені нові точні формули для ймовірності перебування вінерівського процесу між двома межами, залежними від часу. Метод доведення базується на дослідженні рівняння теплопровідності в області, визначеній цими функціями-межами. Формули реалізовані у вигляді рядів.

Дослідження розподілу часу першого перетину випадковим процесом деякої функції $f(t)$ (одномежові задачі) або часу першого виходу із смуги $[f_1(t), f_2(t)]$, визначеної двома функціями $f_1(t) < f_2(t)$ (двомежові задачі), традиційно пожвавлюються під час появи нових прикладних проблем. Так, праці [1–3] пов'язані із проблемами теорії обслуговування, послідовного аналізу, теоретичної фізики. Повернення до цієї проблематики у працях [4–6] зумовлено сучасними проблемами фінансової математики. Для останніх проблем характерний пріоритет точних формул для обчислення відповідних розподілів у вказаних межових задачах перед асимптотичними. У цій статті отримано декілька точних формул двомежової задачі для вінерівського процесу. Застосований метод базується на дослідженні рівняння теплопровідності у межах, залежних від часу.

Через P_T позначимо ймовірність перебування на проміжку $[0, T]$:

$$P_T = P(|w(t)| \le f(t), t \in [0, T]),$$

де $f(t) > 0$, $t \ge 0$, а $w(t)$ — стандартний вінерівський процес.

Теорема 1. *Нехай $f(t)$ — двічі диференційовна на проміжку $[0, T]$ функція, що задовольняє умову*

1) $f^3(t)\,\ddot{f}(t) = c < 0, \quad c = \text{const}.$

Тоді

$$P_T = \sqrt{\frac{f(T)}{f(0)}} \sum_{n \ge 1} d_n \exp\left(-\lambda_n \int_0^T f^{-2}(x)\,dx\right) y_n(0).$$

Тут

$$d_n = \int_{-1}^{1} \exp\left(\frac{c_T}{2} z^2\right) y_n(z)\,dz,$$

$c_T = -f(T)\,\dot{f}(T)$, *а* λ_n *та* $y_n(z)$ — *n-те власне число та відповідна власна функція задачі Штурма—Ліувілля*

$$\frac{1}{2}\ddot{Z}(z) + \left(\frac{c}{2} z^2 + \lambda\right) Z(z) = 0, \qquad Z(-1) = Z(1) = 0.$$

Доведення. Як відомо, $P_T = u(0, T)$, де $u(x, t)$, $t \in [0, T]$, $x \in D_t$ є розв'язком задачі

$$u_{xx} = 2u_t, \quad u(\pm r(t), t) = 0, \quad u(x, 0) = I_{\operatorname{int} D_0}(x).$$

Тут $r(t) = f(T - t)$, $D_t = [-r(t), r(t)]$, а $I_A(x)$ — індикатор множини A. Далі застосуємо до розв'язку наведеної задачі заміну змінних, запропоновану у роботі [7]:

$$z = x r^{-1}(t), \; u(z, t) = q(z, t) v(z, t),$$

де $q(z, t) = r^{-1/2}(t) \exp\left(-\frac{1}{2} r(t) \dot{r}(t) z^2\right)$.

Для $v(z, t)$ отримуємо рівняння

$$\frac{1}{2} v_{zz} - r^2(t) v_t + \frac{1}{2} r^3(t) \ddot{r}(t) z^2 v = 0, \tag{1}$$

а також початкові та граничні умови

$$v(-1, t) = v(1, t) = 0, \quad v(z, 0) = r^{1/2}(0) \exp\left(\frac{r(0)\, \dot{r}(0)\, z^2}{2}\right) I_{\operatorname{int} D_0}(z r(0)).$$

Якщо $r^3(t) \ddot{r}(t) = \text{const}$, то рівняння (1) припускає відокремлення змінних. Нехай $v(z, t) = Z(z) T(t)$, тоді з (1) випливає

$$\frac{\ddot{Z}}{2Z} - r^2(t) \frac{\dot{T}}{T} + \frac{c}{2} z^2 = 0,$$

звідки маємо дві задачі:

$$\frac{1}{2} \ddot{Z}(z) + \left(\frac{c}{2} z^2 + \lambda\right) Z(z) = 0, \qquad Z(1) = Z(-1) = 0, \tag{2}$$

$$\dot{T}(t) + r^{-2}(t) \lambda T(t) = 0. \tag{3}$$

Тут λ є коефіцієнтом, що пов'язує (2) та (3). Він дорівнює одному з власних чисел задачі Штурма – Ліувілля (2). Позначимо через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ нескінченну послідовність власних чисел задачі (2). Побудувати таку послідовність можливо, виходячи з того факту, що всі власні числа можна занумерувати згідно з порядком зростання їх модулів $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots \le |\lambda_n| \ldots$ (див., наприклад, [8, с. 124]). Більш того, коли $c < 0$, то всі власні числа додатні $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, а відповідні власні функції задачі (2) $y_n(z)$, $n \ge 1$, утворюють ортонормовану систему таку, що будь-яка двічі диференційовна функція $b(z)$ на $[-1, 1]$, яка задовольняє граничні умови з (2), розкладається у ряд за цими функціями:

$$b(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n(z).$$

Цей ряд рівномірно та абсолютно збігається на проміжку $[-1, 1]$. Таким чином,

$$v(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \int_0^t r^{-2}(x)\, dx} y_n(z),$$

де a_n, $n \ge 1$, — коефіцієнти розвинення функції $v(z, 0)$ за функціями

$$y_n(z): \; a_n = \int_{-1}^{1} v(z, 0)\, y_n(z) dz.$$

Оскільки $\dot{r}(t) = -\dot{f}(T - t)$, з останнього випливає доведення теореми.

Проаналізувавши рівняння з умови 1, приходимо до висновку, що у нашому випадку функція $f(t)$ повинна мати вигляд

$$f(t) = \sqrt{c_1 t^2 \pm 2c_2 t + \frac{c_2^2 + c}{c_1}}, \qquad c_1 > 0, \quad |c_2| > 2\sqrt{-\frac{c}{3}}$$

або

$$f(t) = \sqrt{2t\sqrt{-c} + c_2}, \quad c_2 > 0 \quad (c_1,\ c_2 \text{ — сталі}).$$

Розглянемо також випадок, коли межі є прямими лініями.

Наслідок 1. *Якщо* $f(t) = kt + b$, $f(t) > 0$, $t \in [0, T]$, $b > 0$, *то маємо зображення*

$$P_T = \left(\frac{kT+b}{b}\right)^{1/2} \sum_{n \ge 0} a_n \exp\left\{-\frac{\pi^2 T}{8b(kT+b)}(2n+1)^2\right\},$$

де

$$a_n = \int_0^1 \exp\left(-\frac{(kT+b)k}{2} z^2\right) \cos\frac{(2n+1)\pi z}{2} dz.$$

Доведення грунтується на перетвореннях з попередньої теореми. В термінах наведених там означень у даному випадку маємо

$$r(0) = kt + b, \quad \dot{r}(0) = -k, \quad c = 0, \quad r(T) = b.$$

Далі, власні функції відповідної задачі Штурма – Ліувілля

$$\frac{1}{2}\ddot{Z}(z) + \lambda Z(z) = 0, \qquad Z(-1) = Z(1) = 0,$$

мають вигляд

$$y_n(z) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2}\right), \quad n \ge 0, \quad \lambda_n = \frac{\pi^2}{8}(2n+1)^2.$$

Із розкладу функції з початкової умови

$$v(0, z) = (kT+b)^{1/2} \exp\left(-\frac{(kT+b)k}{2} z^2\right)$$

на проміжку $[-1, 1]$ одержуємо зображення для a_n.

Очевидно, що $y_n(0) = 1$, $n \ge 0$. Таким чином, ми отримали всі необхідні функції та сталі для визначення P_T за допомогою теореми 1.

Зауважимо, що після заміни змінних в інтегралах, які визначають сталі a_n, а саме $z\sqrt{\frac{k(kT+b)}{2}} = y$, матимемо інше зображення для P_T:

$$P_T = \left(\frac{2}{kb}\right)^{1/2} \sum_{n \ge 0} a_n \exp\left(-\frac{\pi^2 T}{8b(kT+b)}(2n+1)^2\right),$$

де

$$a_n = \int_0^1 \exp(-y^2) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{\sqrt{2k(kT+b)}} y\right) dy.$$

Далі розглянемо підхід до визначення ймовірності P_T, який базується на розв'язку необхідної задачі теплопровідності методом теплових потенціалів. Покладемо

$$u_T(x, t) = \sum_{k \ge 0} (-1)^k \frac{4f(T)}{\pi(2k+1)} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2f(T)}\right) \exp\left(-\frac{((2k+1)\pi)^2}{8f^2(T)}(T-t)\right).$$

Теорема 2. *Якщо функція* $f(t)$ *диференційовна, додатна та* $f(0) > 0$, *то*

$$P_T = u_T(0,0) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \frac{f(\tau)}{\tau^{3/2}} \exp\left(-\frac{f^2(\tau)}{2\tau}\right) g(\tau) d\tau ,$$

де $g(\tau)$ *— розв'язок інтегрального рівняння*

$$g(\tau) = u_T(f(\tau), \tau) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\tau^T K(\tau, y)(y-\tau)^{-3/2} g(y) dy ,$$

$$K(\tau, y) = (f(y) - f(\tau)) \exp\left(-\frac{(f(y)-f(\tau))^2}{2(y-\tau)}\right) -$$

$$- (f(y) + f(\tau)) \exp\left(-\frac{(f(y)+f(\tau))^2}{2(y-\tau)}\right).$$

Доведення. Як і раніше, $u(0,0) = P_T$, де $u(x,t)$ — розв'язок необхідної нам задачі:

$$-2u_t = u_{xx}, \qquad u(\pm f(t), t) = 0, \qquad u(x, T) = I_{\operatorname{int} D_T}(x).$$

На підставі результатів, наведених у монографіях [9, с. 225, 485; 10, с. 44], розв'язок цієї задачі має таке зображення при $g_1(t) = -f(t)$, $g_2(t) = f(t)$:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^T \frac{g_i(\tau) - x}{(\tau - t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(g_i(\tau)-x)^2}{2(\tau - t)}\right) \mu_i(\tau) d\tau + u_T(x,t),$$

де $\mu_i(t)$ — розв'язок системи інтегральних рівнянь Вольтерри. Покладемо

$$K_T(t, g_i, g_j)\mu_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^T \frac{g_i(\tau) - g_j(t)}{(\tau - t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\left(g_i(\tau) - g_j(t)\right)^2}{2(\tau - t)}\right) \mu_i(\tau) d\tau ,$$

тоді система для визначення $\mu_i(t)$, $i = 1, 2$, має вигляд

$$K_T(t, g_1, g_1)\mu_1 + K_T(t, g_1, g_2)\mu_2 + u_T(g_1(t), t) = -\mu_1(t),$$
$$K_T(t, g_2, g_1)\mu_1 + K_T(t, g_2, g_2)\mu_2 + u_T(g_2(t), t) = \mu_2(t).$$

Зауважимо, що $u_T(x, T)$ здійснює розвинення функції $u(x, T)$ із початкової умови за повною системою функцій $\cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2f(T)}\right)$, $n \geq 0$, на проміжку $[-f(T), f(T)]$.

У нашому випадку розв'язок останньої системи можна виразити через розв'язок одновимірного інтегрального рівняння.

Неважко переконатись, що виконуються тотожності

$$-K_T(t, -f, -f) \equiv K_T(t, f, f), \qquad -K_T(t, -f, f) \equiv K_T(t, f, -f),$$

$$u_T(f(t), t) \equiv u_T(-f(t), t) =: a(t).$$

Далі, позначимо символами α, β відповідно інтегральні перетворення $\alpha := K_T(t, f, f)$ та $\beta := K_T(t, f, -f)$. Тепер помножимо перше рівняння з системи на -1. В результаті отримаємо систему інтегральних рівнянь у векторно-матричному зображенні. Покладемо

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2), \qquad \overline{a} = (-a, a).$$

Тоді маємо $A\,\overline{\mu} + \overline{a} = \overline{\mu}$. За допомогою математичної індукції неважко переконатись, що розв'язок останнього має зображення

$$\mu_2(t) = \sum_{k=0}^{m} (\alpha - \beta)^k (a)(t), \qquad -\mu_1(t) = \mu_2(t).$$

Оскільки, за означенням, $\alpha - \beta = K(\tau, y)$, з попередніх викладок випливає

$$P_T = u(0,0) = u_T(0,0) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \frac{f(\tau)}{\tau^{3/2}} \exp\left(-\frac{f^2(\tau)}{2\tau}\right) \mu_2(\tau) d\tau,$$

де $\mu_2(t)$ — розв'язок рівняння

$$\mu_2(t) = a(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^T K(t, y)(y-t)^{-3/2} \mu_2(y) dy.$$

Теорему доведено.

1. *Shepp L. A.* A first passage problem for the Winer process // Ann. Math. Statist. – 1967. – **38**. – P. 1912–1914.
2. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – Киев: Наук. думка, 1975. – 138 с.
3. *Novikov A. A.* A martingale approach in problems on first crossing time of nonlinear boundaries // Proc. Steklov Inst. Math. – 1983. – **4**. – P. 141–163.
4. *Yor M.* On some exponential functionals of Brownian motion // Adv. Appl. Probab. – 1992. – **24**. – P. 509–531.
5. *Kunitomo N., Ikeda M.* Prising options with curved boundaries // Math. Finance. – 1992. – **2**. – P. 275–297.
6. *Teuken M., Goovaerts M.* Double boundary crossing result for the Brownian motion // Scand. Actuar. J. – 1994. – **2**. – P. 139–150.
7. *Гринберг Г. А.* Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях // Прикл. математика и механика. – 1967. – **31**, № 2. – С. 193–203.
8. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Т.* Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 231 с.
9. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Высш. шк., 1953. – 679 с.
10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 428 с.

Одержано 20.11.97